TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ

ET DE

MAGNÉTISME.

SOCIÉTÉ DE CHIMIE INDUSTRIELLE
28 Rue des Saints-Pères
PARIS

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

ET DE

MAGNÉTISME,

PAR

J. CLERK MAXWELL, M. A.

LL. D. EDIN., F. R. SS. L. ET E.

PROFESSEUR DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE A L'UNIVERSITÉ DE CAMBRIDGE.

Traduit de l'anglais sur la deuxième édition,

PAR G. SÉLIGMANN-LUI,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes,

AVEC

NOTES ET ÉCLAIRCISSEMENTS,

PAR

MM. Cornu, de l'Institut, Potier et Sarrau, Professeurs à l'École Polytechnique.

TOME I.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1885

(Tous droits réservés.)

210761

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Dans cette édition française, le texte de l'illustre Maxwell a été scrupuleusement respecté; mais, en raison même de la fidélité avec laquelle le traducteur a suivi l'original, on a jugé utile d'ajouter quelques éclaircissements destinés à faciliter l'étude de cet Ouvrage aux lecteurs peu familiarisés avec les formes de l'enseignement anglais. Dans le même but, on a complété l'Ouvrage par des Notes sur certaines questions qui ne sont pas encore entrées dans notre enseignement (Théorie des Quaternions, Théorie des Sphériques harmoniques, etc.), et par des renseignements bibliographiques.

Sous cette forme, l'édition française peut être lue avec fruit par nos professeurs et même par les élèves des Facultés et des Écoles spéciales.

Avec les progrès qui s'accomplissent tous les jours dans l'utilisation pratique de l'Électricité, les ingénieurs électriciens sont amenés inévitablement à perfectionner leurs connaissances théoriques, spécialement en ce qui concerne les mesures électriques. L'Ouvrage de Maxwell contient précisément un bon nombre de

Chapitres, d'une lecture aisée, où se trouvent exposées, avec une clarté parfaite, les théories de ces méthodes rigoureuses dont l'usage est devenu si général. Les Notes relatives aux questions soulevées par le récent congrès des électriciens ajouteront encore à l'intérêt qui s'attache actuellement à ces études. L'ingénieur électricien trouvera donc également grand profit à consulter et à méditer le livre de Maxwell.

G.-V.

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Le fait que certains corps, après avoir été frottés, paraissent attirer d'autres corps, était connu des anciens. Dans les temps modernes, on a observé une grande variété d'autres phénomènes que l'on a reconnus se rattacher à ces phénomènes d'attraction; on les a classés sous le nom de phénomènes *électriques*, l'ambre (ἤλεκτρον) étant la substance à propos de laquelle ils ont été décrits pour la première fois.

On sait aussi depuis longtemps que d'autres corps, en particulier la pierre d'aimant et des morceaux de fer et d'acier qui ont été soumis à certaines opérations, donnent lieu à des phénomènes d'action à distance. On a reconnu que ces phénomènes, et d'autres qui en dépendent, diffèrent des phénomènes électriques; et on les a classés sous le nom de phénomènes *magnétiques*, la pierre d'aimant (μάγνης) ayant été trouvée auprès de Magnésie de Thessalie.

Depuis, on a reconnu qu'il existe une relation entre ces deux classes de phénomènes; et les relations entre les divers phénomènes de ces deux classes, pour autant qu'elles sont connues, constituent la science de l'Électromagnétisme.

Dans ce Traité, je me propose de décrire les plus importants de ces phénomènes, de montrer comment on peut les soumettre à la mesure et de rechercher les relations mathématiques qui existent entre les quantités mesurées. Ayant ainsi obtenu les données d'une théorie mathématique de l'Électromagnétisme et ayant montré

comment cette théorie peut s'appliquer au calcul des phénomènes, je m'efforcerai de mettre en lumière, aussi clairement qu'il me sera possible, les rapports qui existent entre les formes mathématiques de cette théorie et celles de la science fondamentale de la Dynamique; de la sorte, nous serons, dans une certaine mesure, préparés à définir la nature des phénomènes dynamiques parmi lesquels nous devons chercher des analogies ou des explications des phénomènes électromagnétiques.

Dans la description des phénomènes, je choisirai ceux qui mettent le plus clairement en évidence les idées fondamentales de la théorie, passant sur les autres ou attendant pour y revenir que le lecteur soit plus avancé.

Au point de vue mathématique, ce qui dans un phénomène tient la place la plus importante, ce sont les éléments mesurables. Je considérerai donc les phénomènes électriques surtout en vue de leur mesure, je décrirai les méthodes et je définirai les unités desquelles dépend cette mesure.

Dans l'application des Mathématiques au calcul des quantités électriques, je m'efforcerai d'abord de déduire des données dont nous disposons les conséquences les plus générales; ensuite j'appliquerai ces résultats aux cas les plus simples que l'on puisse choisir. Autant que possible, j'éviterai les questions qui, bien qu'ayant donné carrière à l'habileté des mathématiciens, n'ont rien ajouté à ce que nous savions sur la Science.

Les relations qui existent entre les différentes branches comprises dans la Science que nous allons étudier sont plus nombreuses et plus complexes que dans toute autre science connue jusqu'à ce jour; et les relations qu'en dehors d'elle-même l'électricité a, d'une part avec la Dynamique, d'autre part avec la chaleur, la lumière, l'action chimique et la constitution des corps, semblent indiquer l'importance toute particulière de la Science électrique pour nous aider à comprendre la nature.

Il me semble donc que l'étude de l'Électromagnétisme dans tous ses développements est devenue de première importance, pour nous mettre en mesure de pousser plus loin les progrès de la Science.

Les lois mathématiques des différentes classes de phénomènes ont, en général, été établies d'une manière satisfaisante.

Les relations des différentes classes de phénomènes ont aussi été étudiées, et, à mesure qu'elles ont été mieux connues, l'exactitude et la rigueur des lois expérimentales sont devenues de plus en plus probables.

Enfin, dans les efforts faits pour réduire l'Électromagnétisme à ne plus être qu'une science dynamique, on a réalisé quelques progrès : on a fait voir qu'aucun phénomène électromagnétique ne contredit l'hypothèse qu'il dépend d'une action purement dynamique.

Cependant, ce que l'on a fait jusqu'à ce jour est loin d'avoir épuisé le champ des recherches électriques : mais bien plutôt ce champ s'est élargi, de nouveaux sujets d'études ont été signalés, de nouvelles ressources ont été offertes aux investigations.

Il n'est pas besoin de s'étendre sur l'utilité des études magnétiques pour la navigation, de rappeler combien il importe de connaître sur un navire la direction vraie de la boussole et l'influence des masses de fer. Mais les travaux de ceux qui se sont efforcés d'accroître la sécurité de la navigation au moyen d'observations magnétiques ont en même temps fait faire de grands progrès à la Science pure.

C'est en qualité de membre de l'Union magnétique allemande que Gauss fut conduit à porter sa puissante intelligence sur la théorie du Magnétisme et sur ses méthodes d'observation ; et non seulement il accrut grandement nos connaissances sur la théorie des attractions, mais encore il renouvela l'ensemble de la Science magnétique, en ce qui concerne les instruments qu'elle emploie,

la manière de les observer et la façon de calculer les résultats; en sorte que ses Mémoires sur le Magnétisme terrestre peuvent être pris comme des modèles de recherche physique par tous ceux qui s'occupent de mesurer une des forces de la nature.

Les importantes applications de l'Électromagnétisme à la télégraphie ont aussi eu leur effet sur la Science proprement dite, en donnant aux mesures électriques exactes une valeur commerciale, en permettant aux électriciens de faire des instruments un usage bien autrement étendu que ne le comporte la pratique ordinaire du laboratoire. Ce besoin de connaissances électriques, ces occasions d'en acquérir par expérience, ont déjà eu des conséquences importantes, soit en stimulant l'activité des électriciens déjà avancés dans la Science, soit en répandant parmi les praticiens des connaissances présentant un haut degré de précision, condition favorable au progrès scientifique en général dans l'art de l'ingénieur.

Il ne manque pas d'ouvrages où les phénomènes électriques ou magnétiques sont décrits sous une forme populaire; mais ce n'est point là ce que demandent ceux qui ont été mis en face de quantités à mesurer, et dont l'esprit ne se tient point pour satisfait par des expériences de cours.

Il existe aussi un nombre considérable de Mémoires mathématiques de grande importance pour la Science électrique; mais ils sont enfouis dans les volumineux bulletins des Sociétés savantes; ils ne forment point d'ensemble cohérent, ils sont de valeurs très inégales et, pour la plupart, ne sauraient être compris que par des mathématiciens de profession.

C'est pourquoi j'ai pensé qu'il serait utile de faire un Traité, où l'ensemble du sujet serait repris d'une manière méthodique et où l'on indiquerait, pour chacune de ses parties, comment elle peut être soumise à la vérification par des mesures directes.

L'esprit général de ce Traité est bien différent de celui de plu-

sieurs excellents ouvrages sur l'Électricité, publiés pour la plupart en Allemagne; et il pourra sembler que l'on n'a guère rendu justice aux spéculations de plusieurs électriciens et mathématiciens illustres. La raison en est qu'en commençant l'étude de l'Électricité je résolus de ne lire aucun travail mathématique sur ce sujet, avant de posséder à fond les *Recherches expérimentales sur l'Électricité* de Faraday. Je savais que l'on croyait à une différence dans la conception que Faraday ou les mathématiciens se faisaient des phénomènes, en sorte que ni lui ni eux n'étaient satisfaits des formes de langage de l'autre. J'étais convaincu que cette différence ne tenait point à l'erreur de l'un ou de l'autre; et je tenais cette conviction de Sir William Thomson (¹) : c'est à ses avis, à son secours, aussi bien qu'à ses Mémoires publiés, que je dois la plus grande partie de ce que j'ai appris sur ce sujet.

A mesure que j'avançais dans l'étude de Faraday, je m'apercevais que sa manière de concevoir les phénomènes était aussi mathématique, quoiqu'elle ne se présentât pas sous la forme conventionnelle des symboles mathématiques. Je reconnus que ces idées pouvaient être exprimées par les formes mathématiques habituelles, et être ainsi comparées à celles des mathématiciens de profession.

Par exemple, Faraday, dans ses conceptions, voyait les lignes de force traverser tout cet espace où les mathématiciens ne considéraient que des centres de force agissant à distance; Faraday faisait intervenir un milieu là où ils ne tenaient compte que de la distance; Faraday cherchait l'origine des phénomènes dans des actions réelles s'exerçant dans ce milieu : ils se contentaient de la trouver dans une propriété d'agir à distance attribuée aux fluides électriques.

Lorsque j'eus traduit sous forme mathématique ce que je con-

(¹) Je saisis cette occasion de reconnaître les obligations que j'ai à Sir William Thomson et au professeur Tait, pour tant de précieux conseils qu'ils m'ont donnés pendant l'impression de ce Livre.

sidérais comme les idées de Faraday, je reconnus qu'en général les résultats de deux méthodes sont concordants, en sorte que les deux méthodes rendent compte des mêmes phénomènes et conduisent aux mêmes lois : mais la méthode de Faraday se rapproche de celles où l'on part de l'ensemble pour arriver aux parties par l'analyse, tandis que le principe des méthodes mathématiques ordinaires est de commencer par les parties et d'élever tout l'édifice par voie de synthèse.

J'ai ainsi reconnu que plusieurs des plus fécondes méthodes de recherche découvertes par les mathématiciens pouvaient recevoir, au moyen d'idées dérivées de celles de Faraday, une forme bien préférable à leur expression primitive.

Ainsi l'ensemble de la théorie du potentiel, considéré comme quantité satisfaisant à une certaine équation aux différences partielles, appartient essentiellement à ce que j'ai appelé la *méthode de Faraday*. Dans l'autre méthode, le potentiel, si tant est que l'on fasse seulement intervenir cette considération, doit être regardé comme le résultat de la sommation des quotients obtenus en divisant chaque masse électrique par sa distance à un point fixe. C'est pourquoi bon nombre des découvertes mathématiques de Laplace, Poisson, Green et Gauss trouvent leur place dans ce Traité et leur véritable expression au moyen d'idées empruntées pour la plupart à Faraday.

De grands progrès ont été faits dans la Science électrique, surtout en Allemagne, par des hommes qui préféraient la théorie de l'action à distance. Les précieuses déterminations électriques de Weber sont interprétées par lui dans cette théorie ; les spéculations électromagnétiques dont l'origine remonte à Gauss, et qui ont ensuite été développées par Weber, Riemann, J. et C. Neumann, Lorenz, etc., sont fondées sur la théorie de l'action à distance; mais elles dépendent, ou directement de la vitesse relative des molécules, ou de la propagation graduelle de quelque chose, po-

tentiel ou force, d'une molécule à l'autre. Les brillants succès que ces hommes éminents ont obtenus dans l'application des Mathématiques aux phénomènes électriques donnent, et c'est tout naturel, plus de poids encore à leurs considérations théoriques; en sorte que ceux qui, étudiant l'Électricité, s'adressent à ces maîtres comme aux plus hautes autorités en fait d'Électricité mathématique, se pénètrent sans doute de leurs hypothèses physiques aussi bien que de leurs méthodes mathématiques.

Ces hypothèses physiques sont tout à fait étrangères à la façon d'envisager les choses que j'ai adoptée; et un des objets que j'avais en vue, en écrivant ce Traité, est de donner aux lecteurs qui désirent étudier l'Électricité le moyen de voir qu'il y a une autre manière de traiter la question, tout aussi capable d'expliquer les phénomènes, et qui, bien qu'elle semble moins précise sur certains points, correspond plus exactement, à mon sens, à l'état actuel de nos connaissances, autant par ce qu'elle affirme que par ce qu'elle laisse indécis.

En outre, il est très important, au point de vue philosophique, de comparer deux méthodes qui ont réussi l'une et l'autre à expliquer les principaux phénomènes électromagnétiques, qui ont toutes deux essayé d'expliquer la propagation de la lumière par un phénomène électromagnétique, qui en ont effectivement calculé la vitesse, et qui cependant sont essentiellement différentes, aussi bien par la conception fondamentale du phénomène qui se produit que par les conceptions secondaires des quantités que l'on envisage.

C'est pourquoi j'ai fait office d'avocat plutôt que de juge; j'ai développé une des méthodes plutôt que je n'ai essayé de décrire impartialement les deux. Je ne doute pas que ce que j'ai appelé la méthode allemande ne trouve aussi des défenseurs et ne soit exposée avec un talent digne de son ingéniosité.

Je n'ai point entrepris d'épuiser la matière et de rendre compte

de tous les phénomènes, de toutes les expériences, de tous les appareils d'Électricité. Le lecteur qui désire connaître tout ce qui a été fait sur ce sujet trouvera un grand secours dans le *Traité d'Électricité* du professeur A. de la Rive, et dans plusieurs ouvrages allemands, tels que le *Galvanismus* de Wiedemann, la *Reibungselektricität* de Riess, l'*Einleitung in die Elektrostatik* de Beer, etc.

Je me suis borné à peu près uniquement au développement mathématique du sujet; mais au lecteur qui a déjà appris, par l'expérience si c'est possible, ce que sont les phénomènes à observer, je recommanderai de lire avec soin les *Recherches expérimentales sur l'Électricité* de Faraday. Il y trouvera, dans leur exacte succession historique, le récit fait jour par jour de quelques-unes des découvertes et des recherches électriques les plus importantes, poursuivies avec un ordre et un enchaînement qui n'auraient guère pu être plus parfaits, si le résultat eût été connu d'avance, et exposées dans le langage d'un homme qui consacrait une grande attention à la manière de décrire les opérations scientifiques et leurs résultats (1).

Pour étudier n'importe quelle question, il est toujours préférable de lire les Mémoires originaux, car on s'assimile mieux une science naissante; et, dans le cas des *Recherches* de Faraday, cette étude est relativement aisée, puisque tous les Mémoires ont été publiés séparément, et peuvent être lus les uns après les autres. Si, par quelque partie de ce Livre, j'ai pu aider un lecteur à comprendre les formes de pensée et d'expression de Faraday, je considérerai que j'ai atteint un de mes principaux objets : faire partager à d'autres le plaisir que j'ai éprouvé moi-même à lire les *Recherches* de Faraday.

La description des phénomènes, et les parties élémentaires de la

(1) *Vie et Lettres de Faraday*, t. I, p. 395.

théorie de chaque sujet, se trouvent dans les premiers Chapitres de chacune des quatre Parties en lesquelles est divisé ce Traité. Le lecteur trouvera dans ces Chapitres de quoi lui donner une connaissance élémentaire de l'ensemble de la science.

Les autres Chapitres de chaque Partie sont remplis par les développements théoriques d'un ordre plus élevé, par les procédés de calcul numérique, par les instruments et les méthodes de recherche expérimentale.

Les relations entre les phénomènes électromagnétiques et ceux des radiations, la théorie des courants électriques moléculaires, enfin les résultats des spéculations sur la nature de l'action à distance, sont traités dans les quatre derniers Chapitres du second Volume.

1er février 1873.

PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION.

Lorsqu'on me demanda de relire les épreuves de l'*Electricity and Magnetism*, l'impression était déjà parvenue au IXe Chapitre, dont la majeure partie avait été revue par l'Auteur.

Ceux qui sont familiers avec la première édition verront, en la comparant à celle-ci, l'étendue des changements que le professeur Maxwell se proposait d'introduire dans le fonds et dans l'exposé du sujet; ils comprendront combien cette édition a perdu par la mort prématurée de l'Auteur. Les neuf premiers Chapitres ont été dans certains cas entièrement refondus, de nombreuses additions ont été faites, et le texte primitif a été remanié et simplifié.

A partir du IXe Chapitre, la présente édition n'est guère plus qu'une réimpression. Les seules libertés que j'aie prises ont été de rétablir, par place, un intermédiaire dans le raisonnement mathématique, quand cela me paraissait avantageux pour le lecteur; j'ai aussi ajouté au bas des pages quelques notes sur les points qui, d'après ma propre expérience ou celle de mes élèves, semblaient demander quelques compléments d'explications. Ces Notes sont mises entre crochets.

Il y avait, à ma connaissance, deux points dont le professeur se proposait de modifier profondément l'exposé : la théorie mathématique de la conduction de l'électricité dans un réseau de conducteurs, et la détermination des coefficients d'induction dans les bobines de fil. Mais les notes du professeur ne m'ont pas permis d'ajouter au texte de la première édition rien d'important sur ce

sujet, sauf une Table numérique reproduite au § 706 du second Volume. Cette Table sera très utile pour le calcul des coefficients d'induction dans les bobines circulaires.

Dans un Ouvrage aussi original, contenant tant de détails sur des résultats nouveaux, il était impossible qu'il n'y eût pas quelques erreurs dans la première édition. On trouvera, je l'espère, que la plupart de ces erreurs ont été corrigées dans la présente édition. J'ai d'autant plus lieu de l'espérer que, pour revoir une partie des épreuves, j'ai eu l'assistance de plusieurs de mes amis connaissant bien l'Ouvrage, parmi lesquels je dois citer tout particulièrement mon frère le professeur Charles Niven, et M. J.-J. Thomson, agrégé du Collège de la Trinité, à Cambridge.

W.-D. NIVEN.

Trinity College, Cambridge, 1er octobre 1881.

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET DE MAGNÉTISME.

PRÉLIMINAIRES.

DE LA MESURE DES QUANTITÉS.

1. L'expression de toute quantité se compose de deux facteurs ou éléments. L'un d'eux est le nom d'une certaine quantité bien connue, qui est de même espèce que la quantité à exprimer, et que l'on choisit pour étalon de mesure. L'autre élément est le nombre de fois qu'il faut prendre l'étalon pour reproduire la quantité voulue. Dans le langage technique, la quantité qui sert d'étalon est appelée l'*unité;* et le nombre est appelé *valeur numérique de la quantité.*

Il faut autant d'unités différentes qu'il y a d'espèces différentes de quantités à mesurer; mais, dans toutes les sciences dynamiques, il est possible de définir ces unités au moyen des trois unités fondamentales de longueur, de temps et de masse. Ainsi les unités d'aire et de volume sont définies comme étant le carré et le cube ayant pour côté l'unité de longueur.

Quelquefois cependant on trouve plusieurs unités de même espèce établies d'après des considérations indépendantes. Ainsi le gallon, c'est-à-dire le volume de dix livres d'eau, sert d'unité de capacité en même temps que le pied cube. Le gallon peut être une mesure convenable dans certains cas, mais ce n'est point une mesure systématique, car sa relation numérique avec le pied cube n'est pas un nombre entier rond.

2. Pour édifier un système mathématique, nous nous supposons

données les unités fondamentales de temps, de longueur et de masse, et nous en déduisons toutes les unités dérivées, au moyen des plus simples définitions auxquelles il nous est possible de parvenir.

Les formules auxquelles nous arrivons doivent être telles qu'un homme de n'importe quel pays, substituant aux différents symboles les valeurs numériques des quantités mesurées au moyen des unités adoptées par sa nation, obtienne un résultat exact.

Il est de la plus grande importance, dans toutes les recherches scientifiques, d'employer des unités appartenant à un système bien défini, et de connaître les relations de ces unités avec les unités fondamentales, de façon que l'on puisse immédiatement traduire les résultats d'un système dans un autre.

La meilleure manière d'y parvenir est de déterminer les dimensions de chaque unité en fonction des trois unités fondamentales. Quand une unité donnée varie comme la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une de ces unités fondamentales, on dit qu'elle est à n dimensions par rapport à cette unité.

Par exemple, l'unité scientifique de volume est toujours le cube ayant pour côté l'unité de longueur. Si l'unité de longueur varie, l'unité de volume varie proportionnellement à son cube, et l'on dit que l'unité de volume est à trois dimensions par rapport à l'unité de longueur.

La connaissance des unités fournit une vérification qui doit être faite pour toute équation résultant d'une recherche un peu étendue. Dans une telle équation, les dimensions de chaque terme par rapport à chacune des unités fondamentales doivent être les mêmes. S'il n'en est pas ainsi, l'équation est absurde et contient quelque erreur; car son interprétation serait différente suivant que l'on choisirait tel ou tel système arbitraire d'unités (1).

Les trois unités fondamentales.

3. 1° *Longueur.* — En Angleterre, l'unité de longueur dans les questions scientifiques est le pied, c'est-à-dire le tiers d'un yard étalon conservé au Trésor.

En France, et dans les autres pays qui ont adopté le système métrique, c'est le mètre. Théoriquement, le mètre est la dix-millionième partie de la longueur d'un méridien terrestre mesuré du pôle à l'équa-

(1) La théorie des dimensions a été énoncée, pour la première fois, par Fourier, (*Théorie de la chaleur*, § 160).

teur; mais, en fait, c'est la longueur d'un étalon conservé à Paris, que Borda avait construit pour représenter, à la température de la glace fondante, la longueur précédente, telle que l'avait mesurée Delambre. On n'a pas modifié le mètre pour le mettre en accord avec de nouvelles mesures de la Terre plus exactes, mais on évalue l'arc de méridien au moyen du mètre primitif.

En Astronomie, on prend quelquefois pour unité de longueur la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Dans l'état actuel de la science, l'unité de longueur la plus générale que l'on pourrait prendre serait la longueur d'onde, dans le vide, d'une certaine lumière émise par quelque corps largement répandu, le sodium par exemple, dont le spectre renferme des lignes bien nettes. Cette unité serait indépendante de tout changement dans les dimensions de la Terre, et doit être adoptée par ceux qui se flattent que leurs écrits dureront plus que ce globe même.

En parlant des dimensions des unités, nous appellerons l'unité de longueur [L]. Si l est la valeur numérique d'une longueur, il est entendu qu'elle est exprimée en fonction de l'unité concrète [L], en sorte que l'expression développée de la longueur serait l [L].

4. 2° *Temps.* — Dans tous les pays civilisés, l'unité fondamentale de temps se déduit de la durée de la rotation de la Terre autour de son axe. Le jour sidéral, c'est-à-dire la durée périodique véritable de la rotation de la Terre, peut se déterminer avec une grande exactitude, au moyen des observations astronomiques ordinaires, et le jour solaire moyen peut en être déduit, connaissant la durée de l'année.

L'unité de temps adoptée dans toutes les recherches physiques est la seconde de temps solaire moyen.

En Astronomie, on prend quelquefois l'année comme unité de temps. On pourrait obtenir une unité de temps d'un caractère plus universel, en prenant la période des vibrations de cette espèce particulière de lumière qui a pour longueur d'onde l'unité de longueur.

Nous appellerons [T] l'unité de temps prise en elle-même, et t la mesure numérique du temps.

5. 3° *Masse.* — L'unité fondamentale de masse, en Angleterre, est la livre avoirdupois, que l'on conserve au Trésor. Le grain, qui sert souvent d'unité, est défini la 7000e partie de cette livre.

Dans le système métrique, c'est le gramme, qui, théoriquement, serait la masse d'un centimètre cube d'eau distillée, à une température

et sous une pression déterminées; et qui, en fait, est la 1000e partie d'un kilogramme étalon conservé à Paris.

L'exactitude avec laquelle on peut comparer les masses des corps par voie de pesée est bien supérieure à celle que l'on a pu atteindre jusqu'à présent dans la mesure des longueurs; aussi, lorsque l'opération est possible, doit-on déterminer toutes les masses par comparaison directe avec l'étalon, et non par des expériences au moyen de l'eau.

En Astronomie descriptive, la masse du Soleil ou celle de la Terre servent quelquefois d'unité; mais, en Mécanique céleste, l'unité de masse se déduit des unités de temps et de longueur jointes au fait de la gravitation universelle. L'unité astronomique de masse est la masse qui attire un autre corps placé à l'unité de distance, de façon à lui imprimer l'unité d'accélération.

Si nous voulons constituer un système universel d'unités, nous pouvons ou bien définir l'unité de masse au moyen des unités de longueur et de temps précédemment définies : c'est ce que l'état actuel de la science ne nous permet de faire qu'approximativement; ou bien, si nous espérons [1] être bientôt en mesure de déterminer la masse d'une molécule isolée d'une substance prise comme étalon, nous pouvons attendre cette détermination avant de fixer un étalon universel de masse.

En traitant des dimensions des autres unités, nous désignerons l'unité de masse, prise en elle-même, par le symbole [M], et nous la prendrons comme une des trois unités fondamentales. Quand on prend, comme dans le système français, une substance particulière comme étalon de densité, l'unité de masse n'est plus indépendante, mais varie comme l'unité de volume, ou comme $[L^3]$.

Si, comme dans le système astronomique, l'unité de masse est définie au moyen de sa puissance attractive, les dimensions de [M] seront $[L^3T^{-2}]$.

En effet, l'accélération due à une masse m à la distance r est, d'après la loi de Newton, $\frac{m}{r^2}$. Supposons que cette accélération agisse pendant un temps très court t sur un corps primitivement en repos, et qu'elle lui fasse parcourir un espace s : alors, d'après la formule de Galilée,

$$s = \frac{1}{2} f t^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{r^2} t^2;$$

---

(1) *Voir* Professeur J. Loschmidt, *Zur Grösse der Luftmolecüle* (*Académie de Vienne*, 18 octobre 1835); G.-J. Stoney, *The internal motion of gases* (*Phil. Mag.*, août 1868); et Sir W. Thomson, *The size of atoms* (*Nature*, 31 mars 1870).

d'où

$$m = \frac{2r^3 s}{t^2}.$$

Puisque r et s sont des longueurs, et t un temps, cette égalité ne peut être vraie que si les dimensions de m sont $[L^3T^{-2}]$. La même démonstration peut être faite en partant de toute équation astronomique quelconque, où la masse d'un corps apparaît dans quelques termes et non dans tous (1).

Unités dérivées.

6. L'unité de vitesse est la vitesse pour laquelle l'unité de longueur est parcourue dans l'unité de temps. Les dimensions sont $[LT^{-1}]$.

Si nous adoptons des unités de longueur et de temps empruntées aux vibrations lumineuses, l'unité de vitesse est la vitesse de la lumière.

L'unité d'accélération est l'accélération pour laquelle la vitesse s'accroît de l'unité dans l'unité de temps. Ses dimensions sont $[LT^{-2}]$.

L'unité de densité est la densité d'une substance qui contient l'unité de masse sous l'unité de volume. Ses dimensions sont $[ML^{-3}]$.

L'unité de quantité de mouvement est la quantité de mouvement de l'unité de masse se mouvant à l'unité de vitesse. Ses dimensions sont $[MLT^{-1}]$.

L'unité de force est la force qui produit l'unité de quantité de mouvement dans l'unité de temps. Ses dimensions sont $[MLT^{-2}]$.

Telle est l'unité absolue de force, dont la définition est implicitement comprise dans toute équation de Dynamique. Cependant, bien des livres où l'on donne ces équations adoptent une autre unité de force, à savoir le poids de l'unité nationale de masse; et ensuite, pour satisfaire à ces équations, ils abandonnent l'unité nationale de masse

(1) Si l'on prend pour unités le centimètre et la seconde, l'unité astronomique de masse serait d'environ $1{,}537 \times 10^7$ grammes, ou de 15,37 tonnes, d'après les expériences de Cavendish répétées par Baily. Baily adopte le nombre 5,6604 comme résultat de l'ensemble de ses expériences sur la densité de la Terre, et ce nombre, joint aux valeurs qu'il emploie pour les dimensions de la Terre et pour l'intensité de la gravitation à sa surface, lui donne comme résultat direct de ses déterminations la valeur indiquée plus haut. [En effet, l'accélération due à la masse terrestre serait $981 \times R^2$, si la masse terrestre concentrée en un point agissait sur un point situé à la distance 1; c'est la valeur de la masse terrestre en unités astronomiques; sa valeur en unités ordinaires est $5{,}66 \times \frac{4}{3}\pi R^3$; l'unité astronomique serait donc $\frac{5{,}66 \times 4 \times \pi R^3}{3 \times 981 \times R^4} = 0.01537\,\frac{\pi}{2}R$, ou, comme $\frac{\pi}{2}R = 10^9$, $1{,}537 \times 10^7$ grammes. (P.)]

et adoptent comme unité dynamique une unité artificielle égale à l'unité nationale divisée par la valeur numérique de la force de gravité, au lieu où l'on se trouve. De cette façon, on fait dépendre et l'unité de force et l'unité de masse de la valeur de la force de gravité, laquelle varie d'un endroit à l'autre; et, par suite, des énoncés comprenant ces éléments sont incomplets, si l'on ne connaît la force de gravité, au lieu où ces énoncés ont été reconnus vrais.

L'abandon, pour tous les usages scientifiques, d'une pareille méthode de mesure des forces, est principalement dû à l'introduction par Gauss d'un système général d'observations de la force magnétique, faites dans des contrées où la force de gravité n'est pas la même. Toutes ces forces se mesurent maintenant d'après la méthode strictement dynamique qui se déduit de nos définitions, et les résultats numériques sont les mêmes, en quelque contrée que les expériences soient faites.

L'unité de travail est le travail accompli par l'unité de force agissant le long de l'unité de longueur comptée sur sa propre direction. Ses dimensions sont $[ML^2T^{-2}]$.

L'énergie d'un système, c'est-à-dire son pouvoir d'accomplir du travail, a pour mesure le travail que le système est susceptible d'accomplir en dépensant toute son énergie.

Les définitions des autres quantités, et des unités auxquelles on les rapporte, seront données quand il en sera besoin.

Lorsque nous transformons les valeurs de quantités physiques déterminées en fonction d'une unité, pour les exprimer en fonction d'une autre unité de même espèce, nous devons seulement nous rappeler que l'expression de toute quantité comprend deux facteurs : l'unité et la partie numérique qui exprime combien de fois on doit prendre l'unité. Par suite, la partie numérique de l'expression varie en raison inverse de la grandeur de l'unité, c'est-à-dire en raison inverse d'une puissance de chacune des unités fondamentales, qui est indiquée par les dimensions de l'unité.

De la continuité et de la discontinuité en Physique [1].

7. On dit qu'une quantité varie d'une manière continue quand, pour passer d'une valeur à une autre, elle doit prendre toutes les valeurs intermédiaires.

---

[1] [Le lecteur qui trouverait un peu abstraites les considérations qui terminent ce Chapitre préliminaire peut, sans grave inconvénient, passer aux Chapitres suivants : à une seconde lecture de l'Ouvrage, toutes ces considérations s'éclairciront par la connaissance des faits auxquels elles se rapportent.]

Nous pouvons acquérir la notion de continuité en considérant une particule de matière dont l'état est continu dans le temps et dans l'espace. Une telle particule ne peut passer d'une position à une autre sans décrire une ligne continue dans l'espace, et les coordonnées qui fixent sa position sont des fonctions continues du temps.

L'équation, dite *de continuité*, que l'on donne dans les Traités d'Hydrodynamique, exprime ce fait que la matière ne peut pénétrer dans un élément de volume ou en sortir sans traverser les surfaces limites de l'élément.

On dit qu'une quantité est une fonction continue de sa variable quand, pour une variation continue de la variable, la quantité elle-même varie d'une manière continue.

Ainsi, soit u une fonction de x qui, pour x variant d'une manière continue de x_0 à x_1, varie d'une manière continue de u_0 à u_1, mais qui, pour x variant de x_1 à x_2, passe de u'_1 à u_2, u'_1 étant différent de u_1 : on dit que, dans sa variation par rapport à x, u éprouve une discontinuité pour la valeur de $x = x_1$; car elle passe brusquement de u_1 à u'_1, tandis que x passe par x_1 d'une variation continue.

Si nous considérons le coefficient différentiel de u par rapport à x, pour la valeur $x = x_1$, comme étant la limite de la fraction

$$\frac{u_2 - u_0}{x_2 - x_0},$$

quand on fait tendre x_2 et x_0 indéfiniment vers x_1, et si x_2 et x_0 restent toujours de part et d'autre de x_1, la valeur limite du numérateur sera $u'_1 - u_1$ et celle du dénominateur sera zéro. Si u est une quantité physiquement continue, la discontinuité ne peut exister que relativement à la variable particulière x, et nous devons admettre, dans ce cas, que pour $x = x_1$ le coefficient différentiel est infini. Si u n'est pas physiquement continu, on ne peut pas du tout le différentier.

On peut, dans les questions de Physique, mettre de côté l'idée de discontinuité sans altérer sensiblement les conditions du problème. Si x_0 est un peu plus petit, et x_2 un peu plus grand que x_1, u_0 sera très voisin de u_1, et u_2 de u'_1. Nous pouvons alors supposer que u varie d'une manière arbitraire, mais continue, de u_0 à u_2 entre les limites x_0 et x_2. Dans beaucoup de questions de Physique, on peut commencer par faire une hypothèse de cette nature, puis étudier ce que devient le résultat quand les valeurs de x_0 et x_2 s'approchent de x_1 et finissent par l'atteindre. Si le résultat est indépendant du mode arbitraire de variation attribué à u entre ces limites, on peut admettre qu'il en est encore de même quand u est discontinu.

Discontinuité d'une fonction de plusieurs variables.

8. Si l'on suppose constantes les valeurs de toutes les variables, sauf x, les discontinuités de la fonction se présenteront pour des valeurs particulières de x, liées aux valeurs des autres variables par une équation que l'on peut écrire

$$\varphi = \varphi(x, y, z \ldots) = 0.$$

La discontinuité se présente quand $\varphi = 0$. Quand φ est positif, la fonction est de la forme $F_2(x, y, z, \ldots)$. Quand φ est négatif, elle est de la forme $F_1(x, y, z, \ldots)$, et il n'y a pas de relation nécessaire entre les formes F_1 et F_2.

Pour exprimer cette discontinuité sous une forme mathématique, exprimons une des variables, x par exemple, comme une fonction de φ et des autres variables; exprimons aussi F_1 et F_2 comme fonctions de $\varphi, y, z, \ldots$. On pourra alors représenter la forme générale de la fonction par toute formule qui se réduira sensiblement à F_2 pour φ positif, et à F_1 pour φ négatif. Telle sera la formule

$$F = \frac{F_1 + e^{n\varphi} F_2}{1 + e^{n\varphi}}.$$

Tant que n est une quantité finie, si grande soit-elle, F est une fonction continue; mais si nous faisons n infini, F devient égal à F_2 pour φ positif et à F_1 pour φ négatif.

Discontinuité des dérivées d'une fonction continue.

Les dérivées premières d'une fonction continue peuvent être discontinues. Soit

$$\varphi = \varphi(x, y, z, \ldots) = 0$$

la relation qui existe entre les valeurs des variables pour lesquelles se présente la discontinuité des dérivées; et soient F_1 et F_2 exprimés en fonction de φ et de $n-1$ autres variables, $y, z, \ldots$ par exemple. Ainsi, quand φ est négatif, on doit prendre F_1; quand φ est positif, on doit prendre F_2, et $F_1 = F_2$ quand φ est égal à 0, puisque F lui-même est continu.

Donc, quand φ est égal à 0, les dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}$ peuvent être différentes, mais les dérivées prises par rapport à toute autre variable, telle que $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial F_2}{\partial y}$, doivent être les mêmes. La discontinuité est donc limitée à la dérivée par rapport à φ, toutes les autres dérivées étant continues.

Fonctions périodiques et fonctions multiformes.

9. Si u est une fonction de x, telle que sa valeur soit la même pour x, $x+a$, ..., $x+na$, et pour toutes les valeurs de x différant entre elles de a, u est appelé une *fonction périodique* de x, et a sa *période*.

Si l'on considère x comme fonction de u, à une valeur donnée de u correspond un nombre infini de valeurs de x différant entre elles de a. On dit dans ce cas que x est une fonction multiforme de u, et a est appelé sa *constante cyclique*.

Le coefficient différentiel $\frac{dx}{du}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs correspondant à une valeur donnée de u.

Relation entre les quantités physiques et les directions dans l'espace.

10. Pour distinguer les différentes espèces de quantités physiques, il est très important de connaître quelle est leur relation avec la direction des axes coordonnés dont on se sert d'habitude pour définir la position des objets. L'introduction des axes coordonnés en Géométrie, due à Descartes, a été un des plus grands progrès faits dans les Mathématiques, car elle a ramené les méthodes de la Géométrie à des calculs portant sur des quantités numériques. On fait dépendre la position d'un point de la longueur de trois lignes toujours tracées dans des directions déterminées, et, de même, on considère la ligne qui joint deux points comme la résultante de trois autres lignes.

Mais souvent en Physique, pour raisonner, et non plus pour calculer, il est désirable d'éviter l'introduction explicite des coordonnées cartésiennes, et il est avantageux de fixer son attention sur un point de l'espace pris en lui-même, et non sur ses trois coordonnées, sur la grandeur et la direction d'une force, non sur ses trois composantes. Cette manière d'envisager les quantités géométriques et physiques est plus naturelle que l'autre, et se présente d'abord à l'esprit; néanmoins les idées qui en découlent ne reçurent pas leur entier développement, jusqu'au jour où Hamilton fit un deuxième grand pas dans l'étude de l'espace, par l'invention de son calcul des Quaternions.

Comme aujourd'hui les méthodes de Descartes sont encore les plus familières à ceux qui étudient les sciences et qu'elles sont en réalité les plus avantageuses pour le calcul, nous exprimerons tous nos résultats sous la forme cartésienne; mais je suis convaincu que l'introduction des idées de Hamilton, prises en dehors des opérations et des méthodes des quaternions, nous seront d'une grande utilité pour l'étude de toutes les parties de notre sujet, et en particulier de l'Élec-

trodynamique, où nous avons à considérer un certain nombre de quantités physiques dont les relations peuvent s'exprimer bien plus simplement par quelques mots du langage de Hamilton que par les équations ordinaires.

11. Un des traits les plus importants de la méthode de Hamilton est la division des quantités en *scalaires* et *vecteurs* (1).

Une quantité scalaire est susceptible d'être entièrement définie par une seule donnée numérique. Sa valeur numérique ne dépend en aucune façon de la direction attribuée aux axes coordonnés.

Un vecteur ou quantité ayant une direction exige, pour être défini, trois données numériques, ce dont on peut se rendre compte le plus aisément en les considérant comme se rapportant à la direction des axes coordonnés.

Les quantités scalaires n'impliquent pas l'idée de direction. Le volume d'une figure géométrique, la masse ou l'énergie d'un corps matériel, la pression hydrostatique en un point d'un fluide, le potentiel en un point de l'espace, sont des exemples de quantités scalaires.

Un vecteur a une direction aussi bien qu'une grandeur; elle est telle que le renversement de sa direction entraîne le changement de son signe. Le déplacement d'un point, figuré par une ligne droite menée de sa position initiale à sa position finale, peut être pris comme type d'une quantité vectorielle : de là vient le nom même de *vecteur*.

La vitesse d'un corps, sa quantité de mouvement, la force qui agit sur lui, l'intensité d'un courant électrique, l'aimantation d'une molécule de fer, sont des exemples de quantités dirigées.

Il y a des quantités physiques d'une autre nature, qui dépendent de certaines directions dans l'espace et qui ne sont pas des vecteurs. Telles sont, par exemple, les tensions et déformations des corps solides, quelques-unes des propriétés des corps que l'on considère dans la théorie de l'élasticité, de la double réfraction. Des quantités de cette espèce exigent, pour être définies, neuf données numériques. Elles s'expriment, dans le langage des quaternions, par des fonctions linéaires et vectorielles d'un vecteur.

L'addition d'une quantité vectorielle à une autre de même espèce s'effectue d'après la règle donnée en Statique pour la composition des forces. En fait, la démonstration que donne Poisson du parallélogramme des forces s'applique à la composition de toutes les quantités, telles que le changement de leur signe soit équivalent à leur retournement bout pour bout.

(1) [Voir l'Appendice I, qui renferme les principes du calcul des Quaternions.]

Quand nous voudrons désigner une quantité dirigée par un seul symbole et appeler l'attention sur ce fait que c'est un vecteur, dont on doit, par suite, considérer la direction aussi bien que la grandeur, nous la désignerons par une lettre gothique majuscule : $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Dans le calcul des Quaternions, la position d'un point dans l'espace est définie par le vecteur mené d'un point fixe appelé *origine* à ce point. Si, en ce point de l'espace, nous avons à considérer une quantité physique dont la valeur dépend de la position du point, cette quantité est traitée comme une fonction du vecteur mené par l'origine. La fonction elle-même peut être scalaire ou vectorielle : la densité d'un corps, sa température, sa pression hydrostatique, le potentiel en un point sont des exemples de fonctions scalaires. La force résultante en ce point, la vitesse d'un fluide en ce point, la vitesse de rotation d'un élément du fluide, le couple produisant la rotation sont des exemples de fonctions vectorielles.

12. Les quantités vectorielles physiques peuvent être divisées en deux classes : dans l'une, la quantité est définie par rapport à une ligne; dans l'autre, la quantité est définie par rapport à une aire.

Par exemple, on peut évaluer la composante d'une force attractive dans une certaine direction, en trouvant le travail de cette force pendant qu'elle déplace un corps d'une petite longueur dans cette direction et divisant ce travail par cette petite longueur. Ici la force attractive est définie par rapport à une ligne.

D'autre part, le flux de chaleur, en un point d'un corps solide et dans une certaine direction, peut être défini : la quantité de chaleur qui traverse un élément de surface mené perpendiculairement à la direction du flux, divisée par l'étendue de cette surface et par le temps. Ici le flux est défini par rapport à une aire.

Il y a certains cas dans lesquels une quantité peut se mesurer aussi bien par rapport à une ligne ou par rapport à une aire.

Ainsi, quand on traite des déplacements des corps élastiques, on peut porter son attention soit sur les positions initiale et finale d'une molécule, auquel cas le déplacement est mesuré par la ligne qui joint la première à la seconde position; ou bien on peut considérer une petite surface fixe dans l'espace, et déterminer la quantité de matière qui traverse cette surface pendant le déplacement.

De même la vitesse d'un fluide peut être étudiée, soit en considérant la vitesse effective des molécules prises individuellement, soit en considérant la quantité de fluide qui traverse une surface fixe quelconque.

Mais, dans ces divers cas, pour appliquer la première méthode, il nous faut connaître séparément la densité du corps et sa vitesse ou son déplacement; aussi, toutes les fois que nous essayons de formuler une théorie moléculaire, nous sommes amenés à employer le second procédé.

Dans le cas d'un flux d'électricité, nous ne savons rien ni de la densité, ni de la vitesse dans le conducteur; nous ne connaissons que la valeur de ce qui, dans la théorie des fluides, correspondrait au produit de la densité par la vitesse. Par suite, dans tous les cas de ce genre, nous sommes obligés d'appliquer la méthode plus générale qui consiste à mesurer le flux qui traverse une surface.

Dans la science de l'électricité, la force électromotrice et la force magnétique appartiennent à la première classe et se définissent par rapport à des lignes. Quand nous voudrons faire allusion à ce fait, nous les désignerons sous le nom de *forces*.

D'autre part, l'induction électrique ou magnétique, et les courants électriques appartiennent à la seconde classe, et se définissent par rapport à des aires. Quand nous voudrons faire allusion à ce fait, nous les désignerons sous le nom de *flux*.

Chacune de ces forces peut être considérée comme produisant ou tendant à produire le flux correspondant. Ainsi la force électromotrice produit des courants électriques dans les conducteurs, et tend à en produire dans les diélectriques. Elle produit l'induction électrique dans les diélectriques et probablement aussi dans les conducteurs. Dans le même sens, la force magnétique produit l'induction magnétique.

13. Dans quelques cas, le flux est simplement proportionnel à la force et dans la même direction. Dans d'autres cas, nous pouvons seulement affirmer que la direction et la grandeur du flux sont des fonctions de la direction et de la grandeur de la force.

Le cas où les composantes du flux sont des fonctions linéaires des composantes de la force est discuté au Chapitre des équations de conduction (§ 296). En général, il y a neuf coefficients qui déterminent la relation entre la force et le flux : dans quelques cas, nous avons des raisons de croire que six de ces coefficients forment trois groupes de quantités égales deux à deux. Dans de pareils cas, la relation entre les directions de la force et du plan normal au flux est de même nature que celle qui existe entre un diamètre d'un ellipsoïde et son plan diamétral conjugué. Dans le langage des Quaternions, on dit qu'un des vecteurs est une fonction linéaire et vectorielle de l'autre,

et, s'il y a trois couples de coefficients égaux, que la fonction est auto-conjuguée.

Dans le cas de l'induction magnétique dans le fer, le flux (l'aimantation du fer) n'est pas une fonction linéaire de la force magnétisante. Mais, dans tous les cas, le produit de la force par la composante du flux suivant la direction de la force est un élément d'une grande importance scientifique, qui est toujours une quantité scalaire.

14. Il y a deux opérations mathématiques qui se présentent souvent, et qui sont propres à chacune des deux classes de vecteurs ou quantités dirigées.

Dans le cas des forces, nous avons à prendre l'intégrale le long d'une ligne, du produit d'un élément de cette ligne par la composante de la force suivant cet élément. Le résultat de cette opération est appelé l'*intégrale de la force suivant cette ligne;* il représente le travail accompli sur un corps pendant son transport le long de la ligne. Dans certains cas où l'intégrale ne dépend plus de la forme de la ligne, mais seulement des positions de ses extrémités, elle prend le nom de *potentiel*.

Dans le cas du flux, nous avons à prendre l'intégrale sur une surface du flux qui traverse cette surface. Le résultat de cette opération est appelé l'*intégrale du flux sur cette surface,* et représente la quantité qui traverse la surface.

Il y a certaines surfaces à travers lesquelles ne s'effectue point de flux. Si deux de ces surfaces se coupent, leur ligne d'intersection est une ligne de flux. Dans le cas où le flux est dans la direction de la force, ces lignes sont souvent appelées *lignes de force*. Il serait cependant plus correct de les appeler, en électrostatique et en magnétisme, *lignes d'induction,* et, en électrocinématique, *lignes d'écoulement*.

15. Il y a une autre distinction entre les différentes espèces de quantités dirigées, qui, très importante au point de vue physique, est moins nécessaire à observer pour l'application des méthodes mathématiques : c'est la distinction des propriétés de longueur et de rotation.

La direction et la grandeur d'une quantité peuvent dépendre d'une action ou d'un effet qui se produit entièrement suivant une certaine ligne, ou bien elles peuvent dépendre de quelque élément qui est de la nature d'une rotation autour de cette ligne prise comme axe. Les lois de combinaison des quantités dirigées sont les mêmes, que ces quantités soient longitudinales ou rotatoires, en sorte qu'il n'y a

pas de différence dans la façon de traiter par le calcul les deux classes; mais il peut y avoir des circonstances physiques qui nous montrent à quelle classe nous devons rapporter un phénomène particulier. Ainsi l'électrolyse consiste dans le transport, suivant une certaine ligne, de certaines substances dans une direction, de certaines autres substances dans la direction contraire; c'est évidemment un phénomène longitudinal, et aucun effet observé ne semble se rapporter à une rotation autour de la direction de la force. De là nous inférons que le courant électrique qui produit ou accompagne l'électrolyse est un phénomène longitudinal et non rotatoire.

D'autre part, le pôle nord et le pôle sud d'un aimant ne diffèrent pas entre eux à la façon de l'oxygène et de l'hydrogène, qui, pendant l'électrolyse, apparaissent en des points opposés, en sorte que rien ne nous porte à croire que le magnétisme soit un phénomène longitudinal; tandis que l'effet du magnétisme, qui détermine la rotation du plan de polarisation de la lumière, nous montre nettement que le magnétisme est un phénomène de rotation.

Des intégrales suivant une ligne.

16. C'est une opération importante dans la Physique en général, et qui doit être clairement comprise, que l'intégration de la composante d'un vecteur effectuée le long d'une ligne.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point P pris sur une ligne dont la longueur, comptée à partir d'un certain point A, est s. Ces coordonnées sont des fonctions de la seule variable s.

Soit R la valeur du vecteur au point P, et soit ε l'angle que la tangente au point P fait avec la direction R; alors $R\cos\varepsilon$ est la composante de R suivant la ligne, et l'intégrale

$$L = \int_0^s R\cos\varepsilon\, ds$$

est appelée l'*intégrale de* R *suivant la ligne* s.

On peut écrire cette expression

$$L = \int_0^s \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds,$$

où X, Y, Z sont les composantes de R parallèlement à x, y, z.

En général, cette quantité est différente pour les différentes lignes que l'on peut mener entre A et P. Mais si, dans une certaine région, la quantité

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,d\Psi,$$

c'est-à-dire est une différentielle exacte dans cette région, la valeur de L devient

$$\Psi_A - \Psi_P,$$

et reste la même pour deux formes quelconques du contour compris entre A et P, pourvu que l'on puisse passer d'une forme à l'autre d'un mouvement continu, sans sortir de la région [et que la fonction Ψ n'ait qu'une seule valeur en chaque point de la région. (P.)].

Des potentiels.

La quantité Ψ est une fonction scalaire de la position du point, et par suite elle est indépendante des directions des axes. On l'appelle la *fonction potentielle*, et on dit que le vecteur dont les composantes sont X, Y, Z a un potentiel Ψ, si

$$X = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \quad Y = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right), \quad Z = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right).$$

Quand il existe une fonction potentielle, les surfaces pour lesquelles le potentiel est constant sont appelées *surfaces équipotentielles*. La direction de R en un point quelconque d'une pareille surface coïncide avec la normale à cette surface; et, si n est une normale au point P, on a

$$R = -\left(\frac{d\Psi}{dn}\right).$$

La méthode qui consiste à considérer les composantes d'un vecteur comme les dérivées premières par rapport aux coordonnées d'une certaine fonction de ces coordonnées a été imaginée par Laplace (1), pour traiter la théorie de l'attraction. Le nom de *potentiel* a été donné pour la première fois à cette fonction par Green, qui en a fait la base de sa théorie de l'Électricité (2). L'essai de Green ne fut pas remarqué des mathématiciens, jusqu'en 1846, et avant cette époque la plupart de ses théorèmes les plus importants avaient été retrouvés par Gauss, Chasles, Sturm et Thomson (3).

Dans la théorie de la gravitation, le potentiel est pris avec un signe contraire à celui que nous employons ici; et, par suite, la force résul-

---

(1) *Mécanique céleste*, liv. III.

(2) *Essai d'application de l'Analyse mathématique à la théorie de l'Électricité et du Magnétisme* (Nottingham, 1828), réimprimé dans le *Journal de Crelle* et dans l'édition des *Œuvres de Green*, de M. Ferrers.

(3) Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 483.

tante en un point quelconque se mesure par l'accroissement de la fonction potentielle dans cette direction. Dans les recherches d'électricité et de magnétisme, le potentiel est défini de telle sorte que la force résultante dans une direction donnée se mesure par le décroissement du potentiel dans cette direction. En employant l'expression de cette manière, on fait correspondre son signe à celui de l'énergie potentielle, qui décroît toujours quand les corps se meuvent dans la direction où les forces agissent sur eux.

17. La découverte de Hamilton, sur la forme de l'*opérateur* par laquelle le vecteur se déduit du potentiel, jette une vive lumière sur la nature géométrique de la relation qui existe entre le potentiel et le vecteur qui en est tiré.

Ainsi que nous l'avons vu, la composante du vecteur dans une direction est la dérivée première du potentiel prise par rapport à une coordonnée comptée dans cette direction, le signe en étant renversé.

Or, soient i, j, k trois vecteurs unités, perpendiculaires l'un sur l'autre, et soient X, Y, Z les composantes du vecteur $\mathfrak{F}$ parallèlement à ces vecteurs : alors

$$\mathfrak{F} = i\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z} \tag{1}$$

et, d'après ce que nous avons dit plus haut, si Ψ est le potentiel,

$$\mathfrak{F} = -\left(i\frac{\partial\Psi}{\partial x} + j\frac{\partial\Psi}{\partial y} + k\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right). \tag{2}$$

Et si nous représentons par ∇ l'opérateur

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3}$$

on a

$$\mathfrak{F} = -\nabla\Psi. \tag{4}$$

On peut donner au symbole d'opérations ∇ l'interprétation suivante : il indique qu'il faut mesurer sur chacune des trois directions rectangulaires l'accroissement de Ψ; puis, considérant les quantités ainsi trouvées comme des vecteurs, qu'il faut les composer en une seule. C'est ce qui est indiqué par l'expression (3). Mais on peut aussi la considérer comme indiquant qu'il faut trouver la direction pour laquelle Ψ croît le plus vite, et de porter sur cette direction un vecteur représentant cet accroissement.

Lamé, dans son Traité des fonctions inverses, emploie le terme de *paramètredifférentiel* pour exprimer la grandeur de cet accroissement

maximum; mais ni le terme lui-même, ni la façon dont Lamé en fait usage, n'indiquent que la quantité désignée ait une direction propre aussi bien qu'une grandeur. Dans les rares occasions où j'aurai à considérer cette relation comme purement géométrique, j'appellerai le vecteur $\mathcal{F}$ le *gradient* de la fonction scalaire Ψ, employant le mot *gradient* pour désigner la direction aussi bien que la grandeur de la chute la plus rapide de Ψ.

18. Il y a toutefois des cas où les conditions pour que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte, à savoir

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

sont remplies dans une certaine région de l'espace, et où cependant l'intégrale prise de A à P peut avoir des valeurs différentes pour deux contours, tous deux entièrement compris dans la région. Ce cas peut se présenter si la région est en forme d'anneau, et si les deux lignes de A à P sont situées dans des segments opposés de l'anneau. On ne peut, dans ce cas, passer d'un contour à l'autre d'un mouvement continu sans sortir de la région. Nous sommes conduits ainsi à des considérations rentrant dans la Géométrie de position, sujet peu étudié, quoique son importance ait été signalée par Leibnitz et mise en lumière par Gauss. Le travail le plus complet sur ce sujet a été donné par J.-B. Listing (1).

Soient p points dans l'espace et l lignes joignant ces points de façon que jamais deux lignes ne se coupent et qu'aucun point ne soit laissé isolé. Nous appellerons *diagramme* une figure composée de cette manière. De ces lignes, $p-1$ suffisent pour relier les p points et former un système *relié*. Toute ligne en plus donnera lieu à une boucle ou contour fermé, ou, comme nous l'appellerons, à un cycle. Le nombre des cycles indépendants dans le diagramme est

$$k = l - p + 1.$$

Tout contour fermé, décrit en suivant les lignes du diagramme, se compose de ces cycles indépendants pris chacun un nombre quelconque de fois et dans une direction quelconque.

L'existence des cycles est appelée *cyclose*, et le nombre des cycles d'un diagramme *nombre cyclomatique*.

---

(1) *Der Census räumlicher Complexe* (*Gött. Abh.*, vol. X, p. 97; 1861).

Cyclose des surfaces et des régions.

Les surfaces peuvent être *complètes* ou *limitées*. Les surfaces complètes sont infinies ou fermées. Les surfaces limitées se terminent par une ou plusieurs lignes fermées, qui, dans le cas limite, peuvent se réduire à des lignes finies doubles ou à des points. Une région finie de l'espace est limitée par une ou plusieurs surfaces fermées. De celles-ci, l'une est la surface extérieure; les autres y sont comprises, sont extérieures les unes aux autres, et sont appelées les *surfaces intérieures*.

Si la région est limitée par une seule surface, on peut supposer que cette surface se contracte sans cesser d'être continue ou sans se couper elle-même. Si la région est à simple continuité, comme l'est une sphère, cette opération pourra être continuée jusqu'à ce que la région soit réduite à un point; mais, si la région a la forme d'un anneau, on obtiendra finalement une courbe fermée; et si la région a des connexions nombreuses, le résultat sera un diagramme de lignes, dont le nombre cyclomatique est celui de la région. L'espace extérieur à la région a le même nombre cyclomatique que la région, et par suite, si la région est limitée par des surfaces intérieures et extérieures, son nombre cyclomatique est la somme des nombres correspondant à toutes ces surfaces.

Lorsqu'une région renferme d'autres régions, elle est appelée *périphractique*.

Le nombre des surfaces limites intérieures d'une région est appelé son *nombre périphractique*. Une surface fermée est périphractique, et son nombre est l'unité.

Le nombre cyclomatique d'une surface *fermée* est le double de celui de l'une ou l'autre des régions qu'elle limite. Pour trouver le nombre cyclomatique d'une surface *limitée*, on suppose que toutes les limites se contractent sans cesser d'être continues, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. La surface est alors réduite à un point dans le cas des surfaces *acycliques*, à un diagramme de lignes dans le cas des surfaces *cycliques*. Le nombre cyclomatique de ce diagramme est celui de la surface.

19. THÉORÈME I. — *Si, dans toute l'étendue d'une région acyclique,*

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,d\Psi,$$

la valeur de l'intégrale prise d'un point A *à un point* P, *le*

long d'un contour quelconque intérieur à la région, est constante.

Nous montrerons d'abord que l'intégrale prise le long d'un circuit fermé quelconque intérieur à la région est égale à zéro.

Supposons menées les surfaces équipotentielles. Ce sont toutes, ou des surfaces fermées, ou des surfaces complètement limitées par la surface de la région; par suite, une ligne fermée, intérieure à la région, qui coupe une de ces surfaces en un point de son contour, doit forcément couper cette même surface en sens inverse, en quelque autre point de son contour; les parties correspondantes de l'intégrale de ligne étant égales et contraires, la valeur totale est zéro.

Par suite, si AQP et AQ'P sont deux contours tracés entre A et P, l'intégrale suivant AQ'P est la somme de celle suivant AQP et de celle suivant le contour formé AQ'PQA, et, l'intégrale suivant le contour fermé étant nulle, les deux intégrales sont égales.

Donc, si le potentiel est donné en un point quelconque d'une pareille région, il est déterminé en tout autre point.

20. Théorème II. — *Dans une région cyclique pour toute l'étendue de laquelle est satisfaite l'équation*

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,dV,$$

l'intégrale de A *à* P *n'est en général pas déterminée, si l'on ne spécifie le canal par lequel on va de* A *à* P.

Soit k le nombre cyclomatique de la région : on peut faire dans la région k sections au moyen de surfaces que nous appellerons *diaphragmes*, et ainsi fermer k des canaux de jonction; la région est ainsi ramenée à être acyclique sans que sa continuité soit détruite.

L'intégrale prise de A à P suivant une ligne qui ne coupe aucun de ces diaphragmes sera, d'après le théorème précédent, de valeur déterminée.

Supposons maintenant A et P infiniment voisins l'un de l'autre, mais situés de part et d'autre d'un diaphragme : soit K l'intégrale suivant le chemin AP.

Soient A' et P' deux autres points de part et d'autre du même diaphragme, et infiniment voisins l'un de l'autre, et soit K' l'intégrale suivant le chemin A'P'. Je dis que $K = K'$.

En effet, menons AA' et PP' : ces lignes étant presque coïncidentes,

quoique de part et d'autre du diaphragme, les intégrales, prises suivant chacune d'elles, seront égales. Supposons chacune égale à L; l'intégrale de ligne suivant A′P′ sera alors égale à celle suivant

$$A'A + AP + PP' = -L + K + L = K = \text{l'intégrale suivant AP.}$$

Donc, l'intégrale prise suivant un contour fermé qui traverse un diaphragme du système dans une direction donnée est une quantité constante K, que l'on appelle la *constante cyclique* correspondant au cycle donné.

Soit une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de la région et coupant le diaphragme du premier cycle p fois dans la direction positive et p' fois dans la direction négative; et soit $p - p' = n_1$. L'intégrale de ligne suivant la courbe fermée sera $n_1 K_1$.

De même, l'intégrale de ligne suivant une courbe fermée quelconque sera

$$n_1 K_1 + n_2 K_2 + \ldots + n_k K_k,$$

où n_k représente l'excès du nombre des passages positifs sur le nombre des passages négatifs de la courbe à travers le diaphragme du cycle K.

Si deux courbes sont telles que l'on puisse passer de l'une à l'autre d'un mouvement continu, sans jamais traverser aucune portion de l'espace pour laquelle la condition d'avoir un potentiel ne soit pas remplie, les deux courbes sont appelées *courbes réductibles*. Les courbes pour lesquelles cette transformation ne peut être faite sont appelées *courbes irréductibles* (1).

La condition que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit la différentielle exacte d'une certaine fonction Ψ pour tous les points intérieurs à une certaine région se rencontre dans différentes recherches physiques, dans lesquelles la quantité dirigée et le potentiel ont des significations physiques différentes.

En Cinématique pure, on peut supposer que X, Y, Z soient les composantes du déplacement d'un point appartenant à un corps continu, dont les coordonnées initiales étaient x, y, z; alors la condition exprime que l'ensemble des déplacements constitue une translation sans rotation (2).

Si X, Y, Z représentent les composantes de la vitesse d'un fluide au

---

(1) *Voir* Sir W. Thomson, *On vortex motion* (*Trans. R. S. Edin.*, 1869).

(2) [C'est-à-dire qu'il existe en chaque point du corps trois directions trirectangulaires, qui restent parallèles à elles-mêmes pendant sa déformation]. *Voir* Thomson et Tait, *Natural philosophy*, § 190 (*i*).

point (x_1, y_1, z), la condition exprime que le mouvement du fluide s'effectue sans rotation.

Si X, Y, Z représentent les composantes de la force au point (x, y, z), la condition exprime que le travail accompli pendant le passage d'un point matériel d'une position à une autre est la différence des potentiels en ces deux positions, et cette différence a la même valeur pour tous les contours réductibles compris entre ces deux positions.

Des intégrales sur une surface.

21. Soient dS l'élément de surface, ε l'angle que fait avec la direction du vecteur R la normale menée à la surface du côté positif de cette surface. Alors $\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, d\mathrm{S}$ est appelé l'intégrale de R sur la surface S.

THÉORÈME III. — *L'intégrale d'un flux à travers une surface fermée peut s'exprimer par l'intégrale de sa convergence étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface* (*voir* p. 25).

Soient X, Y, Z les composantes de R; l, m, n les cosinus des angles formés avec les axes par la normale à S dirigée vers l'intérieur de cette surface. L'intégrale de R sur la surface S est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, d\mathrm{S} &= \int\int \mathrm{X}\, l\, d\mathrm{S} + \int\int \mathrm{Y}\, m\, d\mathrm{S} + \int\int \mathrm{Z}\, n\, d\mathrm{S}\\ &= \int\int \mathrm{X}\, dy\, dz + \int\int \mathrm{Y}\, dz\, dx + \int\int \mathrm{Z}\, dx\, dy,\end{aligned}\right.$$

les valeurs X, Y, Z étant celles en un point de la surface, et les intégrations s'étendant sur toute la surface.

Si la surface est fermée, pour des valeurs données de y et z, la coordonnée x doit avoir un nombre pair de valeurs; car une ligne parallèle à x, dès l'instant qu'elle rencontre la surface, doit pénétrer dans l'espace renfermé et en sortir un même nombre de fois.

Considérons un point allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$; il pénètre dans l'espace pour la première fois pour $x = x_1$, en sort pour $x = x_2$, et ainsi de suite; et soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots$ les valeurs de X en ces points : alors

$$(2)\quad \int\int \mathrm{X}\, dy\, dz = \int\int [(\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1) + (\mathrm{X}_4 - \mathrm{X}_3) + \ldots + (\mathrm{X}_{2n} - \mathrm{X}_{2n-1})]\, dy\, dz.$$

Si X est une quantité continue et n'a pas de valeurs infinies entre x_1 et x_2,

$$(3)\quad \mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\mathrm{X}}{dx}\, dx,$$

l'intégration s'étendant de x_1 à x_2, c'est-à-dire le long du premier segment de x compris à l'intérieur de la surface fermée. Et tenant compte de tous les segments qui sont compris à l'intérieur de la surface fermée, nous trouvons

$$\iint X\,dy\,dz = \iiint \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

l'intégrale double étant limitée à la surface fermée, et l'intégrale triple étant au contraire étendue à tout le volume compris à l'intérieur de cette surface. Donc, si X, Y, Z sont continus et finis à l'intérieur d'une surface fermée, l'intégrale de R sur cette surface complète sera

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume intérieur à S.

Supposons maintenant que X, Y, Z ne soient pas continus à l'intérieur de la surface fermée; mais que, sur une certaine surface $F(x, y, z) = 0$, les valeurs de X, Y, Z sautent brusquement de X, Y, Z sur le côté négatif à X′, Y′, Z′ sur le côté positif de la surface.

Si cette discontinuité se présente entre x_1 et x_2, par exemple, la valeur de $X_2 - X_1$ sera

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial X}{\partial x}\,dx + (X' - X), \tag{6}$$

où l'on ne doit considérer dans l'expression sous le signe $\int$ que les valeurs finies de la dérivée de X.

Donc, dans ce cas, l'intégrale de R sur la surface fermée sera exprimée par

$$\left\{\begin{aligned} \iint R\cos\varepsilon\,dS = {} & \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ & + \iint (X' - X)\,dy\,dz \\ & + \iint (Y' - Y)\,dz\,dx + \iint (Z' - Z)\,dx\,dy, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ou bien, si l', m', n' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité, et dS' un élément de cette surface,

$$\left\{\begin{aligned} \iint R\cos\varepsilon\,dS = {} & \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ & + \iint [l'(X' - X) + m'(Y' - Y) + n'(Z' - Z)]\,dS', \end{aligned}\right. \tag{8}$$

SOCIÉTÉ DE CHIMIE INDUSTRIELLE PARIS

l'intégration devant être étendue, dans le dernier terme, à toute la surface de discontinuité.

Si, en tous les points où X, Y, Z sont continus,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0, \tag{9}$$

et si, sur chacune des surfaces où ils sont discontinus,

$$l'X'+m'Y'+n'Z'=l'X+m'Y+n'Z, \tag{10}$$

l'intégrale sur une surface fermée quelconque est nulle, et l'on dit que la distribution du vecteur est solénoïdale.

Nous désignerons l'équation (9) sous le nom de *condition solénoïdale générale,* et l'équation (10) sous le nom de *condition solénoïdale à la surface.*

22. Considérons maintenant le cas où, pour tous les points intérieurs à la surface S, l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \tag{11}$$

est satisfaite en même temps que X, Y et Z sont continus. La conséquence en est que l'intégrale sur la surface fermée est égale à zéro.

Or supposons que la surface fermée S soit formée de trois parties S_1, S_0 et S_2; que S_1 soit une surface de forme quelconque limitée par une ligne L_1, et que S_0 soit formée en menant de tous les points de L_1 des lignes dans la direction de R. Si l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale en un point quelconque de la surface S_0,

$$R\cos\varepsilon=Xl+Ym+Zn=0. \tag{12}$$

Donc les éléments de l'intégrale correspondant à cette surface S_0 sont nuls.

Soit S_2 une autre surface de forme quelconque, limitée par la courbe L_2 suivant laquelle elle rencontre la surface S_0.

Soient Q_1, Q_0, Q_2 les intégrales sur les surfaces S_1, S_0 et S_2, et soit Q l'intégrale de surface sur la surface fermée S. Alors

$$Q=Q_1+Q_0+Q_2=0, \tag{13}$$

et nous savons que

$$Q_0=0; \tag{14}$$

donc

$$Q_2=-Q_1, \tag{15}$$

c'est-à-dire que l'intégrale sur S_2 est égale et de signe contraire à l'intégrale sur S_1, quelles que soient la forme et la position de S_2, pourvu que la surface intermédiaire S_0 soit constamment tangente à R.

Si nous supposons que L_1 soit une courbe fermée d'aire peu considérable, S_0 sera une surface tubulaire jouissant de cette propriété, que l'intégrale prise sur une section quelconque du tube est constante.

Tout l'espace intérieur à la surface S peut être divisé en tubes de cette nature, pourvu que

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0; \tag{16}$$

une distribution d'une quantité vectorielle satisfaisant à cette condition est appelée *distribution solénoïdale.*

Des tubes et des lignes de flux.

Si l'espace est divisé en tubes, de façon que l'intégrale sur une section quelconque de chaque tube soit l'unité, les tubes sont appelés *tubes unités,* et l'intégrale prise sur une surface finie S, limitée par une courbe fermée L, est égale au nombre de ces tubes qui traversent la surface S dans le sens positif, ou, ce qui revient au même, qui passent à travers la courbe fermée L.

Donc l'intégrale sur S ne dépend que de la forme de sa limite L, et non de la forme de la surface à l'intérieur de cette limite.

Des régions périphractiques.

Si, dans toute l'étendue d'une région limitée extérieurement par une seule surface fermée S_1, la condition solénoïdale

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

est satisfaite, l'intégrale prise sur une surface fermée quelconque intérieure à la région est nulle, et l'intégrale prise sur une surface limitée, intérieure à la région, ne dépend que de la forme de la courbe fermée qui sert de limite.

Mais ces résultats ne sont pas vrais en général, si la région pour laquelle la condition solénoïdale est satisfaite est limitée autrement que par une surface unique.

Car, si elle est limitée autrement que par une seule surface continue, l'une des surfaces limites est la surface extérieure; les autres

sont les surfaces intérieures, et la région S est périphractique puisqu'elle renferme d'autres régions qu'elle entoure entièrement.

Soit S_1 une de ces régions entourées, pour laquelle la condition solénoïdale n'est pas satisfaite, et soit

$$Q_1 = \iint R \cos\varepsilon \, dS_1$$

l'intégrale de surface pour la surface qui limite cette région; soient Q_2, Q_3, ... des quantités correspondantes pour les autres régions englobées.

Si une surface fermée S' est tracée à l'intérieur de la région S, l'intégrale correspondante ne sera égale à zéro que si cette surface S' ne renferme aucune des surfaces englobées S_1, S_2, ... Si elle en renferme quelques-unes, son intégrale de surface est la somme des intégrales de surface pour les différentes surfaces englobées qu'elle comprend.

Pour la même raison, l'intégrale prise sur une surface limitée par une courbe fermée n'est la même, pour d'autres surfaces limitées par la même courbe, que si les surfaces sont réductibles à la surface donnée par un mouvement continu à l'intérieur de la région S.

Quand nous avons à nous occuper d'une région périphractique, la première chose à faire est de la ramener à être apériphractique, en menant des lignes qui joignent les différentes surfaces limites. Chacune de ces lignes, pourvu qu'elle ne relie pas deux surfaces qui sont déjà en communication continue, réduit d'une unité le nombre périphractique; en sorte que le nombre total des lignes à tracer pour faire disparaître la périphraxie est égal au nombre périphractique, ou au nombre des surfaces intérieures.

Quand ces lignes ont été menées, nous pouvons affirmer que, si la condition solénoïdale est satisfaite dans la région S, toute surface fermée, tracée à l'intérieur de la région et ne coupant aucune des lignes, donne lieu à une intégrale nulle.

En menant ces lignes, nous devons nous souvenir que toute ligne joignant des surfaces déjà reliées ne diminue pas le nombre périphractique, mais augmente le nombre cyclomatique.

L'exemple le plus familier d'une région périphractique, à l'intérieur de laquelle la condition solénoïdale est satisfaite, est la région qui entoure une masse exerçant une attraction ou une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance.

Nous avons dans ce cas

$$X = \frac{\mu x}{r^3}, \quad Y = \frac{\mu y}{r^3}, \quad Z = \frac{\mu z}{r^3},$$

μ étant la masse supposée placée à l'origine des coordonnées. En un point quelconque à distance finie r,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

mais à l'origine ces quantités deviennent infinies. Pour toute surface fermée ne renfermant pas l'origine, l'intégrale de surface est nulle; si la surface fermée renferme l'origine, l'intégrale de surface est $4\pi\mu$.

Si, pour une raison quelconque, nous voulons traiter une région entourant μ comme si elle n'était pas périphractique, nous devrons tracer une ligne de μ à l'infini, et nous souvenir, en prenant les intégrales sur une surface fermée, qu'il faut ajouter $4\pi\mu$ toutes les fois que cette ligne passe du côté négatif au côté positif de la surface (1).

Des relations dextrogyres et lévogyres dans l'espace.

23. Dans ce Traité, on admet que les mouvements de translation suivant un axe, ou de rotation autour de cet axe, sont de même signe lorsque leurs directions correspondent aux mouvements de translation et de rotation d'une vis ordinaire, ou vis à droite (2).

---

(1) En effet, une surface renfermant l'origine est réductible à une sphère ayant celle-ci pour centre, et de rayon R petit, mais fini; pour tous les points de cette sphère, $\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \frac{n}{z} = \frac{1}{R}$, et $(lX + mY + nZ)$ se réduit à $\frac{\mu . dS}{R^2}$, dont l'intégrale est $\frac{\mu}{R^2}\iint dS$ ou $4\pi\mu$. (P.)

(2) L'action combinée des muscles du bras, lorsque nous tournons en dehors le dessus de la main droite, en même temps que nous tendons la main en avant, grave dans la mémoire, mieux que toute définition, la nature du mouvement d'une vis à droite. Un tire-bouchon ordinaire peut servir de symbole matériel de ce même mouvement.

Le professeur W.-N. Miller m'a fait observer que les vrilles de la vigne sont enroulées à droite et celles du houblon à gauche, et que l'on pourrait appeler les deux systèmes de rotations dans l'espace *système de la vigne* et *système du houblon*.

Le système de la vigne, que nous adoptons, est celui de Linné et celui des fabricants de vis dans tous les pays civilisés, sauf le Japon. De Candolle est le premier qui a appelé *vrilles à droite* les vrilles du houblon; en cela il a été suivi par Listing et par la plupart de ceux qui ont écrit sur la polarisation rotatoire de la lumière. Des vis faites comme les vrilles de houblon servent pour relier entre eux les wagons de chemins de fer et pour fixer les roues de gauche des voitures ordinaires; mais ceux qui les emploient les appellent toujours *vis à gauche*.

Par exemple, si l'on compte positivement la rotation effective de la Terre de l'ouest à l'est, la direction positive sur l'axe de la Terre est prise du sud au nord; pour un homme qui marche droit devant lui dans la direction positive, la rotation positive s'effectuera, en partant de la tête, par la main droite, les pieds et la main gauche.

Si nous nous plaçons nous-mêmes sur une surface, du côté positif, le sens positif sur une courbe qui limite cette surface sera inverse du sens du mouvement des aiguilles d'une montre dont la face est tournée vers nous.

Tel est le système « à droite » adopté dans la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, § 243; le système opposé, ou système « à gauche », est adopté dans les *Quaternions* de Hamilton et de Tait. L'opération qui consiste à passer d'un système à l'autre est appelée par Listing *perversion*.

L'image d'un objet vu par réflexion dans un miroir est une image *perversée* de cet objet.

Quand nous emploierons des axes de coordonnées cartésiennes x, y, z, nous les tracerons de façon que la convention ordinaire sur l'ordre de succession des symboles nous conduise dans l'espace à un système de directions à droite.

L'aire des surfaces sera comptée positivement si l'ordre d'intégration est conforme à l'ordre de succession des symboles. Ainsi l'aire d'une courbe fermée tracée dans le plan des xy, qui est $\int\int dx\,dy$, peut s'écrire

$$\int x\,dy \quad \text{ou} \quad -\int y\,dx,$$

l'ordre d'intégration étant x, y dans le premier cas, et y, x dans le second.

La relation entre les deux produits $dx\,dy$ et $dy\,dx$ peut se comparer à la relation qui existe, dans la théorie des quaternions, entre les produits de deux vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre, produits dont le signe dépend de l'ordre de multiplication, ou à l'inversion du signe dans un déterminant où l'on échange entre elles deux lignes ou colonnes consécutives.

Pour la même raison, une intégrale de volume doit être comptée positivement si l'ordre d'intégration est l'ordre de succession des variables x, y, z, et négativement si l'ordre de succession est renversé.

Nous allons maintenant établir un théorème fort utile, en ce qu'il établit une relation entre une intégrale prise sur une surface limitée et une intégrale prise le long de ses limites.

24. Théorème IV. — *Une intégrale prise le long d'une courbe fermée peut s'exprimer au moyen d'une intégrale prise sur une surface ayant la courbe pour limite.*

Soient X, Y, Z les composantes d'un vecteur $\mathfrak{A}$, dont l'intégrale doit être prise le long d'une courbe fermée s.

Soit S une surface continue et finie quelconque, entièrement limitée par la courbe s, et soient ξ, η, ζ les composantes d'un autre vecteur $\mathfrak{B}$, liées à X, Y, Z par les équations

$$(1) \qquad \xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Je dis que l'intégrale de surface de $\mathfrak{B}$, prise sur la surface S, est égale à l'intégrale de ligne de $\mathfrak{A}$, prise le long de la courbe s. Il est clair que ξ, η, ζ satisfont d'eux-mêmes à la condition solénoïdale

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale à un élément de surface dS comptée dans la direction positive. Alors la valeur de l'intégrale de surface de $\mathfrak{B}$ peut s'écrire

$$(2) \qquad \iint (l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\mathrm{S}.$$

Pour nous faire une idée exacte de ce qu'il faut entendre par l'élément de surface dS, nous allons supposer que les valeurs des coordonnées x, y, z soient données pour chaque point de la surface en fonction de deux variables indépendantes α et β. Si, β restant constant, α varie, le point (x, y, z) décrit une courbe sur la surface; et si l'on donne à β une série de valeurs, une série de pareilles courbes seront décrites, toutes situées sur la surface S. De même, si l'on donne à α une série de valeurs constantes, on tracera une deuxième série de courbes coupant la première série et divisant toute la surface en parties élémentaires, dont une quelconque peut être prise pour représenter l'élément dS.

La projection de cet élément sur le plan des yz est, d'après la formule ordinaire, qui donne la surface d'un parallélogramme infiniment petit,

$$(3) \qquad l\, d\mathrm{S} = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) d\beta\, d\alpha.$$

Les expressions de $m\, d$S et de $n\, d$S se déduiront de celle-ci par une permutation circulaire.

L'intégrale à évaluer est

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta)\, dS, \tag{4}$$

ou, en substituant à ξ, η, ζ leurs valeurs en fonction de X, Y et Z,

$$\iint \left(m\frac{\partial X}{\partial z} - n\frac{\partial X}{\partial y} + n\frac{\partial Y}{\partial x} - l\frac{\partial Y}{\partial z} + l\frac{\partial Z}{\partial y} - m\frac{\partial Z}{\partial x} \right) dS. \tag{5}$$

La partie de cette intégrale qui dépend de X peut s'écrire

$$\iint \left[\frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) \right] d\beta\, d\alpha, \tag{6}$$

ce qui devient, en ajoutant et retranchant $\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}$,

$$\left\{ \iint \left[\frac{\partial x}{\partial \beta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \right] d\beta\, d\alpha. \right. \tag{7}$$

$$\left. = \iint \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) d\beta\, d\alpha. \right. \tag{8}$$

Supposons maintenant que les courbes pour lesquelles α est constant forment une série de courbes fermées entourant le point de la surface pour lequel α a sa valeur minimum α_0, la dernière courbe de la série, pour laquelle $\alpha = \alpha_1$, coïncidant avec la courbe fermée primitive s.

Supposons, en outre, que les courbes pour lesquelles β est constant forment une série de lignes menées du point pour lequel $\alpha = \alpha_0$ jusqu'à la courbe s, la première courbe β_0 et la dernière β_1 se confondant.

Intégrant par parties l'équation (8), le premier terme par rapport à α, et le second par rapport à β, les intégrales doubles se détruisent l'une l'autre; l'intégrale

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} \left(X\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)_{\alpha=\alpha_0} d\beta$$

est nulle, puisque la courbe $\alpha = \alpha_0$ se réduit à un point, pour lequel il n'y a qu'une seule valeur de X et de x.

Les deux intégrales

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\beta=\beta_0} d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\beta=\beta_1} d\alpha$$

se détruisent l'une l'autre, puisque le point (α_1, β_0) se confond avec le point (α, β_1).

L'expression (8) se réduit donc à

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} \left(X \frac{dx}{d\beta} \right)_{\alpha=\alpha_1} d\beta, \tag{9}$$

et, puisque la courbe $\alpha = \alpha_1$ est identique avec la courbe s, nous pouvons écrire cette expression

$$\int X \frac{dx}{ds} ds, \tag{10}$$

l'intégration s'effectuant le long de la courbe s. On traiterait de la même manière les parties de l'intégrale de surface qui dépendent de Y et Z, en sorte que l'on a finalement

$$\int\int (l\xi + m\eta + n\zeta)\, dS = \int \left(X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds, \tag{11}$$

la première intégrale s'étendant à la surface S, et la seconde à la courbe limite s [1].

Effet de l'opérateur ∇ sur une fonction vectorielle.

25. Nous avons vu que l'opération représentée par ∇ est celle par laquelle on déduit un vecteur de son potentiel. La même opération, appliquée à une fonction vectorielle, donne des résultats qui interviennent dans deux des théorèmes précédemment établis (III et IV). L'extension de cet opérateur aux déplacements vectoriels et la plupart des développements qui suivent sont dus au professeur Tait [2].

Soit σ une fonction vectorielle de ρ, le vecteur d'un point variable. Posons, suivant l'usage,

$$\rho = ix + jy + kz$$

et

$$\sigma = iX + jY + kZ,$$

où X, Y, Z sont les composantes de σ, suivant les directions des axes.

---

[1] Ce théorème a été donné par le professeur Stokes (*Smith's prize Examination*, 1854, question 8). Il est démontré dans la *Natural philosophy* de Thomson et Tait, § 190 (*j*).

[2] Voir *Proc. R. S. Edin.*, 28 avril 1862; *Sur le théorème de Green et d'autres qui en dépendent* (*Proc. R. S. Edin.*, 1869-70), Mémoire très important; et *Sur quelques intégrales de quaternions* (*Proc. R. S. Edin.*, 1870-71).

Nous devons effectuer sur σ l'opération

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Effectuons cette opération en appliquant les règles de multiplication de i, j et k; nous trouvons que $\nabla\sigma$ se compose de deux parties, l'une scalaire, et l'autre vectorielle.

La partie scalaire est

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

(*voir* THÉORÈME III) et la partie vectorielle est

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

et, si la relation entre X, Y, X et ξ, η, ζ est celle qui a été donnée par l'équation (1) du théorème précédent, nous pouvons écrire

$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta$$

(*voir* THÉORÈME IV).

On voit donc que les fonctions de X, Y, Z qui se présentent dans les deux théorèmes s'obtiennent toutes deux en effectuant l'opération ∇ sur le vecteur dont les composantes sont X, Y, Z. Les théorèmes eux-mêmes peuvent s'écrire

$$\text{(III)} \qquad \iiint S\nabla\sigma\, dS = \iint S.\sigma\, U\nu\, ds$$

et

$$\text{(IV)} \qquad \int S\sigma\, d\rho = \iint S.\nabla\sigma\, U\nu\, ds,$$

où dS est un élément de volume, ds un élément de surface, $d\rho$ un élément de courbe, et $U\nu$ un vecteur unité, dirigé suivant la normale.

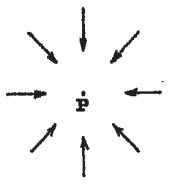
Pour comprendre la signification de ces fonctions d'un vecteur, supposons que σ_0 soit la valeur de σ en un point P, et examinons quelle est la valeur de $\sigma - \sigma_0$ dans le voisinage de P. Si, autour du point P, nous traçons une surface fermée, et que l'intégrale de σ sur cette surface soit dirigée vers l'intérieur (1), $S\nabla\sigma$ sera positif, et, partout aux environs du point P, le vecteur $\sigma - \sigma_0$ sera dirigé vers ce point, ainsi que l'indique la *fig.* 1.

(1) C'est-à-dire si l'on considère le côté interne de cette surface comme son côté positif. (P.)

C'est pourquoi je propose d'appeler la partie scalaire de $\nabla\sigma$ la *convergence* de σ au point P.

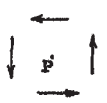
Pour déterminer le sens de la partie vectorielle de $\nabla\sigma$, supposons que nous regardions dans la direction du vecteur dont les composantes

Fig. 1.



sont ξ, η et ζ, et examinons le vecteur $\sigma - \sigma_0$ près du point P. On verra que, comme sur la *fig.* 2, le vecteur est partout disposé tangen-

Fig. 2.



tiellement et dans une direction opposée au mouvement des aiguilles d'une montre.

Je propose, mais sans grande confiance, d'appeler la partie vectorielle de $\nabla\sigma$ le *tournoiement* ou la *version* de σ au point P.

La *fig.* 3 montre un exemple de version et de convergence combinées.

Fig. 3.

Considérons maintenant la signification de l'équation

$$V\nabla\sigma = 0.$$

Elle implique que $\nabla\sigma$ est scalaire, ou que le vecteur σ est le gradient de quelque fonction scalaire Ψ. Ces applications du symbole d'opération ∇ sont dues au professeur Tait (1). Un développement plus com-

(1) *Proceedings R. S. Edin.*, 1862.

plet de cette théorie est donné dans le Mémoire *Sur le théorème de Green, et sur d'autres qui en dépendent*, auquel je renvoie le lecteur pour l'étude des propriétés du symbole ∇ au moyen des seules méthodes des quaternions (¹).

20. Une des propriétés les plus remarquables du symbole d'opération ∇ est que, répété, il devient

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

symbole qui se présente dans toutes les parties de la Physique et que nous appellerons *symbole de Laplace*.

Ce symbole d'opération est essentiellement scalaire : quand il est appliqué à une fonction scalaire, le résultat est scalaire ; quand il est appliqué à un vecteur, le résultat est un vecteur.

Si d'un point P comme centre nous traçons une petite sphère de rayon r, et si q_0 est la valeur de q au centre, $\overline{q}$ sa valeur moyenne pour tous les points situés à l'intérieur de la sphère,

$$q_0 - \overline{q} = \tfrac{1}{10} r^2 \nabla^2 q;$$

en sorte que la valeur de q au centre est plus grande ou plus petite que la valeur moyenne, suivant que $\nabla^2 q$ est positif ou négatif (²).

C'est pourquoi je propose d'appeler $\nabla^2 q$ la *concentration* de q au

---

(¹) *Trans. R. S. Edin.*, 1869-70.

(²) [En effet, pour un point de cette sphère,

$$q = q_0 + \frac{\partial q}{\partial x} x + \frac{\partial q}{\partial y} y + \frac{\partial q}{\partial z} z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} x^2 + 2\,\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial y} xy + \dots\right);$$

la valeur moyenne est

$$\frac{3}{4\pi r^3}\iiint q\,dx\,dy\,dz;$$

mais, si $d\omega$ représente $dx\,dy\,dz$, on a pour la sphère

$$\int x\,d\omega = \int y\,d\omega = \int z\,d\omega = \int yz\,d\omega = \int xz\,d\omega = \int xy\,d\omega = 0$$

et

$$\int x^2\,d\omega = \int y^2\,d\omega = \int z^2\,d\omega = \frac{1}{3}\int r^2\,d\omega = \frac{1}{3}\int_0^r 4\pi r^4\,dr = \frac{1}{15}\pi r^5;$$

d'où, enfin,

$$\frac{3}{4\pi r^3}\iiint q\,dx\,dy\,dz = \overline{q} + \frac{1}{10} r^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right). \qquad \text{(P.)}]$$

point P, car il indique l'excès de la valeur de q en ce point sur sa valeur moyenne aux environs de ce point.

Si q est une fonction scalaire, on connaît bien la façon de trouver sa valeur moyenne. Si c'est une fonction vectorielle, on trouvera sa valeur moyenne au moyen des règles sur l'intégration des fonctions vectorielles. Le résultat est naturellement un vecteur.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉLECTROSTATIQUE.

CHAPITRE I.

DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES (1).

Électrisation par frottement.

27. *Expérience I* (2). — Si un morceau de verre et un morceau de résine, ne présentant ni l'un ni l'autre aucune propriété électrique, sont frottés l'un contre l'autre, tant que leurs surfaces frottées sont laissées en contact, ils ne manifestent point de propriétés électriques; mais, dès qu'on les sépare, ils s'attirent l'un l'autre.

Si un second morceau de verre est frotté contre un second morceau

(1) [D'après le titre de ce Chapitre et quelques mots de la Préface, on doit penser que l'auteur s'est proposé de résumer ici, dans un ordre méthodique, les faits nécessaires et suffisants pour l'édification d'une théorie rationnelle de l'électrostatique : ce but ne nous paraît pas avoir été rempli. L'exposé qui va suivre ne peut dispenser le lecteur d'étudier dans d'autres Ouvrages les principaux phénomènes électriques.

On n'y trouve pas, en effet, les qualités qui caractérisent la plupart des Chapitres du présent Ouvrage, la simplicité, l'ordre et la précision. Les définitions expérimentales sont confuses ou amenées d'une manière artificielle; les expériences fondamentales, qui ne sont, pour la plupart, que des généralisations théoriques de celles de Faraday, sont compliquées et à peine réalisables. L'auteur paraît du reste avoir senti l'insuffisance de son mode d'exposition, car il revient sur certaines notions jusqu'à trois fois, sans parvenir néanmoins à la netteté désirable. Malgré ces imperfections didactiques, ce Chapitre est fort intéressant pour le lecteur familiarisé avec les phénomènes; il est plein d'aperçus originaux et de sujets de méditations pour les physiciens comme pour les géomètres. (C.)]

(2) *Voir* Sir William Thomson, *Sur la Théorie mathématique de l'Électricité* (*Cambridge and Dublin Mathematical journal*, mars 1848).

de résine, et que tous deux, après avoir été séparés, soient suspendus dans le voisinage des premiers morceaux de verre et de résine, on observe :

1° Que les deux morceaux de verre se repoussent l'un l'autre;

2° Que chaque morceau de verre attire chacun des morceaux de résine;

3° Que les deux morceaux de résine se repoussent l'un l'autre.

On appelle *phénomènes électriques* ces phénomènes d'attraction et de répulsion; les corps qui les présentent sont dits *électrisés* ou *chargés d'électricité*.

Les corps peuvent être électrisés de bien d'autres manières que par le frottement.

Les propriétés des deux morceaux de verre sont semblables entre elles et opposées à celles des deux morceaux de résine : le verre attire ce que la résine repousse, et repousse ce que la résine attire.

Si un corps, qui a été électrisé d'une manière quelconque, se comporte comme le verre, c'est-à-dire, s'il repousse le verre et attire la résine, on dit qu'il est chargé d'électricité vitrée; s'il attire le verre et repousse la résine, on dit qu'il a l'électricité résineuse. On constate que tous les corps électrisés ont l'une ou l'autre électricité.

C'est une habitude reçue parmi les savants d'appeler *positive* l'électricité vitrée, et *négative* l'électricité résineuse. Les deux espèces d'électricité ayant des propriétés exactement opposées, nous sommes en droit de les désigner par des signes contraires : quant à ce qui est d'affecter le signe + à l'une plutôt qu'à l'autre, il n'y faut voir qu'une pure convention; de même que l'on convient, dans les figures mathématiques, de compter positivement les longueurs dirigées vers la droite.

On ne peut observer aucune force ni d'attraction ni de répulsion s'exerçant entre un corps électrisé et un autre qui ne l'est pas. Dans tous les cas où l'on constate une action d'un corps électrisé sur d'autres corps qui n'avaient point reçu de charge préalable, c'est que ces corps sont *électrisés par induction* (1).

Électrisation par induction.

28. *Expérience II* (2). — On suspend par des fils de soie blanche

(1) [Cette affirmation, présentée au début sous cette forme, est une véritable pétition de principes. (C.)]

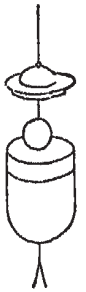
(2) Cette expérience et plusieurs autres qui suivent, sont dues à Faraday : *Sur l'Induction électrique statique* (*Phil. Mag.*, 1843), et *Exp. Res.*, vol. II, p. 279.

un vase de métal creux, et l'on attache son couvercle à un fil semblable, de façon que l'on puisse ouvrir et fermer le vase sans le toucher.

On suspend les morceaux de verre et de résine, et on les électrise, comme précédemment.

Alors, le vase n'ayant aucune charge électrique initiale, on suspend (*fig.* 4) par son fil le morceau de verre à l'intérieur du vase, mais non

Fig. 4.



en contact avec lui; on ferme le couvercle, et l'on trouve que l'extérieur du vase a une charge vitrée; on peut montrer que l'électrisation est exactement la même à l'extérieur du vase, en quelque point de l'espace intérieur que soit suspendu le verre.

Si maintenant, sans toucher au vase, on retire le verre, son électrisation est la même qu'avant d'avoir été introduit; celle du vase a disparu.

Cette électrisation, qui ne se produit qu'autant que le verre est à l'intérieur du vase, qui disparaît lorsque le verre est retiré, s'appelle *électrisation par induction*.

Des effets semblables se produiraient si l'on suspendait le verre près et en dehors du vase; mais, dans ce cas, on trouverait sur une partie de la surface extérieure du vase une électrisation vitrée, et sur l'autre partie une électrisation résineuse. Quand le verre est à l'intérieur du vase, toute la surface extérieure a l'électrisation vitrée, toute la surface intérieure l'électrisation résineuse.

Électrisation par conduction.

29. *Expérience III.* — On électrise le vase de métal par induction, comme dans l'expérience précédente; on suspend dans le voisinage, par des fils de soie blanche, un second corps métallique; et un fil de

métal, suspendu pareillement, est amené à toucher à la fois le vase électrisé et le corps métallique.

On trouve alors que le second corps a une électrisation vitrée, et que l'électrisation vitrée du vase a diminué.

L'état électrique a été transmis du vase au second corps par le moyen du fil de métal. On appelle ce fil un *conducteur d'électricité*, et on dit que le second corps a été *électrisé par conduction*.

Conducteurs et isolants.

Expérience IV. — Si, au lieu du fil de métal, on avait employé une tige de verre, un bâton de résine ou de gutta-percha, ou un fil de soie blanche, aucun transport d'électricité n'aurait eu lieu. Pour cette raison, ces substances sont appelées *non-conducteurs d'électricité*. Les non-conducteurs servent, dans les expériences d'électricité, à supporter les corps électrisés, sans enlever leur électricité. On les appelle *isolants*.

Les métaux sont de bons conducteurs; l'air, le verre, la résine, la gutta-percha, le caoutchouc vulcanisé, la paraffine, sont de bons isolants; mais, comme nous le verrons plus tard, toutes les substances présentent de la résistance au passage de l'électricité, et toutes la laissent passer, quoique à des degrés extrêmement différents. Ce sujet sera examiné quand nous en viendrons à traiter du mouvement de l'électricité. Pour l'instant, nous ne considérerons que deux classes de corps, les bons conducteurs et les bons isolants.

Dans l'Expérience II, un corps électrisé produit l'électrisation du vase métallique, dont il est séparé par l'air, milieu non conducteur. Un pareil milieu, considéré comme transmettant sans conduction les effets électriques, a été appelé par Faraday *milieu diélectrique;* l'action qui se produit à travers ce milieu est appelée *induction*.

Dans l'Expérience III, le vase électrisé a produit l'électrisation du second corps métallique par l'intermédiaire du fil métallique. Supposons ce fil enlevé, et le morceau de verre électrisé retiré du vase sans le toucher et éloigné à une distance suffisante. Le second corps continuera de montrer une électrisation vitrée; mais le vase, après que le verre en aura été retiré, aura une électrisation résineuse. Si maintenant nous mettons le fil métallique en contact avec les deux corps, il y aura conduction le long du fil, et toute électrisation disparaîtra des deux corps, ce qui montre bien que les deux corps étaient électrisés également et en signe contraire.

30. *Expérience V.* — L'Expérience II a fait voir que, si, après avoir électrisé un morceau de verre en le frottant contre de la résine, on le suspend à l'intérieur d'un vase métallique, on observe à l'extérieur de ce vase une électrisation qui ne dépend pas de la position du verre.

Si maintenant, sans toucher ni au vase ni au morceau de résine, on introduit dans le même vase le morceau de résine contre lequel le verre a été frotté, on observe qu'il n'y a plus à l'extérieur du vase aucune électrisation. On conclut de là que l'électrisation de la résine est exactement égale et opposée à celle du verre. En introduisant un nombre quelconque de corps chargés d'une manière quelconque, on peut montrer que l'électrisation de l'extérieur du vase est celle que produirait la somme algébrique (1) de toutes les électrisations, les charges résineuses étant comptées avec le signe —. Nous avons ainsi une méthode pratique pour additionner les effets électriques de plusieurs corps sans altérer en rien l'électrisation de chacun d'eux.

31. *Expérience VI*(2).—Prenons un second vase métallique isolé B; mettons dans le premier vase A le morceau de verre électrisé, dans le second vase B le morceau de résine électrisé; puis mettons les deux vases en communication par le fil de métal, comme dans l'Expérience III. Toute trace d'électrisation disparaît.

Retirons maintenant le fil de métal et, sans toucher les vases, retirons-en les morceaux de verre et de résine. Nous trouvons que A est chargé d'électricité résineuse, et B d'électricité vitrée.

Si maintenant nous introduisons à la fois le verre et le vase A dans un plus grand vase isolé C, nous trouvons qu'il n'y a point d'électrisation à l'extérieur de C. Ce qui montre que l'électrisation de A est exactement égale et contraire à celle du morceau de verre; et l'on ferait voir de même que l'électrisation de B est exactement égale et contraire à celle du morceau de résine.

Nous avons ainsi une méthode pour charger un vase d'une quantité d'électricité exactement égale et contraire à celle qui se trouve sur un corps électrisé, et cela sans altérer en rien l'électrisation de ce dernier; et nous pouvons par ce moyen charger un nombre quelconque

---

(1) [Cette expérience est évidemment purement théorique; de plus, comme on n'a indiqué jusqu'ici aucun moyen de *mesurer* l'électrisation d'un conducteur, l'expression de *somme algébrique* ne répond à aucune notion expérimentale. (C.)]

(2) [Cette expérience est à peine réalisable et, comme la précédente, soumise à la même objection relativement aux mesures. (C.)]

de vases de quantités exactement égales d'électricité de l'une ou l'autre sorte, quantités que nous pouvons prendre pour unités provisoires.

32. *Expérience VII.* — On charge le vase B d'une quantité d'électricité positive que, pour le moment, nous appellerons l'*unité;* puis on l'introduit dans le grand vase isolé C, sans qu'il y ait contact. Il se produit une électrisation positive à l'extérieur de C. On fait alors toucher B contre l'intérieur de C. Aucun changement ne s'observe (1) dans l'électrisation extérieure de C; mais, si l'on retire B de C, sans qu'il y ait contact, et qu'on l'écarte à une distance suffisante, on reconnaît que B est entièrement déchargé, mais que C est chargé de l'unité d'électricité positive.

Nous avons donc une méthode pour faire passer sur C la charge de B.

On charge de nouveau B de l'unité d'électricité positive, on l'introduit dans le vase C qui a déjà une charge, on lui en fait toucher la surface intérieure, et on le retire. On trouve que, cette fois encore, B est complètement déchargé, et que, par suite, la charge de C est doublée.

En répétant cette opération, on trouve que, si intense que soit la charge préalable de C, et de quelque manière que soit chargé B, dès l'instant que B est d'abord entièrement entouré par C, puis amené au contact avec C, et enfin retiré sans toucher C, la charge de B passe complètement sur C, et B est absolument déchargé d'électricité.

Cette expérience nous donne une méthode pour charger un corps d'un nombre quelconque d'unités d'électricité. Quand nous en viendrons à la théorie mathématique de l'électricité, nous verrons que le résultat de cette expérience nous fournit une preuve rigoureuse de l'exactitude de la théorie.

33. Avant de passer à l'étude des lois des forces électriques, résumons les faits établis.

En plaçant un système électrisé quelconque à l'intérieur d'un vase conducteur creux isolé et en examinant l'effet produit à l'extérieur du vase, nous déterminons la nature de l'électrisation totale dans le système intérieur, et cela, sans qu'il y ait communication d'électricité entre les différents corps du système.

---

(1) [On remarquera, comme précédemment, combien il serait difficile expérimentalement de prouver cette affirmation, en apparence si simple, dont la vérification est pourtant le nœud de la question. (C.)]

Nous pouvons étudier l'électrisation de l'extérieur du vase par un procédé très délicat, consistant à mettre le vase en communication avec un électroscope.

Nous pouvons supposer que l'électroscope soit formé d'une feuille d'or suspendue entre deux corps chargés, l'un positivement et l'autre négativement. Si la feuille d'or est électrisée, elle inclinera vers le corps qui a une charge contraire à la sienne. En augmentant convenablement l'électrisation des deux corps et la délicatesse de la suspension, nous pouvons rendre sensibles des charges extrêmement faibles de la feuille d'or.

Lorsque nous en viendrons à décrire les électromètres et les multiplicateurs, nous verrons qu'il y a des méthodes encore plus parfaites pour découvrir l'existence d'une charge et pour vérifier l'exactitude de nos théorèmes; mais, pour l'instant, nous admettrons que l'épreuve se fasse en reliant le vase creux à un électroscope à feuilles d'or.

C'est cette méthode qui a servi à Faraday pour son admirable démonstration des lois des phénomènes électriques (1).

34. 1° L'électrisation totale d'un corps ou d'un système de corps reste toujours la même, à moins qu'il ne reçoive de l'électricité ou qu'il n'en cède à d'autres corps.

Dans toutes les expériences d'électricité, on trouve que l'électrisation des corps est variable, mais toujours on reconnaît que ces variations sont dues à un défaut d'isolement; et à mesure que l'on améliore les procédés d'isolement, la déperdition diminue. On est donc en droit d'affirmer que l'électrisation d'un corps placé dans un milieu parfaitement isolant resterait parfaitement constante.

2° Quand un corps en électrise un autre par conduction, la charge totale des deux corps reste constante, c'est-à-dire que, autant un des corps perd d'électricité positive ou gagne d'électricité négative, autant l'autre gagne d'électricité positive ou perd d'électricité négative.

En effet, si les deux corps sont renfermés dans le vase creux, on n'observe aucun changement dans l'électrisation totale.

3° Quand on produit l'électrisation par le frottement, ou par toute autre méthode connue, il se forme des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative (2).

---

(1) *On static electrical inductive action* (*Phil. Mag.*, 1843), et *Exp. Res.*, vol. II, p. 249.

(2) [L'expérience est extrêmement difficile à réaliser pour être concluante. (C.)]

En effet, on peut examiner la charge totale du système au moyen du vase creux, ou effectuer à l'intérieur du vase même les opérations qui produisent l'électrisation; si énergique que soit l'électrisation des parties du système, la charge de l'ensemble, telle que l'indique l'électroscope à feuilles d'or, est invariablement nulle.

Donc l'électrisation d'un corps est une quantité physique susceptible de mesure, et l'on peut, en combinant expérimentalement deux ou plusieurs électrisations, obtenir un résultat analogue à celui que donne l'addition algébrique de deux quantités. Nous sommes donc en droit d'employer un langage qui, dans l'électrisation, vise la quantité aussi bien que la qualité, et de parler d'un corps électrisé comme « d'un corps chargé d'une certaine quantité d'électricité positive ou négative ».

35. Lorsque nous accordons à l'électricité, ainsi que nous venons de le faire, la qualité de quantité physique, nous devons ne pas admettre, d'une façon trop hâtive, qu'elle est ou qu'elle n'est pas une substance, qu'elle est ou qu'elle n'est pas une forme d'énergie, ou qu'elle appartient à quelqu'une des espèces connues de quantités physiques. Tout ce que nous avons prouvé jusqu'ici est qu'on ne peut ni la créer ni la détruire, et, par suite, que si la quantité totale d'électricité comprise à l'intérieur d'une surface augmente ou diminue, cette quantité en plus ou en moins doit forcément avoir traversé la surface pour entrer ou pour sortir.

C'est ce qui est également vrai pour la matière, et s'exprime par l'équation connue en Hydrodynamique sous le nom d'*équation de continuité*.

Ce n'est plus vrai pour la chaleur, car la chaleur contenue à l'intérieur d'une surface fermée peut augmenter ou diminuer sans qu'il entre de la chaleur ou qu'il en sorte à travers la surface; il peut y avoir transformation en chaleur de quelque autre forme d'énergie, ou de chaleur en énergie.

Ce n'est même pas vrai de l'énergie en général, si nous admettons l'action directe des corps à distance; car alors un corps extérieur à la surface fermée peut échanger de l'énergie avec le corps compris dans la surface. Au contraire, si tout ce qui paraît une action à distance résulte d'une action entre les parties d'un milieu intermédiaire, et si nous comprenons clairement la nature de cette action entre les parties du milieu, on conçoit que, dans tous les cas où l'énergie augmente ou diminue à l'intérieur d'une surface fermée, nous pourrons saisir au passage l'énergie qui entre dans la surface ou en sort.

Il y a encore une autre raison qui nous permet d'affirmer que l'électricité, considérée comme quantité physique, et synonyme de charge totale du corps, n'est pas comme la chaleur, une forme d'énergie. Un système électrisé possède une certaine énergie; cette énergie peut se calculer en multipliant la quantité d'électricité qui se trouve sur chaque partie du système par une autre quantité physique, le potentiel de cette partie du système (1), et en prenant la moitié de la somme de ces produits. Les quantités *électricité* et *potentiel*, multipliées l'une par l'autre, produisent la quantité *énergie*. Il est donc impossible que l'*électricité* et l'*énergie* soient des quantités de même espèce, l'*électricité* n'étant qu'un des facteurs de l'*énergie*, dont l'autre facteur est le *potentiel*.

L'énergie, qui est le produit de ces deux facteurs, peut aussi être considérée comme le produit de divers autres groupes de deux facteurs; ainsi :

Une force × une distance le long de laquelle agit la force.
Une masse × la gravité agissant sur un certain parcours vertical.
Une masse × la moitié du carré de sa vitesse.
Une pression × un volume de fluide introduit dans le vase à cette pression.
Une affinité chimique × un changement chimique mesuré par le nombre d'équivalents électrochimiques qui entrent en combinaison.

Si nous arrivons à nous faire des idées mécaniques distinctes sur la nature du potentiel électrique, nous pourrons, en les combinant à l'idée d'énergie, déterminer la catégorie physique dans laquelle doit être classée l'électricité.

36. Dans la plupart des théories sur ce sujet, on traite l'électricité comme une substance; mais, comme il y a deux espèces d'électrisation, qui, combinées ensemble, s'annulent l'une l'autre, et comme nous ne concevons pas deux substances qui s'annulent l'une l'autre, on a établi une distinction entre l'électricité libre et l'électricité combinée.

Théorie des deux fluides.

Dans la théorie dite des *deux fluides*, on suppose que tous les corps

(1) [Il se présente ici un défaut d'ordre dans cette exposition : le potentiel électrique ne sera défini que plus loin, et le lecteur ne comprendra ce passage qu'après avoir pris connaissance de ce qui suit. (C.)]

qui ne sont pas électrisés sont chargés de quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative. On admet que ces quantités sont si grandes que, par aucun procédé d'électrisation, on ne puisse enlever à un corps toute son électricité de l'une ou l'autre espèce. Dans cette théorie, l'opération qui constitue l'électrisation consiste à prendre à un corps A une certaine quantité P d'électricité positive pour la donner à un corps B, ou bien à prendre à B une quantité N d'électricité négative que l'on donne à A, ou à combiner de quelque manière ces deux opérations.

Le résultat sera que A aura P + N unités d'électricité négative en sus de son électricité positive restante, laquelle est supposée combinée à une quantité égale d'électricité négative. Cette quantité P + N est ce qu'on appelle l'*électricité libre*, le reste est ce qu'on appelle l'*électricité combinée, latente ou fixée*.

En exposant cette théorie, on a généralement appelé les deux électricités *des fluides*, parce qu'elles sont susceptibles de se transporter d'un corps sur un autre et qu'elles sont très mobiles dans les corps conducteurs. Les autres propriétés des fluides, inertie, poids, élasticité, ne leur ont pas été attribuées par les auteurs qui n'ont fait usage de cette théorie qu'en vue de recherches mathématiques; mais l'emploi de ce mot de *fluide* a été de nature à induire en erreur le vulgaire, et avec lui bien des savants qui n'étaient pas des physiciens, et qui se sont saisis de ce mot de *fluide*, le seul terme qui leur parût intelligible dans l'exposé de la théorie.

Nous verrons que le développement de la théorie mathématique est dû dans une large mesure à des auteurs qui s'exprimaient dans le langage de la théorie des deux fluides. Mais leurs résultats ont été déduits entièrement de données que l'on peut établir par l'expérience, et qui par suite sont forcément vraies, que nous adoptions ou non la théorie des deux fluides. Et par conséquent la vérification expérimentale de ces résultats mathématiques ne prouve rien, ni pour ni contre les doctrines particulières de cette théorie.

La considération de deux fluides nous permet d'envisager l'électrisation négative de A et l'électrisation positive de B comme l'effet d'une quelconque de trois opérations différentes conduisant au même résultat. Nous avons déjà supposé qu'elle est due au transport de P unités d'électricité positive de A sur B, et de N unités d'électricité négative de B sur A. Mais si P + N unités d'électricité positive avaient été transportées de B sur A, ou si P + N unités d'électricité négative avaient été transportées de B sur A, le résultat serait le même que précédemment pour ce qui est de l'électricité libre sur A ou sur B; mais

la quantité d'électricité combinée laissée sur A serait moindre dans le second cas, et plus grande dans le troisième qu'elle n'était dans le premier.

Il résulterait donc de cette théorie que l'on peut altérer, non seulement la quantité d'électricité libre d'un corps, mais encore sa quantité d'électricité combinée. Or, on n'a jamais observé sur les corps électrisés aucun phénomène que l'on puisse attribuer à une variation de la quantité d'électricité combinée. Donc, ou bien les électricités combinées n'ont pas de propriétés que l'on puisse observer, ou bien il n'y a pas de variation possible de la quantité d'électricité combinée. La première de ces hypothèses ne présente point de difficultés au point de vue purement mathématique, car n'attribuant aux fluides d'autres propriétés que celles d'attraction et de répulsion, au regard desquelles les deux fluides s'annulent l'un l'autre purement et simplement, l'effet de ces fluides combinés est vraiment et identiquement nul. Mais, pour ceux qui ne peuvent employer le mot *fluide* sans avoir l'idée d'une substance, il est difficile de concevoir que la combinaison des deux fluides n'ait pas de propriétés du tout, que l'addition sur un corps de quantités plus ou moins grandes de cette combinaison n'ait aucun effet sur ce corps, qu'elle n'augmente ni sa masse ni son poids, ni ne change aucune de ses propriétés. Certaines personnes ont été ainsi amenées à supposer que chaque fois qu'il y a électrisation, des quantités exactement égales de chaque fluide sont transportées dans des directions opposées, en sorte que la quantité totale des deux fluides pris ensemble reste toujours la même sur tous les corps. Par cette nouvelle loi, ils tâchent de sauver les apparences, oubliant que l'on n'a nullement besoin de leur loi, si ce n'est pour accorder la théorie des deux fluides avec l'expérience, et pour l'empêcher de prédire des phénomènes qui ne se produisent pas.

Théorie d'un seul fluide.

37. Dans la théorie d'un seul fluide, tout est semblable à la théorie des deux fluides, sauf qu'au lieu de supposer deux substances égales et opposées à tous égards, il y en a une, généralement le fluide négatif, à laquelle on attribue les propriétés et le nom de la matière ordinaire, gardant pour l'autre le nom de *fluide électrique*. On suppose que les molécules du fluide se repoussent les unes les autres suivant la loi de l'inverse carré des distances, et qu'elles attirent les molécules matérielles suivant la même loi. Si la quantité de fluide électrique contenue dans un corps est telle que, pour une molécule de fluide élec-

trique extérieure au corps, la répulsion due au fluide électrique du corps soit égale à l'attraction due à sa masse matérielle, on dit que le corps est saturé. Si la quantité de fluide du corps est plus grande que celle qui détermine la saturation, l'excès est appelé *fluide excédant*, et l'on dit que le corps est surchargé. Si la quantité de fluide est moindre qu'il ne convient pour la saturation, on dit que le corps est souschargé, et l'on appelle quelquefois *fluide déficient* la quantité du fluide qui serait nécessaire pour le saturer. Le nombre d'unités d'électricité nécessaire pour saturer 1gr de matière ordinaire doit être très grand; en effet, 1gr d'or peut être battu jusqu'à présenter une surface de 1mq, et sous cette forme peut prendre une charge négative d'au moins 60000 unités d'électricité. Pour saturer la feuille d'or, il faut lui donner cette quantité du fluide électrique; en sorte que la quantité totale nécessaire pour la saturer doit être plus grande encore. On suppose qu'entre deux corps saturés, l'attraction qui s'exerce entre la matière et le fluide est un peu plus grande que la répulsion qui agit entre les deux parties de fluide et les deux parties de matière; et l'on suppose que cette force résiduelle rend compte de l'attraction de gravitation.

Cette théorie n'a pas le tort d'expliquer trop, comme celle des deux fluides; et cependant elle exige que nous admettions que la masse du fluide électrique est si faible, qu'aucune des électrisations positive ou négative que nous sommes capables de produire ne puisse accroître ou diminuer d'une manière appréciable ni la masse ni le poids d'un corps (1); et, de plus, elle n'a pu jusqu'à présent donner de raisons valables de supposer que l'électrisation vitrée plutôt que l'électrisation résineuse soit due *à un excès* d'électricité.

Une objection a été quelquefois opposée à cette théorie, par des hommes qui auraient dû mieux raisonner. On a dit que l'hypothèse d'une *répulsion* entre les particules de matière non combinées à de l'électricité est en contradiction formelle avec ce fait bien établi que, dans tout l'univers, toutes les particules de matière *s'attirent* mutuellement. Si la théorie d'un seul fluide était vraie, les corps célestes devraient se repousser l'un l'autre.

---

(1) [Il n'est pas inutile de faire remarquer de combien de difficultés serait entourée la pesée exacte d'un corps fortement électrisé.

L'affirmation n'est même pas correcte en ce qui concerne la définition théorique du poids, qui est l'attraction terrestre : l'induction sur la terre modifie l'action réciproque. Quant à la détermination de la masse du corps électrisé, aucune expérience connue ne permet de vérifier ce *postulatum* qu'on admet dans le calcul du mouvement des corps électrisés. (C.)]

Mais il est bien évident que, dans cette théorie, si les corps célestes étaient formés de matière non combinée à de l'électricité, ils seraient à l'état le plus élevé d'électrisation négative et se repousseraient l'un l'autre. Or nous n'avons aucune raison de croire qu'ils soient ni qu'ils puissent se maintenir dans cet état d'électrisation élevée. La terre et tous les corps dont nous avons observé l'attraction sont bien plutôt dans un état de non-électrisation, c'est-à-dire que ces corps ont leur charge normale d'électricité, et que la seule action qui s'exerce entre eux est la force résiduelle dont il a été parlé plus haut. En fait, la façon artificielle dont cette force résiduelle est introduite constitue une objection bien autrement sérieuse contre la théorie.

Dans cet Ouvrage et à différents points de notre étude, je me propose de mettre à l'épreuve les différentes théories, en m'éclairant de certains phénomènes d'une autre nature. Pour ma part, je cherche à m'éclairer sur la nature de l'électricité en étudiant ce qui se passe dans l'espace qui sépare les corps électrisés. C'est là le caractère essentiel de la méthode de recherche suivie par Faraday dans ses *Experimental Researches :* à mesure que nous avancerons, je me propose de présenter, en les reliant sous une forme mathématique, les résultats obtenus par Faraday, W. Thomson, etc.; nous pourrons voir ainsi quels phénomènes sont également bien expliqués par toutes les théories, et quels autres révèlent les difficultés propres à chaque hypothèse.

Mesure de la force qui s'exerce entre les corps électrisés.

38. Les forces peuvent se mesurer de différentes manières. Ainsi, on peut suspendre un des corps à l'un des bras d'une balance sensible, et des poids à l'autre bras, jusqu'à ce que le corps soit en équilibre, quand il n'est pas électrisé. L'autre corps est ensuite placé sous le premier à une distance connue, de façon que l'attraction ou la répulsion des deux corps, lorsqu'ils sont électrisés, augmente ou diminue le poids apparent du premier corps. Le poids qu'il faut ajouter sur l'autre bras ou en retirer, exprimé en mesure dynamique, mesure la force qui agit entre les corps. Cette disposition a été employée par Sir Snow Harris, et c'est celle qui a été adoptée dans l'électromètre absolu de Sir W. Thomson (*voir* § 217).

Il est quelquefois plus commode d'employer une balance de torsion : une tige horizontale est suspendue à un fil fin de métal ou de soie, et peut osciller autour de ce fil vertical comme axe. Le corps est attaché à un bout de cette tige et la force agit sur lui dans une direction tan-

gentielle, de manière à faire tourner la tige autour de son axe vertical et à tordre d'un certain angle le fil de suspension. On détermine la résistance du fil à la torsion, en observant la durée des oscillations de la tige, dont on connaît d'ailleurs le moment d'inertie. De l'angle de torsion et de la résistance du fil on peut déduire la force d'attraction ou de répulsion. La balance de torsion a été imaginée par Michell pour déterminer la force de gravitation qui s'exerce entre des corps de petite dimension, et elle a été utilisée dans ce but par Cavendish. Coulomb, travaillant indépendamment de ces deux physiciens, l'inventa de son côté, et l'appliqua très heureusement à la recherche de la loi des forces électrique et magnétique (1) : depuis, la balance de torsion a toujours été employée dans les recherches où l'on a à mesurer des forces faibles (*voir* § 215).

39. Supposons que, par l'une ou l'autre de ces méthodes, nous puissions mesurer la force qui s'exerce entre deux corps électrisés. Nous admettrons que les dimensions des corps soient petites relativement à la distance qui les sépare, de façon que le résultat ne puisse être modifié beaucoup par des inégalités possibles dans la distribution de l'électrisation sur ces corps; nous supposerons aussi que ces corps soient suspendus dans l'air à une distance considérable de tout autre corps sur lequel ils pourraient induire une charge.

Nous trouvons alors que les corps, étant placés à une distance fixe l'un de l'autre et étant chargés respectivement de e et e' de nos unités provisoires d'électricité, se repoussent l'un l'autre avec une force proportionnelle au produit de e et e'. Si e ou e' est négatif, la force devient une attraction; si e et e' sont tous deux négatifs, la force est de nouveau une répulsion.

Nous pouvons supposer que le premier corps A soit chargé de m unités d'électricité vitrée et de n unités d'électricité négative, et l'on peut concevoir que les deux sortes d'électricité soient placées en des points différents du corps, comme dans l'Expérience V.

Supposons que le second corps B soit chargé de m' unités d'électricité positive et de n' unités d'électricité négative.

Alors, chacune des m unités positives de A repoussera chacune des m' unités positives de B avec une force f, ce qui produira un effet total égal à $mm'f$.

---

(1) [Les premières publications relatives à la balance de torsion sont celles de Coulomb (1777-1784). Viennent ensuite celles de Cavendish (1798), où se trouvent mentionnés l'idée et les premiers essais inédits de Michell. (C.)]

Puisque l'effet de l'électricité négative est exactement égal et contraire à celui de l'électricité positive, chacune des m unités positives de A attirera chacune des n' unités négatives de B avec une force f, produisant un effet total égal à $mn'f$.

De même, les n unités négatives de A attireront les m' unités positives de B avec une force $nm'f$, et repousseront les n' unités négatives de B avec une force $nn'f$.

La répulsion totale sera donc $(mm' + nn')f$, et l'attraction totale $(mn' + nm')f$.

La répulsion résultante sera

$$(mm' + nn' - mn' - nm')f \quad \text{ou} \quad (m - n)(m' - n')f.$$

Or $(m - n) = e$ est la valeur algébrique de la charge de A, et $(m' - n') = e'$ est la charge de B, de façon que la répulsion résultante peut s'écrire $ee'f$, étant toujours bien entendu que les quantités e et e' sont prises avec leur signe propre.

Variation de la force avec la distance.

40. Après avoir établi la loi de la force à distance constante, nous pouvons mesurer la force qui s'exerce entre des corps chargés d'une manière constante et placés à différentes distances. On trouve, par des mesures directes, que la force, attraction ou répulsion, varie en raison inverse du carré de la distance; en sorte que, si f est la répulsion entre deux unités à l'unité de distance, la répulsion à la distance r sera fr^{-2}, et l'expression générale de la répulsion entre e et e' unités à la distance r sera

$$fee'r^{-2}.$$

Définition de l'unité électrostatique d'électricité.

41. Jusqu'ici nous avons employé comme unité d'électricité un étalon absolument arbitraire, à savoir, l'électrisation d'un certain morceau de verre, telle qu'elle se trouvait être au début de nos expériences. Nous sommes maintenant en mesure de choisir une unité d'après un principe arrêté, et, pour que cette unité puisse appartenir à un système général, nous la définirons de façon que f soit égal à l'unité; en d'autres termes :

L'unité électrostatique d'électricité est la quantité d'électricité qui, placée à l'unité de distance d'une quantité égale, la repousse avec l'unité de force.

Cette unité est appelée *électrostatique*, pour la distinguer de l'unité *électromagnétique*, qui sera définie plus tard.

Nous pouvons maintenant écrire la loi générale des actions électriques sous la forme simple

$$F = ee'r^{-2},$$

ou : *La répulsion qui s'exerce entre deux corps de petites dimensions chargés respectivement de e et e' unités d'électricité est numériquement égale au produit des charges divisé par le carré de la distance.*

Dimensions de l'unité électrostatique de quantité.

42. Si [Q] est l'unité électrostatique de quantité prise en elle-même; si e et e' sont les valeurs numériques de quantités particulières, r la valeur numérique de la distance, et F la valeur numérique de la force, l'équation devient

$$F[F] = ee'r^{-2}[Q^2][L^{-2}],$$

d'où

$$[Q] = [L][F^{\frac{1}{2}}] = [L^{\frac{3}{2}}T^{-1}M^{\frac{1}{2}}].$$

Cette unité est appelée l'*unité électrostatique d'électricité*. On peut employer d'autres unités dans les applications pratiques ou dans d'autres branches de la science électrique; mais, dans les équations de l'électrostatique, il est entendu que les quantités d'électricité sont évaluées en unités électrostatiques; de même, en Astronomie physique, on emploie une unité de masse fondée sur les phénomènes de la gravitation, et différente des unités de masse habituellement en usage.

Démonstration de la loi de la force électrique.

43. On peut considérer la loi de la force électrique comme établie dans de certaines limites d'exactitude par les expériences de Coulomb au moyen de la balance de torsion, mais des expériences de cette nature sont rendues difficiles, et, jusqu'à un certain point, incertaines par différentes causes d'erreur dont il faut se bien rendre compte pour faire les corrections nécessaires.

En premier lieu, pour être capables de recevoir des charges qui suffisent à produire des effets mesurables, les corps doivent avoir des dimensions appréciables relativement à leur distance. Par suite, l'action de chaque corps produit un certain effet sur la distribution de l'électricité de l'autre corps, et l'on ne peut plus considérer les charges

comme également distribuées sur la surface, ou rassemblées à son centre de gravité; mais il faut calculer leur effet par une étude compliquée. C'est ce qui a été fait par Poisson, dans le cas de deux sphères, de la façon la plus heureuse, et cette étude a été grandement simplifiée par la *Théorie des Images électriques* de Sir W. Thomson (*voir* § 172-174).

Une autre difficulté tient à l'action de l'électricité induite sur les parois de la cage qui contient l'instrument. Si l'on a soin de faire l'intérieur de cette cage exactement cylindrique, et de le recouvrir de métal, cet effet peut être défini et mesuré.

Une difficulté d'une autre nature est l'isolement imparfait des corps, d'où résulte que leur charge diminue constamment. Coulomb a étudié la loi de la déperdition, et corrigé ses expériences de cette erreur.

Depuis le temps de Coulomb, les procédés pour isoler les corps électrisés ou pour mesurer les effets électriques ont été bien perfectionnés, surtout par Sir W. Thomson : cependant ce ne sont point des expériences, ni des mesures directes, qui ont établi la parfaite exactitude de la loi de Coulomb, dont elles sont plutôt des exemples numériques, mais bien l'étude mathématique des phénomènes décrits dans l'Expérience VII, à savoir qu'un corps conducteur électrisé B, après avoir touché l'intérieur d'un conducteur creux fermé C, et avoir été tiré sans toucher C, se trouve complètement déchargé, quelle que soit l'électrisation extérieure de C. Au moyen d'un électroscope sensible, il est aisé de montrer qu'il ne reste point d'électricité sur B après cette opération; et, d'après la théorie mathématique qui sera donnée au § 74, il ne peut en être ainsi que si la force varie en raison inverse du carré de la distance : pour toute autre forme de la loi, B aurait été électrisé.

Le champ électrique.

44. Le champ électrique est la portion de l'espace voisine des corps électrisés, considérée au point de vue des phénomènes électriques. Il peut être occupé par de l'air ou par d'autres corps, ou bien peut être ce que nous appelons *vide*, c'est-à-dire un espace d'où nous avons retiré toutes les substances sur lesquelles nous pouvons agir par les moyens mis à notre disposition.

Si un corps électrisé est introduit en un point d'un champ électrique, en général il déterminera un changement dans la distribution de l'électrisation à la surface des autres corps.

Mais, si le corps est très petit et si sa charge est également petite,

l'électrisation des autres corps ne sera pas sensiblement modifiée, et nous pourrons considérer le corps comme définissant, par son centre de gravité, un certain point de l'espace. La force qui agit sur le corps est alors proportionnelle à sa charge et change de signe quand la charge change de signe.

Soient e la charge du corps, F la force qui agit sur lui dans une certaine direction. Si e est très petit, F est proportionnel à e ou

$$F = eR,$$

R étant une quantité qui dépend de la distribution de l'électricité sur les autres corps du champ. Si nous pouvions faire la charge e égale à l'unité, sans troubler l'état électrique des autres corps, nous aurions $F = R$.

Nous appellerons R la force électrique résultante au point considéré du champ, et quand nous voudrons exprimer le fait que cette quantité est un vecteur, nous le désignerons par la lettre gothique $\mathfrak{E}$.

Force électromotrice et potentiel.

45. Si le petit corps qui porte la petite charge e est déplacé depuis un point A jusqu'à un point B, suivant un chemin donné, il sera soumis en chaque point de son trajet à une force Re, où R varie d'un point à l'autre du trajet. Désignons par Ee le travail total effectué sur le corps par ces forces électriques : E est alors appelé *la force électromotrice totale* suivant le chemin AB. Si le chemin forme un circuit fermé, et si la force électromotrice totale le long de ce circuit n'est pas nulle, l'électricité ne peut être en équilibre, et il se produit un courant. Donc, en Électrostatique, la force électromotrice totale le long d'un circuit fermé quelconque doit être nulle; et si A et B sont deux points du circuit, la force électromotrice de A en B est la même, le long des deux parties en lesquelles peut être partagé le circuit; et, puisque chacune de ces parties peut être modifiée indépendamment de l'autre, la force électromotrice totale de A en B est la même pour tous les chemins qui vont de A à B.

Si l'on prend B comme point de repère par rapport à tous les autres points, la force électromotrice totale de A à B est appelée le *potentiel* de A (1); il ne dépend que de la position de A. Dans les recherches ma-

(1) [L'excès du potentiel de A sur le potentiel en un autre point A′ est la force électromotrice totale de A en A′; ou, si A et A′ sont infiniment voisins, le produit de AA′ par la composante de R suivant AA′. (P.)]

thématiques, on prend généralement B à une distance infinie des corps électrisés (1).

Un corps électrisé positivement tend à se mouvoir des points où le potentiel positif est plus élevé vers les points où le potentiel positif est moins élevé, ou vers les points où le potentiel est négatif; un corps chargé d'électricité négative tend à se mouvoir dans la direction opposée.

Sur un conducteur, l'électricité se meut librement relativement au conducteur. Si donc deux parties d'un conducteur sont à des potentiels différents, l'électricité positive se portera de la partie ayant le potentiel le plus élevé à la partie ayant le potentiel le moins élevé, et cela, tant que subsistera la différence. Un conducteur ne peut donc être en équilibre électrique que si le potentiel est le même en chacun de ses points. Ce potentiel est appelé le *potentiel du conducteur*.

Surfaces équipotentielles.

46. Si une surface est décrite, ou supposée décrite, dans le champ électrique, de façon que le potentiel électrique soit le même en tous les points de cette surface, elle est appelée *surface équipotentielle*.

Un point électrisé, assujetti à rester sur une telle surface, n'aura aucune tendance à se mouvoir d'une partie à une autre de cette surface, puisque le potentiel est le même en tous les points. Une surface équipotentielle est donc une surface d'équilibre ou une surface de niveau.

La force résultante en un point de cette surface est dirigée suivant la normale à la surface, et la grandeur de cette force est telle que le travail effectué pendant le passage de l'unité d'électricité de la surface V à la surface V′ est $V - V'$.

Deux surfaces équipotentielles à des potentiels différents ne peuvent se couper, puisqu'un point ne peut avoir qu'un seul potentiel;

---

(1) [Nous voyons ici un exemple des inconvénients que présente l'emploi d'une méthode artificielle d'exposition des phénomènes. Cette définition si importante de la force électromotrice ou du potentiel, qu'il serait si nécessaire d'amener d'une manière en quelque sorte naturelle par la logique des faits, arrive ici, pour ainsi dire subrepticement, par des considérations qu'un lecteur peu versé déjà dans l'étude de l'électricité ne peut manquer de trouver absolument arbitraires. Tout ce paragraphe doit être considéré comme insuffisant, eu égard à l'importance des définitions posées et des conséquences déduites. (Voir *Journal de Physique*, t. I, 1re série, *Sur les unités électrostatiques*.) (C.)]

mais une surface équipotentielle peut se couper elle-même, et c'est ce qui a lieu en tous les points et pour toutes les lignes d'équilibre (1).

La surface d'un conducteur en équilibre électrique est forcément une surface équipotentielle. Si l'électrisation est positive sur toute cette surface, le potentiel diminuera à mesure que nous nous écarterons de la surface dans tous les sens, et le conducteur sera entouré par une série de surfaces à potentiel plus bas.

Mais, si, par l'action de corps électrisés extérieurs, certaines régions du conducteur sont électrisées positivement, et d'autres négativement, la surface équipotentielle complète se composera de la surface du conducteur lui-même, en même temps que d'un système d'autres surfaces coupant la surface du conducteur suivant les lignes qui séparent les régions positives des régions négatives. Ces lignes seront des lignes d'équilibre, en sorte qu'un point électrisé placé sur l'une de ces lignes ne sera soumis à aucune force dans aucune direction.

Si la surface d'un conducteur est électrisée positivement en certaines parties et négativement en d'autres, il faut qu'il y ait forcément avec lui dans le champ quelque autre corps électrisé. En effet, considérons un point électrisé positivement, qui part d'une partie électrisée positivement du conducteur, et laissons-le se mouvoir constamment dans la direction de la force résultante qui agit sur lui : le potentiel en ce point diminuera constamment, jusqu'à ce que ce point ou bien atteigne une surface électrisée négativement à un potentiel inférieur à celui du premier conducteur, ou bien s'éloigne à l'infini. Et, puisque le potentiel à l'infini est zéro, ce dernier cas ne peut se présenter que si le potentiel du conducteur est positif (2).

De même, un point électrisé négativement, partant d'une région électrisée négativement de la surface, doit ou bien atteindre une surface électrisée positivement, ou bien s'éloigner à l'infini, et ce dernier cas ne peut se présenter que si le potentiel du conducteur est négatif.

Par suite, si les deux électricités positive et négative existent à la surface d'un conducteur, il faut qu'il y ait dans le champ un autre corps électrisé, dont le potentiel soit de même signe que celui du corps et de valeur numérique plus élevée; et si un conducteur de forme quel-

(1) [En effet, si deux nappes d'une surface équipotentielle se coupent, la force qui devrait être normale à chacune des deux nappes est forcément nulle en tous les points de la courbe d'intersection. (P.)]

(2) [Mêmes remarques que ci-dessus. (C.)]

conque est seul dans le champ, la charge en chacun de ses points est du même signe que le potentiel du conducteur.

La surface intérieure d'un vase conducteur creux, qui ne renferme point de corps électrisé, est entièrement exempte de charge. Car, si une partie de cette surface avait une charge positive, une molécule d'électricité positive, se mouvant dans la direction de la force qui agit sur elle, devrait atteindre une surface à charge négative et à potentiel moins élevé. Or, *toute la surface intérieure a le même potentiel* : elle ne peut donc avoir de charge (1).

Un conducteur placé à l'intérieur du vase et communiquant avec lui peut être considéré comme limité par la surface intérieure. Un tel conducteur ne peut donc avoir de charge.

Lignes de force.

47. La ligne décrite par un point qui se meut toujours dans la direction de la force résultante est appelée *ligne de force*. Elle coupe à angle droit les surfaces équipotentielles. Plus loin, on exposera plus complètement les propriétés des lignes de force, Faraday ayant exprimé un grand nombre des lois de l'action électrique, au moyen de sa conception de lignes de force tracées dans le champ électrique et représentant en chacun de ses points la grandeur de la force aussi bien que sa direction.

Tension électrique.

48. Puisque la surface du conducteur est une surface équipotentielle, la force résultante est normale à cette surface, et, ainsi qu'on le verra au § 78, elle est proportionnelle à la densité superficielle de l'électrisation. Par suite, l'électricité, répandue sur une petite aire prise sur la surface, sera soumise à l'action d'une force tendant à l'éloigner du conducteur et proportionnelle au produit de la force résultante et de la densité, c'est-à-dire au carré de la force résultante.

Cette force, qui agit sur chaque partie du conducteur comme une tension dirigée vers le dehors, est appelée *tension électrique*. On la mesure, comme une tension mécanique ordinaire, par la force exercée sur l'unité de surface.

---

(1) [Tout ce paragraphe manque de rigueur. On suppose démontré : 1° qu'autour d'un conducteur le potentiel croît ou décroît suivant le signe de sa charge, ce qui sera établi § 80; 2° qu'il n'y a pas, dans l'intérieur d'un conducteur creux, un point où le potentiel passe par un maximum ou un minimum. (P.)]

Le mot de *tension* a été employé par des électriciens dans plusieurs sens mal définis; on a essayé de l'employer dans le langage mathématique comme synonyme de potentiel; mais, après avoir examiné les cas dans lesquels on a employé ce mot, je crois qu'il est plus conforme à l'usage et aux analogies mécaniques d'entendre par tension une force de traction s'exerçant à raison de tant de livres par pouce carré sur la surface du conducteur, ou en tout autre endroit. Nous verrons que l'idée émise par Faraday, que cette tension existe non seulement à la surface du conducteur, mais aussi tout le long des lignes de force, nous amène à concevoir l'action électrique comme un phénomène de déformation d'un milieu.

Force électromotrice.

49. Lorsque deux conducteurs à des potentiels différents sont reliés par un fil conducteur fin, la tendance de l'électricité à s'écouler le long du fil a pour mesure la différence des potentiels des deux corps. Pour cette raison, on appelle *force électromotrice entre deux points* la différence des potentiels en ces points.

La force électromotrice ne peut pas toujours être exprimée sous forme d'une différence de potentiels, mais nous ne traitons pas de ces cas particuliers en électricité statique. Nous les examinerons quand nous en viendrons aux circuits hétérogènes, aux actions chimiques, aux mouvements des aimants, aux inégalités de température, etc.

Capacité d'un conducteur.

50. Si un conducteur est isolé, tandis que l'on maintient tous les conducteurs voisins au potentiel zéro en les mettant en communication avec la Terre, et si ce conducteur, chargé de la quantité E d'électricité, prend le potentiel V, le rapport de E à V est appelé *capacité du conducteur*. Si le conducteur est entièrement renfermé dans un vase conducteur qu'il ne touche pas, sa charge est égale et opposée à celle de la face interne du conducteur extérieur, et égale à sa capacité multipliée par la différence des potentiels des deux conducteurs.

Accumulateurs électriques.

Un système formé de deux conducteurs, dont les surfaces en regard sont séparées par une couche mince d'un milieu isolant, est appelé un *accumulateur électrique*. On appelle *électrodes* les deux conducteurs,

et *diélectrique* le milieu isolant. Sa capacité est proportionnelle à l'aire des surfaces en regard, et inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche qui les sépare. Une bouteille de Leyde est un accumulateur dans lequel le verre sert de milieu isolant. Les accumulateurs sont quelquefois appelés *condensateurs;* mais je préfère réserver le terme de *condensateur* pour un instrument servant, non pas à contenir de l'électricité, mais à accroître sa densité superficielle.

PROPRIÉTÉS DES CORPS RELATIVEMENT A L'ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

Résistance au passage de l'électricité à travers un corps.

51. Lorsqu'une charge d'électricité est communiquée à une partie d'une masse de métal, l'électricité se répand rapidement des points où le potentiel est élevé aux points où le potentiel est bas, et cela, jusqu'à ce que le potentiel soit devenu le même dans toute la masse. Dans le cas des morceaux de métal qui servent dans les expériences ordinaires, cette opération est terminée dans un temps trop court pour qu'on puisse l'observer; mais, dans le cas de fils très longs et minces, comme ceux qui servent dans les télégraphes, le potentiel ne devient uniforme qu'au bout d'un temps appréciable, à cause de la résistance que le fil oppose au passage de l'électricité.

La résistance au passage de l'électricité est extrêmement différente pour les diverses substances, ainsi qu'on peut le voir par les Tables des § 362, 366, 369, qui seront expliquées lorsqu'on traitera des *Courants électriques.*

Tous les métaux sont bons conducteurs; cependant la résistance du plomb est douze fois celle du cuivre ou de l'argent, celle du fer six fois, celle du mercure soixante fois celle du cuivre. La résistance de tous les métaux croît lorsque leur température s'élève.

Un grand nombre de liquides conduisent l'électricité par électrolyse. Ce mode de conduction sera étudié dans la deuxième Partie. Pour l'instant, nous pouvons considérer tous les liquides contenant de l'eau, et tous les corps humides, comme des conducteurs, bien inférieurs aux métaux, mais incapables cependant de tenir une charge d'électricité isolée pendant un temps appréciable.

D'autre part, les gaz pris à la pression atmosphérique, secs ou humides, sont, pour de faibles tensions électriques, des isolants si voisins de la perfection, que l'on n'a rien pu observer jusqu'ici qui indique que l'électricité puisse les traverser par voie de conduction

ordinaire. La perte graduelle de la charge des corps électrisés peut, dans tous les cas, être attribuée à un isolement imparfait par les supports, soit que l'électricité traverse la substance du support, soit qu'elle fuie le long de la surface. Par suite, si deux corps électrisés sont suspendus l'un près de l'autre, ils devront garder leurs charges plus longtemps s'ils sont électrisés en sens inverses que s'ils ont des charges de même nature. En effet, quoique la force électromotrice qui tend à faire passer l'électricité d'un corps sur l'autre à travers l'air soit bien plus grande quand les charges sont contraires, il ne se produit point dans ce cas de perte appréciable. La perte se produit par les supports, et la force électromotrice qui pousse l'électricité à travers les supports est plus grande, quand les charges sont de même nature; et ce résultat ne paraît anormal que si l'on attribue la perte au passage de l'électricité à travers l'air qui sépare les corps.

Le passage de l'électricité à travers les gaz se produit d'ordinaire par voie de décharge disruptive, et ne commence pas avant que la force électromotrice ait atteint une certaine valeur. La valeur de la force électromotrice qui peut être développée dans un diélectrique, sans qu'il se produise de décharge, est appelée *force électrique du diélectrique*. La force électrique de l'air diminue à mesure que la pression diminue, depuis la pression atmosphérique jusqu'à environ 3^{mm} de mercure. Si l'on continue de diminuer la pression, la force électrique augmente rapidement; et si la raréfaction est poussée jusqu'aux dernières limites que nous sachions atteindre jusqu'à ce jour, la force électromotrice nécessaire pour donner une étincelle d'un quart de pouce est plus grande que celle qui donnerait une étincelle de 8 pouces dans l'air, à la pression ordinaire.

Ainsi donc le vide, c'est-à-dire ce qui reste dans un vase après que nous en avons enlevé tout ce que nous pouvons retirer, constitue un isolant de très grande force électrique.

La force électrique de l'hydrogène est bien moindre que celle de l'air.

Certaines sortes de verre sont, à froid, des isolants d'une merveilleuse perfection : Sir W. Thomson a pu garder pendant des années des charges d'électricité dans des ampoules hermétiquement closes. Le même verre devient conducteur à une température inférieure à celle de l'eau bouillante.

La gutta-percha, le caoutchouc, la vulcanite, la paraffine, les résines sont de bons isolants : la résistance de la gutta-percha à 75° F. est d'environ 6×10^{19} fois celle du cuivre.

La glace, les cristaux, les électrolytes solidifiées sont aussi des isolants.

Certains liquides, comme le pétrole, la térébenthine, quelques huiles, sont aussi des isolants, mais inférieurs à la plupart des isolants solides.

DIÉLECTRIQUES.

Pouvoir inducteur spécifique.

52. Faraday a appelé *diélectriques* tous les corps dont le pouvoir isolant est tel que, si on les place entre deux conducteurs à des potentiels différents, la force électromotrice qui agit sur ces conducteurs ne distribue pas immédiatement leurs électricités, de façon à ramener le potentiel à la même valeur.

Il résulte des recherches encore inédites de Cavendish (1) que, antérieurement à 1773, il avait mesuré la capacité de plateaux de verre, de résine, de cire et de gomme-laque, et qu'il avait déterminé dans quel rapport ces capacités sont plus grandes que celles de lames d'air de mêmes dimensions.

Faraday, à qui ces travaux étaient inconnus, a découvert que la capacité d'un accumulateur dépend de la nature du milieu isolant placé entre les deux conducteurs, aussi bien que des dimensions et de la position relative des conducteurs eux-mêmes. En substituant à l'air d'autres substances comme diélectriques d'un accumulateur qu'on ne changeait en aucun autre point, il a trouvé que la capacité de l'accumulateur reste la même quand on prend pour milieu isolant l'air ou un autre gaz, mais que cette capacité augmente dans un rapport différent pour chaque substance, lorsque l'on substitue à l'air de la gomme-laque, du soufre, du verre, etc.

Grâce à une méthode de mesure plus sensible, *Boltzmann* a réussi à observer la variation du pouvoir inducteur spécifique des gaz à différentes pressions.

Cette propriété des diélectriques, que Faraday appelait *pouvoir inducteur spécifique*, est aussi désignée sous le nom de *constante diélectrique de la substance*. Par définition, c'est le rapport des capacités d'un accumulateur, quand il a pour diélectrique la substance donnée ou le vide.

Si le diélectrique n'est pas un bon isolant, il est difficile de mesurer

(1) [Ces recherches ont été publiées depuis par Maxwell, sous le titre de : *The electrical Researches of the honourable Henry Cavendish.*]

sa capacité inductive spécifique, parce que l'accumulateur ne garde pas sa charge assez longtemps pour qu'on puisse la mesurer ; mais il est certain que la capacité inductive n'est pas une propriété spéciale aux bons isolants, et il est probable qu'elle existe chez tous les corps.

Absorption de l'électricité.

53. Dans des accumulateurs formés de certains diélectriques, on a observé les phénomènes suivants :

Un accumulateur qui, après avoir été électrisé pendant quelque temps, est déchargé brusquement, puis isolé de nouveau, manifeste une charge de même sens que la première, mais moins énergique ; en sorte que l'on peut en tirer encore plusieurs décharges successives qui vont toujours en diminuant. Ce phénomène est appelé *décharge résiduelle*.

La décharge instantanée paraît être toujours proportionnelle à la différence des potentiels des armatures au moment de la décharge, et le rapport de ces quantités est la capacité vraie de l'accumulateur ; mais si l'on prolonge le contact de l'excitateur assez longtemps pour englober une partie de la décharge résiduelle, la capacité apparente de l'accumulateur, calculée d'après la décharge ainsi observée, sera trop grande.

L'accumulateur qui a été chargé, puis isolé, paraît perdre sa charge par conduction ; mais on trouve que cette déperdition est en proportion bien plus forte au commencement que plus tard, et que, par suite, une mesure de la conductibilité déduite de ce qui se produit dans les premiers moments serait bien trop forte. Ainsi, quand on fait l'essai d'isolement d'un câble sous-marin, l'isolement semble s'améliorer à mesure que l'électrisation se prolonge.

Des phénomènes thermiques, qui paraissent analogues à première vue, se produisent, dans le cas de la propagation de la chaleur, à travers un corps dont les côtés opposés sont maintenus à des températures différentes. Dans le cas de la chaleur, nous savons que ces phénomènes sont dus à la chaleur absorbée et cédée par le corps lui-même. On a donc supposé, dans le cas des phénomènes électriques, que l'électricité est absorbée et restituée par les parties du corps. Nous verrons toutefois, au § 329, que ces phénomènes peuvent s'expliquer sans l'hypothèse de l'absorption de l'électricité, si l'on suppose que le diélectrique ne soit pas entièrement homogène.

Ce phénomène, que l'on appelle l'*absorption électrique*, n'est pas une absorption effective d'électricité par le corps : on peut le faire voir

en chargeant le corps d'une manière quelconque, pendant qu'il est renfermé dans un vase métallique fermé et isolé. Si, lorsque le corps a été chargé et isolé, le vase est déchargé pendant un instant, puis isolé de nouveau, il ne reçoit plus aucune charge pendant que se dissipe graduellement l'électrisation du corps chargé qu'il renferme.

54. C'est ce fait qu'exprime cet énoncé de Faraday : *il est impossible de communiquer à la matière une charge absolue et indépendante d'une seule espèce d'électricité* (1).

En fait, de toutes les expériences qui ont été tentées, il ressort que, quelles que soient les actions électriques qui se produisent dans un système de corps entourés d'un vase métallique, la charge sur la surface extérieure du vase ne change pas.

Or, si une quantité d'électricité, quelle qu'elle soit, pouvait pénétrer dans le corps et être absorbée par lui, ou y devenir latente, ou y exister à un état quelconque, sans être reliée par des lignes d'induction à une quantité égale d'électricité contraire; ou si, après avoir été absorbée, elle pouvait revenir à la surface et retourner à son mode d'action ordinaire, nous trouverions des changements dans l'électrisation du vase extérieur.

Et puisque jamais on ne trouve rien de pareil, Faraday conclut qu'il est impossible de communiquer à de la matière une charge absolue, et que jamais aucun changement d'état ne peut, dans aucune portion de matière, produire ou dissimuler l'une ou l'autre espèce d'électricité. Par suite, il regardait l'induction « comme la fonction essentielle et pour la production initiale de l'électricité, et pour les phénomènes ultérieurs ». Pour lui, « l'induction » est (1298) un état de polarisation des molécules du diélectrique, dans lequel chaque molécule est positive d'un côté et négative de l'autre, les électrisations positive et négative étant toujours exactement égales sur chaque molécule.

Décharge disruptive (2).

55. Si la force électromotrice qui agit en un point d'un diélectrique croît graduellement, elle atteint finalement une limite pour laquelle il se produit à travers le diélectrique une décharge électrique brusque, généralement accompagnée de lumière et de bruit, ainsi que d'une rupture temporaire ou permanente du diélectrique.

---

(1) *Exp. Res.*, vol. I, série XI, § II (*On the absolute charge of matter*); et 1144.

(2) *Voir* Faraday, *Exp. Res.*, vol. I, séries XII et XIII.

L'intensité de la force électromotrice pour laquelle cette décharge se produit est la mesure de ce que nous pouvons appeler la *force électrique du diélectrique*. Elle dépend de la nature du diélectrique; elle est plus grande pour l'air dense que pour l'air raréfié, plus grande pour le verre que pour l'air; mais, dans tous les cas, si la force électromotrice devient suffisamment grande, le diélectrique cède, et son pouvoir isolant est détruit, en sorte qu'il est traversé par un courant d'électricité. C'est pour cela que des distributions d'électricité qui donneraient en un point quelconque une force résultante infinie ne peuvent exister dans la nature.

L'effluve électrique.

Par exemple, si l'on électrise un conducteur présentant une pointe aiguë, la théorie, fondée sur l'hypothèse que le conducteur garde sa charge, nous amène à cette conclusion que, à mesure qu'on approche de la pointe, la densité superficielle de l'électricité va croissant sans limite, et qu'à la pointe elle-même la densité superficielle et, par suite, la force électrique résultante deviennent infinies. Si l'air, ou tout autre milieu environnant le corps, avait un pouvoir isolant absolu, ce résultat se présenterait effectivement; mais, en réalité, dès que la force résultante a atteint une certaine limite dans le voisinage de la pointe, le pouvoir isolant de l'air devient insuffisant, et l'air devient conducteur aux environs de la pointe. A une certaine distance de la pointe, la force résultante n'est plus suffisante pour vaincre la résistance de l'air : le courant électrique est alors arrêté, et l'électricité s'accumule dans l'air autour de la pointe.

Cette pointe est donc environnée de molécules d'air chargées de la même espèce d'électricité qu'elle-même. L'effet de cet air chargé entourant la pointe est de soulager l'air, qui est à la pointe même, d'une partie de cette force électromotrice énorme à laquelle il serait soumis si le conducteur seul était électrisé. En fait, la surface du corps électrisé n'est plus pointue; car la pointe est entourée d'une masse arrondie d'air électrisé, dont la surface, plutôt que celle du conducteur solide, peut être regardée comme formant la surface extérieure du conducteur.

Si cette portion d'air électrisé pouvait être maintenue au repos, le corps électrisé conserverait sa charge, sinon sur lui-même, du moins dans son voisinage. Mais les molécules d'air électrisé, libres de se mouvoir sous l'action de la force électrique, tendent à s'éloigner du corps électrisé, puisqu'il est chargé d'électricité de même espèce. Les molé-

cules d'air électrisé tendent donc à s'éloigner suivant la direction des lignes de force, et à s'approcher des corps environnants qui sont chargés d'électricité de nom contraire. Quand elles sont parties, d'autres molécules d'air non électrisées prennent leur place autour de la pointe; et, puisque celles-ci ne peuvent plus garantir celles qui sont placées à la pointe même d'une tension électrique excessive, une nouvelle décharge se produit, après laquelle les molécules qui viennent d'être électrisées s'éloignent; et ainsi de suite, tant que le corps reste électrisé.

De cette façon, il se produit les phénomènes suivants :

A la pointe et à côté d'elle, il y a une effluve permanente due aux décharges continuelles qui se produisent entre la pointe et l'air qui est dans son voisinage immédiat.

Les molécules d'air électrisé, tendant à s'éloigner dans la même direction générale, produisent un courant d'air partant de la pointe, formé par les molécules d'air électrisé, et probablement par d'autres encore entraînées par les premières. En favorisant, par un moyen artificiel, ce courant d'air, nous pouvons augmenter l'effluve; nous l'empêcherons de continuer, si nous faisons obstacle à la formation du courant (1).

Le *vent* électrique est quelquefois très rapide dans le voisinage de la pointe, mais il perd bientôt sa vitesse, et l'air avec ses molécules électrisées est entraîné dans les mouvements généraux de l'atmosphère, formant un nuage électrique invisible. Quand les molécules chargées arrivent près d'une surface conductrice, un mur par exemple, elles induisent sur cette surface une charge opposée à la leur et sont alors attirées vers le mur; mais, comme la force électromotrice est faible, elles peuvent rester longtemps sans être attirées jusqu'à sa surface et sans être déchargées. Elles forment ainsi une atmosphère électrique adhérente au conducteur, dont la présence peut quelquefois être reconnue au moyen de l'électromètre. Les forces électriques qui agissent entre de grandes masses d'air électrisé et les autres corps sont extrêmement faibles en comparaison des forces qui produisent les vents en raison des inégalités de densité dues aux différences de températures; il est donc très peu probable qu'une partie appréciable des mouvements des nuages orageux ordinaires soit due à des causes électriques.

---

(1) *Voir* PRIESTLEY, *Histoire de l'Électricité*, p. 117 et 591; et CAVENDISH, *Electrical researches* (*Phil. Trans.*, 1771, § 4); ou *Réimpression des Œuvres de Cavendish*, § 125.

Le transport de l'électricité d'un point à un autre, par le mouvement des molécules électrisées, est appelé la *convection électrique* ou la *décharge convective*.

L'effluve électrique est donc produite par un passage continu d'électricité à travers une petite quantité d'air dans laquelle la tension est très élevée; les molécules d'air environnantes sont ainsi chargées et entraînées par le vent électrique, qui est un élément essentiel du phénomène.

L'effluve s'établit plus aisément dans l'air raréfié que dans l'air dense, avec une pointe positive qu'avec une pointe négative. Cette différence et plusieurs autres, entre l'électricité positive et l'électricité négative, doivent être étudiées par ceux qui désirent découvrir quelque chose relativement à la nature de l'électricité. On ne les a point encore ramenées d'une façon satisfaisante à aucune des théories existantes.

L'aigrette électrique.

56. L'aigrette électrique est un phénomène que l'on peut produire en électrisant une pointe mousse, ou une petite boule, de manière à produire un champ électrique dans lequel la tension diminue quand on s'éloigne de la surface, mais d'une façon moins rapide que dans le cas précédent. Elle consiste en une succession de décharges, qui vont en se ramifiant et en divergeant de la boule dans l'air, et qui se terminent soit en chargeant certaines parties de l'air, soit en atteignant un autre conducteur. Elle est accompagnée d'un son, dont la hauteur dépend des intervalles qui séparent les décharges successives, et il n'y a pas de courant d'air comme dans le cas de la lueur.

L'étincelle électrique.

57. Si la tension est considérable, dans tout l'espace qui sépare deux conducteurs, par exemple dans le cas de deux boules dont la distance n'est pas grande en comparaison de leurs rayons, la décharge, quand elle se produit, prend ordinairement la forme d'une étincelle, par laquelle presque toute l'électrisation se décharge d'un coup.

Dans ce cas, si une partie du diélectrique vient à céder, les parties qui sont, de part et d'autre, dans la direction de la force électrique, sont elles-mêmes mises dans un état de tension plus grande et cèdent également, et la décharge chemine tout droit à travers le diélectrique; de même, si l'on fait une petite entaille sur le bord d'une feuille de papier, et que l'on applique ensuite une tension dans la direction du

bord du papier, celui-ci se déchire et la déchirure, commençant à l'entaille, s'infléchit en suivant les points faibles du papier. C'est ainsi que l'étincelle électrique commence au premier point où la tension électrique triomphe de la résistance du milieu isolant, puis s'avance suivant un chemin irrégulier en apparence, qui, en fait, comprend les autres points faibles, tels que les grains de poussière flottant dans l'air.

Tous ces phénomènes diffèrent considérablement dans les divers gaz, et dans un même gaz à différentes densités. Quelques formes de décharge dans des gaz raréfiés sont tout à fait remarquables. Dans certains cas, il y a des alternances régulières de stries noires et lumineuses; ainsi, par exemple, lorsque de l'électricité passe le long d'un tube contenant très peu de gaz, on voit disposée, suivant l'axe du tube, à des intervalles à peu près égaux, une série de disques lumineux séparés par des stries obscures. Si l'on augmente la force du courant, il se produit un nouveau disque; et celui-là et les anciens se disposent en un ordre plus serré. Dans un tube décrit par M. Gassiott (1), la lumière de chaque disque est bleuâtre du côté négatif, rougeâtre du côté positif, et d'un rouge vif dans la partie centrale.

Ces phénomènes, et bien d'autres encore relatifs à la décharge électrique, sont extrêmement importants : lorsqu'ils seront mieux compris, ils jetteront sans doute une vive lumière sur la nature de l'électricité, ainsi que sur la nature des gaz et du milieu qui remplit l'espace. Mais, pour l'instant, il faut les regarder comme étant en dehors du domaine de la théorie mathématique de l'électricité.

Phénomènes électriques de la tourmaline.

58. Certains cristaux de tourmaline et d'autres minéraux possèdent ce que l'on appelle la *polarité électrique*. Supposons un cristal de tourmaline à une température uniforme, et paraissant libre de toute électricité à sa surface. Élevons maintenant la température, en laissant le cristal isolé. Nous trouvons qu'un des bouts du cristal prend une électrisation positive, et l'autre une électrisation négative. Enlevons de sa surface cette électrisation apparente au moyen d'une flamme ou de quelque autre manière : si l'on chauffe le cristal encore davantage, il apparaît une électrisation de même nature que la précédente; si on le refroidit, le côté qui était positif quand on échauffait le cristal devient négatif.

Ces électrisations s'observent aux extrémités de l'axe cristallogra-

(1) *Intellectual Observer*, mars 1866.

phique. Quelques cristaux sont terminés d'un bout par une pyramide à six faces, et de l'autre bout par une pyramide à trois faces. Dans ces cristaux, c'est le bout où est la pyramide à six faces qui devient positif quand on échauffe le cristal.

Sir W. Thomson suppose que chaque partie de ce cristal et de tout autre cristal hémiédrique a une polarité électrique définie, dont l'intensité dépend de la température. Quand on passe la surface dans une flamme, chacune de ses parties s'électrise juste assez pour neutraliser en tous les points extérieurs les effets de la polarité interne. Alors le cristal n'a pas d'action électrique extérieure, ni de tendance à changer l'état de son électrisation. Mais, si on le chauffe ou si on le refroidit, la polarité intérieure de chaque molécule du cristal est altérée et ne peut plus être équilibrée par l'électrisation superficielle : il y a donc une action extérieure résultante.

PLAN DE CET OUVRAGE.

59. Dans cet Ouvrage, je me propose d'exposer la théorie ordinaire des actions électriques, théorie qui les considère comme ne dépendant que des corps électrisés et des positions respectives de ces corps, et qui ne fait pas entrer en compte les phénomènes qui peuvent se produire dans le milieu environnant. Nous établirons ainsi la loi de l'inverse du carré des distances, la théorie du potentiel et les équations de Laplace et de Poisson. Nous considérerons ensuite les charges et les potentiels d'un système de corps électrisés; et, des équations qui les lient, équations dont on peut toujours supposer que les coefficients aient été déterminés par expérience dans les cas où les méthodes mathématiques actuelles ne sont pas applicables, nous déduirons les forces mécaniques qui agissent entre les différents corps électrisés.

Nous étudierons ensuite certains théorèmes généraux, au moyen desquels Green, Gauss et Thomson ont montré comment on peut résoudre les problèmes de distribution électrique. Un des résultats de ces théorèmes est que, si l'équation de Poisson est satisfaite par une certaine fonction qui, à la surface de chacun des conducteurs, a pour valeur la valeur du potentiel de ce conducteur, cette fonction représente en tout point le potentiel du système. Nous en déduirons aussi une méthode pour résoudre les problèmes susceptibles d'une solution exacte.

Dans le théorème de Thomson, l'énergie totale d'un système s'exprime par l'intégrale d'une certaine quantité prise dans tout l'espace

compris entre les corps électrisés, ou par une autre intégrale qui ne s'étend qu'aux surfaces électrisées. L'égalité de ces deux quantités peut recevoir l'interprétation physique suivante : On peut concevoir la relation physique qui existe entre les corps électrisés, soit comme effet de l'état dans lequel se trouve le milieu qui sépare les corps, soit comme résultat d'une action directe s'exerçant à distance entre les corps. Si nous adoptons cette dernière idée, nous pouvons déterminer la loi de l'action, mais nous ne pouvons pousser plus loin nos spéculations sur la cause de cette action. Si, au contraire, nous acceptons l'idée d'une action s'exerçant par l'entremise d'un milieu, nous sommes conduits à rechercher la nature de cette action en chaque point du milieu.

Il ressort de ce théorème que, si nous voulons voir le siège de l'action électrique dans les différentes parties du milieu diélectrique, l'énergie d'une petite partie de ce milieu doit dépendre du produit du carré de l'intensité de la force électromotrice résultante en ce point multiplié par un coefficient que l'on appelle *pouvoir inducteur spécifique du milieu*.

Cependant, considérant la théorie des diélectriques au point de vue le plus général, il vaut mieux faire une distinction entre l'intensité électromotrice en un point et la polarisation électrique du milieu en ce point : en effet, dans certaines substances solides, ces deux quantités dirigées, quoique liées l'une à l'autre, n'ont pas la même direction. L'expression la plus générale de l'énergie électrique pour l'unité de volume du milieu est le demi-produit de l'intensité électromotrice et de la polarisation électrique par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions.

Dans tous les diélectriques fluides, l'intensité électromotrice et la polarisation électrique sont dans la même direction et dans un rapport constant.

Si nous calculons, dans cette hypothèse, l'énergie totale du milieu, nous la trouvons égale à l'énergie qui serait due à l'électrisation des conducteurs dans l'hypothèse d'une action directe à distance. Donc, au point de vue mathématique, les deux hypothèses sont équivalentes.

Si nous examinons alors l'état mécanique du milieu, dans l'hypothèse que l'action mécanique observée entre les corps électrisés s'exerce au travers et par l'entremise d'un milieu ; comme dans les exemples familiers où un corps agit sur un autre par l'intermédiaire d'une corde tendue, ou d'une tige comprimée, nous trouvons que le milieu doit être dans un état de déformation mécanique.

Ainsi que l'a indiqué Faraday (1), cette déformation consiste en une extension dirigée suivant les lignes de force, combinée à une compression égale suivant toutes les directions perpendiculaires à ces lignes. La grandeur de ces déformations est proportionnelle à l'énergie de l'électrisation par unité de volume, ou, en d'autres termes, au carré de la force électromotrice résultante multiplié par la capacité inductive spécifique du milieu.

Cette distribution de pressions et de tensions est la seule qui s'accorde avec les actions mécaniques observées entre les corps électrisés, et avec l'équilibre que l'on observe également dans le fluide diélectrique qui entoure les corps électrisés. J'ai donc pensé que les règles de la recherche scientifique m'autorisaient à faire ce pas, à admettre l'existence effective de cet état de déformation, et à suivre cette hypothèse dans ses conséquences. Trouvant que le mot de *tension électrique* a été employé dans plusieurs sens mal définis, j'ai essayé de le réserver exclusivement pour cette conception que je crois avoir été dans l'idée de plusieurs de ceux qui ont fait usage de ce terme, pour cet état de déformation du milieu diélectrique qui produit le mouvement des corps électrisés, et qui, constamment accru, conduit à la décharge disruptive. Dans ce sens, la tension électrique est une tension de nature absolument semblable à la tension d'une corde et peut se mesurer de la même façon; et, le milieu diélectrique pouvant supporter une certaine tension, mais non une plus considérable, on peut dire qu'il a une certaine force, exactement dans le même sens où l'on dit qu'une corde a une certaine force. Ainsi, par exemple, Thomson a trouvé qu'à la température et à la pression ordinaire l'air peut supporter une tension électrique de 9600 grains par pied carré avant de laisser passer une étincelle (2).

60. De l'hypothèse que l'action électrique n'est pas une action directe s'exerçant à distance entre les corps, mais qu'elle s'exerce par l'intermédiaire du milieu qui est entre les corps, nous avons déduit que ce milieu devait être dans un état de déformation. Nous avons aussi déterminé la nature de cette déformation, et nous l'avons comparée à celles qui peuvent se présenter dans des corps solides. Le long des lignes de force, il y a une tension; perpendiculairement à ces

(1) *Exp. Res.*, série XI, 1297.

(2) [Le *grain* valant 0,06479895 grammes et le *pied* 30,479449 centimètres, la tension de 9600 grains par pied carré correspond à 0,669615 grammes ou 657 dynes par centimètre carré.]

lignes, il y a une pression; les valeurs numériques de ces deux forces sont égales, et chacune d'elles est proportionnelle au carré de la force résultante au point considéré. Après avoir établi ces résultats, nous sommes préparés pour faire un nouveau pas, et nous former une idée de la nature de la polarisation électrique dans le milieu diélectrique.

On peut dire qu'un élément d'un corps est polarisé, quand il acquiert des propriétés égales et contraires sur deux faces opposées. La notion de polarité interne peut être étudiée avec grand avantage dans l'exemple que nous fournissent les aimants permanents; nous l'expliquerons plus au long quand nous en viendrons à traiter du Magnétisme.

La polarisation électrique du diélectrique est un état de déformation dans lequel le corps est jeté par l'action de la force électromotrice, et qui disparaît en même temps que cette force même. Nous pouvons concevoir qu'il consiste en ce que l'on peut appeler un *déplacement* électrique produit par l'intensité électromotrice. Lorsqu'une force électromotrice agit sur un milieu conducteur, elle y produit un courant; mais si le milieu est un non-conducteur ou diélectrique, le courant ne peut s'établir à travers le milieu: l'électricité néanmoins est déplacée dans le milieu, dans la direction de la force électromotrice, et l'étendue de ce déplacement dépend de la grandeur de la force électromotrice; en sorte que, si la force électromotrice augmente ou diminue, le déplacement électrique augmente ou diminue dans le même rapport.

La grandeur du déplacement a pour mesure la quantité d'électricité qui traverse l'unité de surface, pendant que le déplacement croît de zéro à sa valeur maximum. Telle est, par suite, la mesure de la polarisation électrique.

L'analogie entre l'action d'une force électromotrice qui produit un déplacement électrique et celle d'une force mécanique ordinaire qui déplace un corps élastique est si évidente, que je me suis risqué à appeler *coefficient d'élasticité électrique du milieu* le rapport de la force électromotrice au déplacement électrique correspondant. Ce coefficient est différent pour les différents milieux, et varie en raison inverse du pouvoir inducteur spécifique de chaque milieu.

Les variations de déplacement électrique produisent évidemment des courants électriques. Mais ces courants ne peuvent exister que pendant que le déplacement varie, et, par suite, le déplacement ne pouvant dépasser une certaine valeur sans produire une décharge disruptive, ils ne peuvent continuer indéfiniment dans la même direction, comme font les courants dans les conducteurs.

Il est probable qu'il existe dans la tourmaline et les autres cristaux pyro-électriques un état de polarisation électrique, qui dépend de la température et qui ne demande pas pour se produire une force électromotrice extérieure. Si l'intérieur d'un corps est dans un état de polarisation électrique permanent, l'extérieur devra peu à peu se charger de manière à neutraliser sur tous les points extérieurs au corps l'action de l'électrisation intérieure. Cette charge extérieure superficielle ne pourra être décelée par aucune des épreuves ordinaires, ni être enlevée par aucun des moyens qui servent habituellement à enlever une charge superficielle. La polarisation intérieure du corps ne pourra donc être découverte que par un moyen, un changement de température par exemple, qui permette d'augmenter ou de diminuer la polarisation intérieure. Alors l'électrisation superficielle ne suffira plus à neutraliser au dehors l'action de la polarisation intérieure, et l'on observera une électrisation apparente, comme dans le cas de la tourmaline.

Si une charge e est uniformément répartie sur la surface d'une sphère, la force résultante en un point quelconque du milieu qui entoure la sphère est numériquement égale à la charge e divisée par le carré de la distance du point au centre de la sphère. D'après notre théorie, cette force résultante donne lieu à un déplacement d'électricité dans une direction s'éloignant de la sphère.

Traçons maintenant une surface sphérique concentrique de rayon r; le déplacement total E à travers cette surface sera proportionnel à la force résultante multipliée par l'aire de la surface sphérique. Mais la force résultante est proportionnelle à la charge e, et inversement proportionnelle au carré du rayon, tandis que l'aire est proportionnelle au carré du rayon.

Donc le déplacement total E est proportionnel à la charge e, et indépendant du rayon.

Pour déterminer le rapport de la charge e et de la quantité d'électricité E déplacée à travers la surface sphérique vers le dehors d'une surface sphérique, considérons le travail effectué dans le milieu, dans la région comprise entre deux surfaces sphériques concentriques, pendant que le déplacement augmente de E à $E + \delta E$. Si V_1 et V_2 désignent respectivement les potentiels de la surface intérieure et de la surface extérieure, la force électromotrice qui produit le déplacement additionnel est $(V_1 - V_2)$, en sorte que le travail dépensé pour augmenter le déplacement est $(V_1 - V_2)\delta E$.

Si maintenant nous faisons coïncider la surface de la sphère intérieure avec celle de la sphère électrisée, et si nous faisons le rayon de

l'autre infini, V_1 devient V, le potentiel de la sphère, et V_2 devient nul : le travail total effectué dans le milieu est donc $V\delta E$.

Mais, d'après la théorie ordinaire, le travail effectué pour augmenter la charge est $V\delta e$; et si, comme nous le supposons, il est dépensé à augmenter le déplacement, $\delta E = \delta e$, et, puisque E et e s'annulent à la fois, $E = e$, c'est-à-dire que

Le déplacement vers l'extérieur à travers une surface sphérique quelconque concentrique à la sphère électrisée est égal à la charge de cette sphère.

Pour fixer nos idées sur le déplacement électrique, considérons un accumulateur formé de deux plateaux conducteurs A et B, séparés par une couche de diélectrique C. Soit W un fil conducteur joignant A et B, et supposons que, par l'action d'une force électromotrice, une quantité Q d'électricité positive soit transportée de B vers A. L'électrisation positive de A et l'électrisation négative de B produisent une certaine force électromotrice agissant de A vers B dans la couche diélectrique, et cette force électromotrice produit un déplacement électrique de A vers B dans le diélectrique. La grandeur de ce déplacement, mesurée par la quantité d'électricité chassée à travers une section idéale qui partagerait le diélectrique en deux couches, sera, d'après notre théorie, exactement égale à Q. (*Voir* § 75, 76 et 111.)

On voit donc que, en même temps qu'une quantité d'électricité Q est transportée par la force électromotrice le long du fil de B en A, en traversant toutes les sections du fil, une quantité égale d'électricité traverse toutes les sections du diélectrique de A vers B, en vertu du déplacement électrique.

Les mouvements d'électricité inverse se produiront pendant la décharge de l'accumulateur. Dans le fil, la décharge est Q de A vers B; dans le diélectrique, le déplacement s'arrête, et une quantité Q traverse toutes les sections de B vers A.

Tous les cas d'électrisation et de décharge peuvent donc être considérés comme des mouvements s'exécutant dans un circuit fermé tel, qu'au même instant, il passe dans chaque section la même quantité d'électricité; il en est ainsi, non seulement dans le circuit voltaïque, pour lequel la chose avait toujours été reconnue, mais aussi dans les cas où l'on supposait généralement que l'électricité s'accumulait en certains points.

61. Nous sommes ainsi conduits à une conséquence très remarquable de la théorie que nous examinons; à savoir que les mouvements

de l'électricité sont semblables à ceux d'un fluide incompressible, en sorte que la quantité totale contenue à l'intérieur d'une surface fermée fictive déterminée reste toujours la même. Ce résultat paraît, à première vue, en contradiction directe avec ce fait que l'on peut charger un conducteur, puis l'introduire dans un espace clos et changer ainsi la quantité d'électricité contenue dans cet espace. Mais nous devons nous rappeler que la théorie ordinaire ne tient pas compte du déplacement électrique à travers les substances diélectriques, et qu'elle borne son attention à l'électrisation des surfaces qui séparent les conducteurs et les diélectriques. Dans le cas d'un conducteur chargé, supposons la charge positive; alors, si le diélectrique environnant s'étend de toutes parts autour de la surface fermée, il y aura polarisation électrique et déplacement du dedans vers le dehors sur toute l'étendue de la surface fermée; et l'intégrale du déplacement, prise sur toute la surface, est égale à la charge du conducteur renfermé dans la surface.

Ainsi, quand le conducteur chargé est introduit dans l'espace clos, il y a aussitôt déplacement du dedans vers le dehors à travers la surface, d'une quantité d'électricité égale à la charge, en sorte que la quantité totale d'électricité contenue dans la surface reste la même.

La théorie de la polarisation électrique sera discutée plus longuement au Chapitre V, et l'on en donnera au § 334 une représentation mécanique; mais son importance ne pourra être bien comprise que quand nous en viendrons à l'étude des phénomènes électromagnétiques.

62. Les traits particuliers de la théorie que nous venons de développer sont les suivants :

L'énergie de l'électrisation réside dans le milieu diélectrique, que ce milieu soit solide, liquide ou gazeux, dense, rare ou même entièrement privé de matière pondérable, pourvu qu'il soit toujours susceptible de transmettre l'action électrique.

L'énergie est emmagasinée en chaque point du milieu sous la forme d'un état de déformation appelé *polarisation électrique,* dont la grandeur dépend de la force électromotrice résultante en ce point.

La force électromotrice agissant sur un diélectrique produit ce que nous avons appelé *déplacement électrique;* la relation entre la force et le déplacement, dans le cas le plus général, sera étudiée plus loin en traitant de la conduction; mais, dans les cas les plus importants, le déplacement est dans la même direction que la force, et, numéri-

quement, est égal à l'intensité multipliée par $\frac{1}{4\pi}K$, où K est le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

L'énergie due à la polarisation électrique est égale, pour l'unité de volume du diélectrique, à la moitié du produit de l'intensité électromotrice par le déplacement électrique, et, s'il y a lieu, par le cosinus de l'angle de leurs directions.

Dans les diélectriques fluides, la polarisation électrique est accompagnée d'une tension suivant la direction des lignes d'induction, et d'une pression égale suivant toutes les directions perpendiculaires aux lignes d'induction, la grandeur de cette tension ou pression rapportée à l'unité de surface étant numériquement égale à l'énergie par unité de volume, au même point.

Si nous supposons le volume du diélectrique divisé en parties élémentaires, nous devons concevoir les surfaces de ces éléments comme électrisées, de telle manière que la densité superficielle en un point quelconque de la surface soit égale en grandeur au déplacement qui se produit en ce point à travers la surface, *ce déplacement compté vers l'intérieur;* c'est-à-dire que, si le déplacement a lieu dans la direction positive, la surface de l'élément doit être électrisée négativement du côté positif, et positivement du côté négatif. Ces charges superficielles se détruisent en général l'une l'autre lorsque l'on considère des éléments consécutifs, sauf aux points où le diélectrique a une charge interne, ou à la surface du diélectrique.

Quelle que soit la nature de l'électricité, et quoi que nous entendions par mouvement d'électricité, le phénomène que nous avons appelé *déplacement électrique* est un mouvement d'électricité, dans le même sens que le transport d'une quantité déterminée d'électricité à travers un fil est un mouvement d'électricité. La seule différence est que dans le diélectrique il y a une force, que nous avons appelée *élasticité électrique,* qui s'oppose au déplacement électrique et qui ramène l'électricité en arrière aussitôt que la force électromotrice est supprimée; au contraire, dans un fil conducteur, l'élasticité électrique est constamment surmontée, en sorte qu'il s'établit un courant de conduction proprement dit, et que la résistance dépend, non de la quantité totale d'électricité déplacée de sa position d'équilibre, mais de la quantité qui traverse une section du conducteur dans un temps donné.

Dans tous les cas, le mouvement de l'électricité est soumis à la même condition que celui d'un fluide incompressible, c'est-à-dire qu'à chaque instant il doit entrer dans un espace fermé quelconque autant d'électricité qu'il en sort.

Il résulte de là que tout courant électrique doit former un circuit fermé. On verra l'importance de ce résultat quand nous étudierons les lois de l'électromagnétisme.

Puisque, comme nous l'avons vu, la théorie de l'action directe à distance est, au point de vue mathématique, identique à la théorie d'une action s'exerçant par l'intermédiaire d'un milieu, les phénomènes que l'on rencontre peuvent s'expliquer par une théorie aussi bien que par l'autre, à condition d'introduire des hypothèses convenables, quand on rencontre des difficultés. Ainsi, Mossotti a déduit la théorie mathématique des diélectriques de la théorie ordinaire de l'attraction, simplement en donnant une interprétation électrique au lieu d'une interprétation magnétique, aux symboles dont Poisson s'est servi pour déduire la théorie de l'induction magnétique de la théorie des fluides magnétiques. Il admet qu'il existe dans le diélectrique de petits éléments conducteurs, susceptibles d'avoir leurs extrémités électrisées en sens inverses par induction, mais incapables de gagner ou de perdre une quantité quelconque d'électricité, parce qu'ils sont isolés les uns des autres par un milieu non conducteur. Cette théorie des diélectriques cadre avec les lois de l'électricité; elle peut être effectivement vraie. Si elle est vraie, le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu peut être plus grand, mais jamais plus petit que celui de l'air ou du vide. Jusqu'à présent, on n'a pas trouvé d'exemple de diélectrique ayant un pouvoir inducteur plus faible que celui de l'air; si l'on en trouve un, il faudra abandonner la théorie de Mossotti, mais ses formules resteront toutes exactes, et nous n'aurons à y changer que le signe d'un coefficient.

Dans la théorie que je me propose de développer, les méthodes mathématiques sont fondées sur le plus petit nombre possible d'hypothèses; on trouve ainsi que des équations de même forme s'appliquent à des phénomènes qui sont certainement de nature bien différente : par exemple, l'induction électrique à travers les diélectriques, la conduction dans les conducteurs et l'induction magnétique. Dans tous ces cas, la relation entre la force et l'effet qu'elle produit s'exprime par une série d'équations de même espèce; de sorte, que si un problème est résolu pour un de ces sujets, le problème et sa solution peuvent être traduits dans le langage des autres sujets, et les résultats, sous leur nouvelle forme, seront encore vrais.

CHAPITRE II.

THÉORIE MATHÉMATIQUE ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉLECTRICITÉ STATIQUE.

Définition de l'électricité considérée comme quantité mathématique.

63. Nous avons vu que les propriétés des corps électrisés sont telles que la charge d'un corps peut être égale à celle d'un autre, ou à la somme des charges de deux autres corps ; que, lorsqu'on place en même temps à l'intérieur d'un vase conducteur fermé et isolé deux corps électrisés également et en sens contraires, ces corps n'ont point d'effet électrique sur les corps extérieurs. Tous ces résultats peuvent s'exprimer à la fois sous une forme concise, en disant qu'un corps électrisé est *chargé d'une certaine quantité d'électricité* que l'on peut désigner par e. Si la charge est positive, c'est-à-dire vitrée, suivant la convention habituelle, e sera une quantité positive. Si la charge est négative ou résineuse, e sera une quantité négative, et la quantité $-e$ peut s'interpréter soit comme une quantité négative d'électricité vitrée, soit comme une quantité positive d'électricité résineuse.

L'addition de deux charges d'électricité égales et contraires, $+e$ et $-e$, a pour effet de produire un état de non-électrisation représenté par zéro. Nous pouvons donc regarder un corps non électrisé comme virtuellement chargé de charges égales et opposées, de grandeur indéfinie ; et un corps électrisé, comme virtuellement chargé de quantités inégales d'électricité positive et d'électricité négative, la somme algébrique de ces charges constituant l'électrisation observée. Mais il est clair que cette manière d'envisager un corps électrisé est entièrement artificielle, et qu'elle peut se comparer à la façon dont nous considérons la vitesse d'un corps comme résultante de deux ou plusieurs vitesses différentes, dont aucune n'est la vitesse effective du corps.

DENSITÉ ÉLECTRIQUE.

Distribution dans l'espace.

64. *Définition.* — La densité électrique rapportée au volume, ou densité de volume, en un point donné de l'espace, est la limite du

rapport de la quantité d'électricité contenue à l'intérieur d'une sphère ayant le point pour centre ; au volume de cette sphère, quand le rayon de la sphère décroît indéfiniment.

Nous désignerons ce rapport par le symbole ρ, qui peut être positif ou négatif.

Distribution sur une surface.

C'est un résultat de la théorie aussi bien que de l'expérience que, dans certains cas, la charge d'un corps est tout entière à sa surface. La densité en un point de la surface, définie d'après la méthode précédente, serait infinie. Nous devons donc employer un autre procédé pour mesurer la densité rapportée à la surface.

Définition. — La densité électrique en un point donné d'une surface, ou densité superficielle, est la limite du rapport de la quantité d'électricité contenue dans une sphère, ayant ce point pour centre, à l'aire de la surface comprise à l'intérieur de la sphère, lorsque le rayon décroît indéfiniment.

Nous désignerons par le symbole σ la densité rapportée à la surface.

Les auteurs qui ont considéré l'électricité comme un fluide matériel, ou comme un assemblage de molécules, ont été obligés, dans le cas actuel, de supposer que l'électricité se distribue sur la surface sous forme de couche d'une certaine épaisseur 0 et d'une densité ρ_0, ρ_0 étant la valeur que prendrait ρ, si les molécules avaient entre elles le contact le plus étroit qui soit possible. Il est clair que dans cette théorie

$$\rho_0 0 = \sigma.$$

Dans cette théorie, quand σ est négatif, une certaine couche d'épaisseur 0 est laissée entièrement dépourvue d'électricité positive, et entièrement remplie d'électricité négative, ou, dans l'hypothèse d'un seul fluide, de matière ordinaire.

Mais l'expérience n'indique pas, ni que la couche électrique ait une épaisseur quelconque, ni que l'électricité soit un fluide ou un assemblage de molécules. Nous préférons donc ne point introduire de symbole pour l'épaisseur de la couche, et employer un symbole spécial pour la densité rapportée à la surface.

Distribution sur une ligne.

Il est quelquefois avantageux de supposer l'électricité distribuée sur une ligne, c'est-à-dire sur un corps long et mince, dont on néglige l'é-

paisseur. On peut alors définir la densité rapportée à la longueur, ou densité linéaire en un point, comme la limite du rapport de la charge distribuée sur un élément de la ligne à la longueur de cet élément, quand cet élément décroît indéfiniment.

Si λ représente la densité linéaire, la quantité totale d'électricité répandue sur la courbe sera

$$e = \int_0^s \lambda \, ds,$$

où ds est l'élément de courbe.

De même, si σ est la densité superficielle, la quantité totale d'électricité répandue sur la surface sera

$$e = \iint \sigma \, dS,$$

où dS est l'élément de surface.

Et si ρ est la densité de volume en un point de l'espace, la quantité totale d'électricité comprise dans un certain volume est

$$e = \iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

où $dx\,dy\,dz$ est l'élément de volume. Dans ces trois cas, les limites des intégrations sont celles de la ligne, de la surface, du volume considéré.

Il est clair que e, λ, σ et ρ sont des quantités d'espèces différentes, chacune d'elles ayant de moins que la précédente une dimension linéaire; en sorte que, si l est une ligne, les quantités e, $l\lambda$, $l^2\sigma$, et $l^3\rho$ sont toutes de même nature; et si $[L]$ est l'unité de longueur, et $[\lambda]$, $[\sigma]$, $[\rho]$ les unités des différentes espèces de densité, $[e]$, $[L\lambda]$, $[L^2\sigma]$, $[L^3\rho]$ représenteront toutes une unité d'électricité.

Définition de l'unité d'électricité.

65. Soient A et B deux points dont la distance est égale à l'unité de longueur. Soient deux corps, de dimensions petites en comparaison de la distance AB, chargés de quantités égales d'électricité positive, et placés respectivement en A et en B, et supposons que leurs charges soient telles que la force avec laquelle ils se repoussent l'un l'autre soit l'unité de force mesurée comme au § 6. On dit alors que la charge de chacun des corps est une unité d'électricité.

Si la charge du corps placé en B était une unité d'électricité négative, l'action qui s'exerce entre les corps changerait de sens, et nous

aurions une attraction égale à l'unité de force. Si la charge de A était aussi négative, et égale à l'unité, la force serait répulsive et égale à l'unité.

Puisque l'action qui s'exerce entre deux quantités d'électricité n'est pas modifiée par la présence d'autres quantités, la répulsion entre e unités d'électricité placées en A et e' placées en AB sera ee', la distance AB étant l'unité (*voir* § 39).

Loi de la force agissant entre les corps électrisés.

66. Coulomb a montré par l'expérience que la force qui agit entre des corps dont les dimensions sont petites en comparaison de leur écartement varie en raison inverse du carré de la distance. La répulsion entre deux pareils corps chargés des quantités e et e' et placés à la distance r est donc

$$\frac{ee'}{r^2}.$$

Nous montrerons au § 74 que cette loi est la seule qui soit compatible avec ce fait d'observation qu'un corps conducteur, placé à l'intérieur d'un conducteur creux et fermé, et mis en contact avec lui, perd toute charge d'électricité. Et, si nous sommes convaincus que la loi de l'inverse carré des distances est exacte, c'est sur des expériences de ce genre plutôt que sur les mesures directes de Coulomb que repose notre conviction.

Force résultante entre deux corps.

67. Pour calculer la force résultante qui agit entre deux corps, nous pouvons diviser chacun d'eux en éléments de volume et considérer les répulsions qui agissent entre l'électricité de chacun des éléments du premier corps et l'électricité de chacun des éléments du second. Nous aurons ainsi un système de forces, dont le nombre est égal au produit des nombres des éléments en lesquels nous avons divisé chacun des deux corps, et nous devrons composer les effets de ces forces d'après les règles ordinaires de la Statique. Ainsi, pour trouver la composante dans la direction des x, nous devrons trouver la valeur de l'intégrale sextuple

$$\int\int\int\int\int\int \frac{\rho\rho'(x-x')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point du premier corps où la

densité est ρ, et x', y', z', ρ' les quantités correspondantes pour le second corps, et où l'intégration doit être étendue d'abord à un des corps et ensuite à l'autre.

Intensité résultante en un point.

68. Pour simplifier les opérations mathématiques, il convient de considérer l'action d'un corps électrisé, non pas sur un autre corps de forme quelconque, mais sur un corps *infiniment petit*, chargé d'une quantité infiniment petite d'électricité, et placé en un quelconque des points de l'espace auxquels s'étend l'action électrique. En prenant la charge de ce corps infiniment petite, nous rendons insensible son action perturbatrice sur la charge du premier corps.

Soit e la charge du petit corps, et soit Re la force qui agit sur lui lorsqu'il est placé au point (x, y, z); soient l, m, n les cosinus directeurs de la force; on peut alors appeler R l'*intensité électrique* résultante au point (x, y, z).

Désignons par X, Y, Z les composantes de R : alors

$$X = Rl, \quad Y = Rm, \quad Z = Rn.$$

Lorsque nous parlons de l'intensité électrique résultante en un point, nous n'entendons pas dire par là qu'en ce point s'exerce actuellement aucune force; nous disons seulement que, si un corps ayant une charge e d'électricité était placé en ce point, il serait soumis à l'action d'une force Re (1).

Définition. — L'intensité électrique résultante en un point est la force qui agirait sur un petit corps chargé de l'unité d'électricité positive, s'il était placé en ce point sans troubler la distribution actuelle de l'électricité.

Cette force tend, non seulement à mouvoir un objet chargé d'électricité, mais encore à déplacer l'électricité dans ce corps de façon que l'électricité positive tende à se mouvoir dans la direction de R, et l'électricité négative dans la direction opposée. C'est pourquoi l'on appelle la quantité R *intensité électromotrice au point* (x, y, z).

Quand nous voudrons exprimer ce fait, que l'intensité résultante est un vecteur, nous la désignerons par la lettre gothique $\mathfrak{E}$. D'après la

(1) Les intensités électrique et magnétique correspondent, en électricité et en magnétisme, à l'intensité de la pesanteur, communément désignée par g, dans la théorie des corps pesants.

théorie adoptée dans cet Ouvrage, si le corps est un diélectrique, l'électricité y est déplacée, et la quantité d'électricité qui est chassée dans la direction de $\mathfrak{E}$ à travers l'unité de surface comptée normalement à $\mathfrak{E}$ est

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E},$$

où $\mathfrak{D}$ est le déplacement, $\mathfrak{E}$ l'intensité résultante et K le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

Si le corps est conducteur, l'état de déformation ne peut se maintenir un instant, et un courant de conduction s'établit et se maintient aussi longtemps que $\mathfrak{E}$ continue d'agir sur le milieu.

Intégrale de l'intensité électrique, ou force électromotrice suivant un arc de courbe.

69. La force électromotrice le long d'un arc de courbe donné AP a pour mesure numérique le travail de la force électrique, pendant que l'unité d'électricité positive se déplace du commencement A au bout P de l'arc.

Si s est la longueur de l'arc mesurée à partir de A, et si l'intensité résultante R en chaque point de la courbe fait un angle ε avec la tangente menée en ce point dans la direction positive, le travail effectué pour déplacer l'unité d'électricité le long d'un élément ds de la courbe sera

$$R \cos\varepsilon \, ds,$$

et la force électromotrice totale E sera

$$E = \int_0^s R \cos\varepsilon \, ds,$$

l'intégration s'étendant d'un bout à l'autre de l'arc.

Si nous nous servons des composantes de l'intensité, l'expression devient

$$E = \int_0^s \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Si X, Y, Z sont tels que $X dx + Y dy + Z dz$ soit la différentielle totale d'une fonction — V de x, y, z, on aura

$$E = \int_A^P (X dx + Y dy + Z dz) = - \int_A^P dV = V_A - V_P,$$

l'intégration étant effectuée d'une manière quelconque du point A au

point P, suivant la courbe donnée ou suivant toute autre ligne allant de A à P.

Dans ce cas, V est une fonction scalaire de la position d'un point de l'espace, c'est-à-dire que, si l'on connaît les coordonnées du point, la valeur de V est déterminée et indépendante de la position et de la direction des axes (*voir* § 16).

Des fonctions de la position d'un point.

Lorsque, dans ce qui suit, nous définirons une quantité comme fonction de la position d'un point, nous entendrons par là que, pour chaque position du point, la fonction a une valeur déterminée. Cela ne veut pas dire que cette valeur puisse toujours être exprimée par la même formule pour tous les points de l'espace; car elle peut fort bien être exprimée par une formule d'un côté d'une surface donnée, et par une autre formule de l'autre côté.

Des fonctions potentielles.

70. La quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, toutes les fois que la force est due à des attractions ou à des répulsions dont l'intensité est une fonction des distances d'un nombre quelconque de points.

Soit en effet r_1 la distance d'un des points au point (x, y, z), et soit R_1 la répulsion : alors

$$X_1 = R_1 \frac{x - x_1}{r_1} = R_1 \frac{dr_1}{dx}.$$

On a pour Y_1 et Z_1 des expressions analogues, en sorte que

$$X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz = R_1\,dr;$$

et puisque R_1 est fonction de r_1 seulement, $R_1\,dr_1$ est la différentielle exacte d'une certaine fonction de r_1, soit $-V_1$.

De même, pour une autre force R_2 agissant à partir d'un centre situé à la distance r_2,

$$X_2\,dx + Y_2\,dy + Z_2\,dz = R_2\,dr_2 = -dV_2,$$

mais $X = X_1 + X_2 + \ldots$ et Y et Z sont composés de la même façon; par suite,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -(dV_1 + dV_2 + \ldots) = -dV.$$

L'intégrale de cette quantité, qui satisfait à la condition de s'annuler à une distance infinie, est appelée la *fonction potentielle*.

L'usage de cette fonction dans la théorie des attractions a été introduit par Laplace, pour calculer l'attraction de la Terre. Green, dans son « Application de l'Analyse mathématique à la théorie de l'électricité », lui a donné le nom de *fonction potentielle*. Gauss, dans des travaux indépendants de ceux de Green, a aussi employé le mot de *potentiel*. Clausius et d'autres ont appliqué ce terme de *potentiel* au travail qui serait effectué, si l'on écartait l'un de l'autre deux corps ou systèmes de corps à une distance infinie. Nous emploierons ce mot dans le sens des Ouvrages anglais récents, et, pour éviter toute ambiguïté, nous adopterons la définition suivante due à Sir W. Thomson.

Définition du potentiel. — Le potentiel en un point est le travail qui serait effectué si, l'unité d'électricité positive ayant été placée en ce point sans troubler la distribution électrique actuelle, les forces électriques agissaient sur elle et la transportaient de ce point jusqu'à une distance infinie ; ou, ce qui revient au même, le travail que doit accomplir un agent extérieur pour amener une unité d'électricité positive de l'infini, ou de tout point où le potentiel est zéro, jusqu'au point considéré.

Expression de l'intensité résultante et de ses composantes, en fonction du potentiel.

71. Puisque la force électromotrice totale le long d'un arc AB quelconque est

$$E_{AB} = V_A - V_B,$$

en prenant ds pour cet arc AB, nous aurons pour composante de la force dans la direction de ds

$$R\cos s = -\frac{dV}{ds},$$

d'où, en prenant ds parallèle à chacun des axes successivement,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$R = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous désignerons l'intensité même, dont la grandeur est R et dont les composantes sont X, Y, Z, par la lettre gothique $\mathfrak{E}$, comme au § 68.

Le potentiel est le même en tous les points situés à l'intérieur d'un conducteur.

72. *Un conducteur est un corps dans lequel l'électricité qui y est renfermée est libre de se mouvoir d'un point à un autre, lorsqu'elle est soumise à l'action d'une force électromotrice. Si l'électricité est en équilibre, il ne peut exister de force électromotrice agissant à l'intérieur du conducteur; par suite,* $R = 0$ *dans tout l'espace occupé par le conducteur. De là, il résulte que*

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

et qu'en chaque point du conducteur

$$V = C,$$

C étant une quantité constante.

Puisque le potentiel de tous les points compris à l'intérieur du conducteur est C la quantité C est appelée le *potentiel du conducteur*. On peut définir C : le travail que devrait accomplir un agent extérieur pour amener une unité d'électricité depuis l'infini jusque sur le conducteur, en supposant que la présence de cette unité ne trouble pas la distribution actuelle de l'électricité.

On verra au § 246 qu'en général, lorsque deux corps d'espèces différentes sont mis en contact, une force électromotrice agit de l'un vers l'autre à travers la surface de contact; en sorte que, à l'état d'équilibre, le potentiel de l'un est plus élevé que celui de l'autre. Mais, pour l'instant, nous supposerons que tous nos conducteurs soient faits d'un même métal et tenus à la même température.

Si les potentiels des conducteurs A et B sont respectivement V_A et V_B, la force électromotrice qui agit le long d'un fil métallique joignant A et B sera

$$V_A - V_B,$$

dans la direction AB, c'est-à-dire que l'électricité positive tendra à passer du conducteur où le potentiel est le plus élevé au conducteur où le potentiel est le moins élevé.

En électrostatique, il existe entre le potentiel et l'électricité le même rapport qu'il y a en Hydrostatique entre la pression et le fluide, et en Thermodynamique entre la température et la chaleur. L'électricité, le fluide, la chaleur tendent à passer d'un endroit à un autre, si le potentiel, la pression, la température sont plus élevés au premier point qu'au second. Un fluide est certainement une substance,

et certainement aussi la chaleur n'est pas une substance : donc, si nous pouvons tirer profit d'analogies de ce genre, pour nous faire une idée nette des relations qui existent entre les quantités électriques, nous devons bien prendre garde que l'une ou l'autre de ces analogies ne nous induise à croire que l'électricité est une substance comme l'eau, ou un état de mouvement comme la chaleur.

Potentiel dû à un système électrique quelconque.

73. Soit un point isolé chargé d'une quantité e d'électricité, et situé à une distance r du point (x', y', z'); alors

$$V = \int_r^\infty R\,dr = \int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr = \frac{e}{r}.$$

Supposons qu'il y ait un nombre quelconque de points électrisés, dont les coordonnées soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ...; les charges e_1, e_2, ...; et les distances au point (x', y', z'), r_1, r_2, ... Le potentiel du système en x', y', z' sera

$$V = \Sigma\left(\frac{e}{r}\right).$$

Soit ρ la densité électrique en un point (x, y, z) situé à l'intérieur d'un corps électrisé : le potentiel dû à ce corps sera

$$V = \iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz,$$

où

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

et où l'intégration est étendue à tout le volume du corps.

Sur la démonstration de la loi de l'inverse du carré des distances.

74 *a*. On peut admettre que les expériences directes faites par Coulomb, au moyen de la balance de torsion, ont établi que la force agissant entre les corps électrisés est en raison inverse du carré de la distance. Toutefois les résultats que l'on déduit de pareilles expériences doivent être regardés comme affectés d'une erreur qui dépend de l'erreur probable de chaque expérience : or, à moins que l'habileté de l'opérateur ne soit très grande, l'erreur probable d'une expérience faite avec la balance de torsion est considérable.

Une vérification bien plus rigoureuse de la loi des forces électriques

peut être tirée d'une expérience semblable à celle qui a été décrite au § 32 (*Exp. VII*).

Cavendish, dans son Ouvrage encore inédit (1) sur l'électricité, fait dépendre d'une expérience de cette nature la démonstration de la loi des forces électriques.

Il fixait une boule sur un support isolant, attachait par des manches de verre deux hémisphères à deux cadres de bois mobiles autour d'un axe : lorsque l'on rapprochait les cadres, les hémisphères formaient, concentriquement à la boule, une enveloppe sphérique isolée.

On pouvait ensuite faire communiquer la boule avec les hémisphères au moyen d'un court fil de métal, qui était attaché lui-même à une corde de soie, de façon à pouvoir être ensuite retiré sans décharger l'appareil.

La boule étant en communication avec les hémisphères, Cavendish chargeait les hémisphères avec une bouteille de Leyde, dont il avait préalablement mesuré le potentiel au moyen d'un électromètre; aussitôt après, il retirait par sa corde de soie le fil de communication, écartait les hémisphères, les déchargeait et examinait l'état électrique de la boule, au moyen de l'électromètre à balle de sureau.

Jamais l'électromètre à balle de sureau, qui, à cette époque (1773), passait pour l'électroscope le plus sensible, ne put déceler aucune trace d'électrisation.

Ensuite, Cavendish communiquait à la boule une fraction connue de la charge primitivement donnée aux hémisphères, puis examinait de nouveau la boule au moyen de son électromètre.

Il trouva *ainsi* que, dans la première expérience, la charge de la boule avait dû être inférieure à $\frac{1}{60}$ de la charge totale de l'appareil, car, si elle eût été plus grande, elle aurait été signalée par l'électromètre.

Il calcula ensuite le rapport de la charge de la boule à celle des hémisphères, dans l'hypothèse que la répulsion était en raison inverse d'une puissance de la distance différant légèrement de 2; il trouva ainsi que, si la différence avait été de $\frac{1}{50}$, la charge de la boule aurait été de $\frac{1}{31}$ de la charge des hémisphères et, par suite, aurait pu être découverte au moyen de l'électromètre.

74 *b*. L'expérience a été répétée récemment au laboratoire Cavendish sous une forme un peu différente.

---

(1) [Publié depuis par Maxwell, sous le titre : *The electrical Researches of the honourable Henry Cavendish, F. R. S.*]

Les hémisphères étaient montés sur un support isolant, et la boule fixée à l'intérieur dans la position voulue, au moyen d'un anneau d'ébonite. Grâce à cette disposition, le support isolant de la boule n'était jamais soumis à l'action d'aucune force électromotrice appréciable et, par suite, ne se chargeait; jamais et l'influence perturbatrice de l'électricité, suintant le long des isolants, se trouvait complètement éliminée.

Au lieu d'enlever les hémisphères avant d'examiner le potentiel de la boule, on les laissait en place et on les déchargeait en les mettant à la terre. L'effet d'une charge donnée restant sur la boule n'était pas aussi grand que si les hémisphères avaient été enlevées, mais ce désavantage était plus que compensé par la protection absolue que le vase conducteur assurait contre toutes les influences perturbatrices extérieures.

Le fil métallique court, qui établissait la communication entre la boule et son enveloppe, était fixé à un petit disque de métal, qui formait comme le couvercle d'un petit trou pratiqué dans l'enveloppe : quand le fil et le couvercle avaient été enlevés au moyen d'une corde de soie, on pouvait passer par le trou l'électrode d'un électromètre et la faire reposer sur la boule intérieure.

L'électromètre était l'électromètre à quadrants de Thomson, qui est décrit au § 219. La cage de l'électromètre et une de ses électrodes étaient constamment reliées à la terre; l'électrode dont on se servait pour l'expérience restait à la terre, jusqu'à ce que l'enveloppe sphérique fût déchargée.

Pour évaluer la charge initiale de cette enveloppe, une petite boule de cuivre était placée sur un support isolant, à une distance considérable de l'enveloppe.

Les opérations étaient menées comme il suit :

L'enveloppe était chargée en la mettant en communication avec une bouteille de Leyde.

La petite balle était mise à la terre, pour lui donner par induction une charge négative; puis elle était laissée isolée.

Le fil de communication de la boule à l'enveloppe était retiré au moyen d'un cordon de soie.

L'enveloppe était déchargée et laissée en communication avec la terre.

L'électrode d'expérience était détachée de la terre, passée à travers le trou de l'enveloppe et mise en contact avec la boule.

On ne put observer le moindre effet sur l'électromètre.

Pour éprouver la sensibilité de l'appareil, on détachait de la terre

l'enveloppe sphérique et on déchargeait à la terre la petite boule. On observait alors à l'électromètre une déviation positive D.

Or la charge négative de la boule était d'environ $\frac{1}{54}$ de la charge initiale de l'enveloppe sphérique; et la charge positive induite par la boule sur l'enveloppe mise à la terre était d'environ $\frac{1}{9}$ de la charge de cette boule.

Donc, lorsque la petite boule était mise à la terre, le potentiel de l'enveloppe était à peu près $\frac{1}{480}$ de son potentiel initial.

Or, si la répulsion était proportionnelle à r^{q-2}, le potentiel de la boule intérieure aurait été, d'après l'équation (22), § 74 d, $-0,1478q$ de celui de l'enveloppe.

Donc, si $\pm d$ est la plus grande déviation de l'électromètre qui puisse échapper à l'observation, q ne peut être supérieur à

$$\pm \frac{1}{72}\frac{d}{D}.$$

Or, même dans une expérience grossière, D était supérieur à $300\,d$; q ne pouvait donc dépasser

$$\pm \frac{1}{21600}.$$

Théorie de cette expérience.

74 c. *Trouver en un point quelconque le potentiel dû à une couche sphérique uniforme, la répulsion, entre deux unités de matière, étant une fonction donnée de la distance.*

Soit $\varphi(r)$ la répulsion entre deux unités de matière situées à la distance r, et soit $f(r)$ tel que

$$(1) \qquad \frac{df(r)}{dr}\,[=f'(r)] = r\int_r^\infty \varphi(r)\,dr.$$

Soient a le rayon de la couche sphérique et σ sa densité superficielle; si α désigne la masse totale de la couche,

$$(2) \qquad \alpha = 4\pi a^2\sigma.$$

Soient b la distance du point donné au centre de la couche, et r sa distance à un point quelconque de la couche.

Si nous rapportons ce point de la couche à un système de coordonnées sphériques dont le pôle est au centre de la sphère et dont l'axe est la ligne droite menée par le point donné,

$$(3) \qquad r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

La masse d'un élément de la couche est

$$\sigma a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{4}$$

et le potentiel $d\theta$ à cet élément au point donné est

$$\sigma a^2 \frac{f'(r)}{r} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi; \tag{5}$$

expression qui doit être intégrée en φ depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, ce qui donne

$$2\pi \sigma a^2 \frac{f'(r)}{r} \sin\theta \, d\theta, \tag{6}$$

que l'on doit intégrer en θ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$.

En différentiant (3), on trouve

$$r \, dr = ab \sin\theta \, d\theta. \tag{7}$$

Substituant dans (6) la valeur de $d\theta$, nous avons

$$2\pi\sigma \frac{a}{b} f'(r) \, dr, \tag{8}$$

dont l'intégrale est

$$V = 2\pi\sigma \frac{a}{b} [f(r_1) - f(r_2)], \tag{9}$$

où r_1 est la plus grande valeur de r, qui est toujours $a + b$, et r_2 sa plus petite valeur, qui est $b - a$ si le point est extérieur, et $a - b$ s'il est intérieur à l'enveloppe.

Si nous représentons par α la charge totale de l'enveloppe et par V son potentiel au point donné, nous aurons, pour un point extérieur à l'enveloppe,

$$V = \frac{\alpha}{2ab} [f(a+b) - f(b-a)]; \tag{10}$$

pour un point situé sur l'enveloppe même,

$$V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a); \tag{11}$$

et pour un point intérieur à l'enveloppe,

$$V = \frac{\alpha}{2ab} [f(a+b) - f(a-b)]. \tag{12}$$

Nous avons maintenant à déterminer les potentiels de deux couches sphériques concentriques, dont les rayons sont a pour la couche extérieure et b pour l'intérieure, et dont les charges sont α et β.

Appelant A le potentiel de la couche extérieure et B celui de la couche intérieure, nous avons, d'après ce qui précède,

$$A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)], \tag{13}$$

$$B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{\alpha}{2ab}[f(a+b) - f(a-b)]. \tag{14}$$

Dans la première partie de l'expérience, les deux enveloppes sont mises en communication par le fil court et sont portées toutes deux à un même potentiel V.

En posant $A = B = V$ et en résolvant les équations (13) et (14) par rapport à β, nous trouvons la charge de l'enveloppe intérieure

$$\beta = 2Vb \frac{b f(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a) f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}. \tag{15}$$

Dans l'expérience de Cavendish, les deux hémisphères formant l'enveloppe extérieure étaient écartés à une distance que nous pouvons supposer infinie et déchargés. Le potentiel de la couche intérieure, ou de la boule, devenait alors

$$B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b). \tag{16}$$

Dans la forme sous laquelle l'expérience a été répétée au laboratoire Cavendish, l'enveloppe extérieure était laissée en place, mais reliée à la terre, en sorte que $A = 0$. Dans ce cas, nous trouvons que le potentiel de la boule intérieure a pour expression en fonction de V

$$B_2 = V\left[1 - \frac{a}{b}\frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right]. \tag{17}$$

74 *d*. Supposons maintenant, avec Cavendish, que la force varie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance, peu différente de la deuxième, et posons

$$\varphi(r) = r^{q-2}; \tag{18}$$

alors

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1}; \tag{19}$$

et si nous supposons que q est petit, nous pouvons développer cette formule, d'après la propriété des exponentielles, sous la forme

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r\left[1 + q\log r + \frac{1}{1.2}(q\log r)^2 + \ldots\right]; \tag{20}$$

et, si nous négligeons les termes qui renferment q^2, les équations (16) et (17) deviennent

$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{a-b}\,Vq\left(\log\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\log\frac{a+b}{a-b}\right). \tag{21}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\,Vq\left(\log\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\log\frac{a+b}{a-b}\right). \tag{22}$$

d'où l'on peut tirer q au moyen des données fournies par l'expérience.

74 *e*. C'est Laplace qui a démontré le premier qu'il n'y a point d'autre fonction de la distance que l'inverse du carré, pour laquelle soit satisfaite la condition qu'une couche sphérique uniforme n'exerce aucune action sur un point intérieur à cette couche (1).

Si nous supposons que, dans l'équation (15), β soit toujours nul, nous pouvons appliquer la méthode de Laplace à la détermination de la forme de $f(r)$. Nous avons, par l'équation (15),

$$bf(2a) - af(a+b) + af(a-b) = 0.$$

En différentiant deux fois, par rapport à b, et divisant par a, nous trouvons

$$f'(a+b) = f'(a-b);$$

si cette équation est vraie en général, c'est que

$$f'(r) = C_0, \text{ une constante,}$$

d'où

$$f'(r) = C_0 r + C_1$$

et par (1)

$$\int_r^\infty \varphi(r)\,dr = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r},$$

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r^2}.$$

Nous pouvons remarquer que l'hypothèse de Cavendish, qui suppose une force variant comme une certaine puissance de la distance, peut paraître moins générale que celle de Laplace, qui suppose seulement la force fonction de la distance; mais que cette hypothèse est la seule compatible avec ce fait que des figures semblables peuvent être électrisées de façon à avoir des propriétés électriques semblables (2).

---

(1) *Méc. cél.*, t. I, p. 2.

(2) [Il n'est pas inutile de faire remarquer combien il serait difficile de donner une démonstration expérimentale *rigoureuse* du fait qui paraît être considéré ici comme incontestable. (C.)]

Car, si la force était une fonction de la distance autre qu'une puissance, le rapport des forces à deux distances différentes ne serait plus une fonction du rapport des distances, mais dépendrait de la valeur absolue de ces distances; et, par suite, il impliquerait le rapport de ces distances à une certaine longueur absolue.

Cavendish lui-même fait remarquer que, dans son hypothèse sur la constitution du fluide électrique, il est impossible que la distribution électrique soit exactement la même sur deux corps géométriquement semblables, si les charges ne sont pas proportionnelles aux volumes. Car il suppose que les molécules du fluide électrique sont très étroitement rapprochées, aux environs de la surface du corps, ce qui revient à supposer que la loi de la répulsion n'est plus celle de l'inverse carré, mais que, dès l'instant où les molécules arrivent en contact, leurs répulsions croissent bien plus vite que leurs distances ne diminuent.

Intégrale de l'induction électrique, et déplacement électrique à travers une surface.

75. Soit R l'intensité résultante en un point de la surface; soit ε l'angle que fait R avec la normale menée du côté positif de la surface; $R\cos\varepsilon$ est la composante de l'intensité, suivant la normale à la surface, et, si dS est l'élément de surface, le déplacement électrique à travers dS sera (§ 68),

$$\frac{1}{4\pi}\,KR\cos\varepsilon\,dS$$

et, puisque nous ne considérons pour l'instant d'autre diélectrique que l'air, $K=1$.

Nous pouvons toutefois éviter d'introduire dès maintenant la théorie du déplacement électrique, en appelant $R\cos\varepsilon\,dS$ l'induction [1] à travers l'élément dS. Cette quantité est bien connue en Physique mathématique, mais le nom d'*induction* est emprunté à Faraday. L'intégrale de surface de l'induction est

$$\iint R\cos\varepsilon\,dS,$$

et, d'après le § 21, on voit que, si X, Y et Z sont les composantes de

---

[1] [Pour bien comprendre le mot *induction*, le lecteur doit être familiarisé avec tous les phénomènes physiques auxquels il est appliqué. Les considérations qui amènent ici l'auteur à définir mathématiquement cette expression sont évidemment insuffisantes et présentées d'une manière artificielle. (G.)]

R, et si ces quantités sont continues dans une région limitée par une surface fermée S, l'induction, comptée de dedans vers le dehors, est

$$\iint \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = \iiint \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

l'intégration étant étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface.

Induction à travers une surface fermée due à un seul centre de force.

76. Soit e une quantité d'électricité, que l'on suppose placée en un point O, et soit P un point quelconque à une distance r de O : la force au point P sera er^{-2}, et sera dirigée suivant OP.

Menons par O, jusqu'à une distance infinie, une ligne de direction quelconque. Si O est extérieur à la surface fermée, cette ligne ou bien ne rencontrera pas du tout la surface, ou y pénétrera et en sortira un même nombre de fois. Si O est intérieur à la surface, la ligne doit d'abord sortir de la surface, puis elle peut y pénétrer et en sortir alternativement un nombre de fois quelconque, et finit par en sortir.

Soit ε l'angle de OP et de la normale extérieure à la surface, aux points où OP rencontre cette surface : toutes les fois que OP sort de la surface, $\cos\varepsilon$ est positif; et il est négatif, toutes les fois que OP pénètre dans la surface.

Décrivons une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité, et faisons décrire à la ligne OP une surface conique de petite ouverture et de sommet O.

Ce cône découpera un petit élément $d\omega$ sur la surface de la sphère, et d'autres éléments dS_1, dS_2, ... sur la surface fermée aux différents points où elle est rencontrée par la ligne OP.

Or, puisque chacun de ses éléments coupe le cône à une distance r du sommet et sous un angle ε,

$$dS = r^2 \sec\varepsilon\, d\omega;$$

et, puisque $\mathrm{R} = er^{-2}$, nous aurons

$$\mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = \pm e\, d\omega,$$

le signe + étant pris quand r sort de la surface, et le signe — quand il y pénètre.

Si le point O est extérieur à la surface fermée, les valeurs positives sont en nombre égal aux valeurs négatives, de sorte que, pour une direction quelconque de r,

$$\Sigma \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = 0$$

et, par suite,

$$\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = 0,$$

l'intégration étant étendue à toute la surface fermée.

Si le point O est intérieur à la surface fermée, le rayon vecteur OP sort d'abord de la surface, donnant une valeur positive pour $e\,d\omega$, puis il présente un nombre égal d'entrées et de sorties, de sorte que dans ce cas

$$\Sigma \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = e\, d\omega.$$

En étendant l'intégration sur toute la surface fermée, nous comprendrons toute la surface sphérique dont l'aire est 4π; de sorte que

$$\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = 4\pi e.$$

De là nous concluons que l'induction totale produite du dedans au dehors d'une surface fermée, par l'action d'un centre de force e placé en un point O, est nulle si le point O est extérieur à la surface et égale à $4\pi e$ si le point est intérieur.

Puisque, dans l'air, le déplacement est égal à l'induction divisée par 4π, le déplacement à travers une surface fermée, compté du dedans au dehors, est égal à la quantité d'électricité comprise dans cette surface.

Corollaire. — Il résulte aussi de là que, si la surface n'est pas fermée, mais limitée par une courbe fermée donnée, l'induction totale à travers cette surface est ωe, ω étant l'angle solide sous-tendu en O par la courbe donnée. Cette quantité ne dépend donc que de la courbe fermée, et la forme de la surface dont cette courbe est la limite pourra être changée d'une manière quelconque, pourvu qu'elle ne passe pas d'un côté à l'autre du centre de force.

Des équations de Laplace et de Poisson.

77. Puisque la valeur de l'induction totale produite par un seul centre de force à travers une surface fermée ne dépend que de ce seul point, à savoir si le centre de force est intérieur ou extérieur à la surface, et ne dépend pas autrement de la position de ce point; si nous avons un nombre quelconque de pareils centres e_1, e_2, ... intérieurs à la surface, e'_1, e'_2, ... extérieurs à la surface, nous aurons

$$\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = 4\pi e,$$

e désignant la somme algébrique de toutes les quantités d'électricité placées aux différents centres de forces intérieurs à la surface fermée,

c'est-à-dire la quantité totale d'électricité comprise dans cette surface, l'électricité résineuse étant comptée avec le signe —.

Si l'électricité est distribuée à l'intérieur de la surface, de façon que la densité ne soit nulle part infinie, nous aurons, par le § 64,

$$\int 4\pi e = \int 4\pi \iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

et par le § 75,

$$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

Si nous prenons pour surface fermée la surface de l'élément de volume dx, dy, dz, nous aurons, en égalant ces expressions,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

et, s'il existe un potentiel V, nous trouvons (§ 71)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Cette équation, dans le cas où la densité est égale à zéro, est appelée *équation de Laplace*. Elle a été donnée pour la première fois par Poisson, sous sa forme plus générale. Elle nous permet de déterminer la distribution de l'électricité, quand nous connaissons le potentiel en chaque point.

Comme au § 26, nous désignerons par $\nabla^2 V$ la quantité

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

et nous pouvons énoncer l'équation de Poisson en disant que la densité électrique, multipliée par 4π, est égale à la concentration du potentiel. Quand il n'y a pas électrisation, le potentiel n'a pas de concentration, et telle est l'interprétation de l'équation de Laplace.

D'après le § 72, V est constant à l'intérieur d'un conducteur; donc, à l'intérieur d'un conducteur, la densité de volume est égale à zéro, et toute la charge doit être à la surface.

Si nous supposons que, dans les distributions superficielles ou linéaires, la densité de volume ρ de l'électricité reste finie et que l'électricité soit sous la forme d'une couche mince ou d'un fil ténu, en faisant croître ρ et en diminuant l'épaisseur de la couche ou la section du fil, nous tendrons vers la distribution superficielle ou la distribution linéaire vraies comme limites; et l'équation, restant vraie pendant toute l'opération, restera vraie à la limite, pourvu qu'on l'interprète convenablement selon les circonstances.

Variation du potentiel sur une surface chargée.

78 *a*. La fonction V doit être physiquement continue, au sens défini dans le § 7, sauf à la surface de séparation de deux milieux différents; dans ce cas, ainsi que nous le verrons au § 246, il peut y avoir une différence de potentiel entre les deux substances, et l'électricité sera en équilibre lorsque le potentiel en un point de l'une des substances excédera le potentiel en un point voisin de l'autre substance, d'une quantité constante C, dépendant de la nature des deux substances et de leurs températures.

Mais les dérivées premières de V par rapport à x, y et z peuvent être discontinues, et, par le § 8, les points où cette discontinuité se produit doivent être sur une surface dont l'équation peut être mise sous la forme

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Cette surface sépare la région où φ est négatif de celle où il est positif.

Soient V_1 le potentiel en un point donné de la région négative, V_2 le potentiel en un point donné de la région positive; en un point quelconque de la surface pour laquelle $\varphi = 0$, et que l'on peut regarder comme appartenant aux deux régions,

$$V_1 - C = V_2, \tag{2}$$

où C est, le cas échéant, l'excès constant du potentiel de la substance placée du côté positif de la surface.

Soient l, m, n les cosinus directeurs de la normale ν_2 menée en un point donné de la surface de séparation, dans la région positive. Les cosinus directeurs de la normale ν_1 menée au même point de la surface, dans la région négative, seront $-l$, $-m$ et $-n$.

Les accroissements de V suivant les normales seront

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_1} = -l\frac{\partial V_1}{\partial x} - m\frac{\partial V_1}{\partial y} - n\frac{\partial V_1}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = \quad l\frac{\partial V_2}{\partial x} + m\frac{\partial V_2}{\partial y} + n\frac{\partial V_2}{\partial z}. \tag{4}$$

Traçons sur la surface de séparation une ligne quelconque, et soit s sa longueur mesurée à partir d'un point fixe sur cette ligne : en tout point de la surface et, par suite, en tout point de la ligne,

$$V_2 - V_1 = C.$$

En différentiant cette équation par rapport à s, nous avons

$$(5)\quad \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial y}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial z}-\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\frac{dz}{ds}=0$$

et, puisque la normale est perpendiculaire à cette ligne,

$$(6)\quad l\frac{dx}{ds}+m\frac{dy}{ds}+n\frac{dz}{ds}=0.$$

De (3), (4), (5) et (6), nous tirons (1)

$$(7)\quad \frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial x}=l\left(\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}-\frac{\partial V_1}{\partial \nu_2}\right),$$

$$(8)\quad \frac{\partial V_2}{\partial y}-\frac{\partial V_1}{\partial y}=m\left(\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}-\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}\right),$$

$$(9)\quad \frac{\partial V_2}{\partial z}-\frac{\partial V_1}{\partial z}=n\left(\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}-\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}\right).$$

Si nous considérons la variation de l'intensité électromotrice en un point, au moment où ce point traverse la surface, nous voyons que, des composantes de l'intensité, celle qui est normale à la surface peut subir un changement brusque à la surface, mais que les deux autres composantes parallèles au plan tangent restent continues quand on traverse la surface.

78 *b*. Pour déterminer la charge de la surface, considérons une surface fermée, située en partie dans la région positive, en partie dans la région négative, et renfermant par suite une partie de la surface de discontinuité.

L'intégrale

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS,$$

étendue à cette surface, est égale à $4\pi e$, e étant la quantité d'électricité comprise dans cette surface fermée.

Procédant comme au § 21, nous trouvons

$$(2)\quad \iint R\cos\varepsilon\, dS=\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz + \iint\left[l(X_2-X_1)+m(Y_2-Y_1)+n(Z_2-Z_1)\right]dS,$$

(1) [En identifiant (5) et (6), puisque la ligne est de direction arbitraire, et que de plus $l^2+m^2+n^2=1$. (C.)]

où l'intégrale triple est étendue à tout le volume compris dans la surface fermée, et l'intégrale double à la seule surface de discontinuité.

En substituant aux termes de cette équation leurs valeurs tirées des équations (7), (8) et (9),

$$4\pi e = \iiint 4\pi\rho\, dx\, dy\, dz - \iint \left(\frac{dV_1}{dv_1} + \frac{dV_2}{dv_2}\right) dS. \tag{11}$$

Mais, d'après les définitions de la densité du volume ρ et de la densité superficielle σ,

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho\, dx\, dy\, dz + 4\pi \iint \sigma\, dS; \tag{12}$$

d'où, en comparant les derniers termes de ces deux équations, on tire

$$\frac{dV_1}{dv_1} + \frac{dV_2}{dv_2} + 4\pi\sigma = 0. \tag{13}$$

Cette équation est appelée l'*équation caractéristique* de V sur une surface électrisée où la densité superficielle est σ.

78 *c*. Si, dans toute l'étendue d'une région continue de l'espace, V est une fonction de x, y, z satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

et si, dans une portion finie de cette région, V est constant et égal à C, V doit être constant et égal à C dans toute la région pour laquelle l'équation de Laplace est satisfaite.

Si V n'est pas constant dans toute la région, soit S la surface qui limite la portion finie dans laquelle $V = C$.

Sur la surface S, $V = C$.

Soit ν une normale menée extérieurement à la surface S. Puisque S est la limite de la région continue dans laquelle $V = C$, la valeur de V commence à différer de C à l'instant où nous franchissons la surface S en cheminant sur la normale ν. Donc, immédiatement en dehors de S, $\frac{dV}{d\nu}$ peut être positif ou négatif, mais ne peut être nul, sauf pour les normales menées le long de la ligne qui sépare une aire positive d'une aire négative.

Mais, si ν' est la normale menée vers l'intérieur de la surface S, $V' = C$ et $\frac{dV'}{d\nu'} = 0$.

Donc, en chaque point de la surface, excepté sur certaines lignes formant limite,

$$\frac{dV}{dv} + \frac{dV'}{dv'} \left(= -4\pi\sigma\right)$$

est une quantité finie, positive ou négative; et, par suite, sur la surface S, il y a une distribution d'électricité qui est continue en tous les points, excepté sur certaines lignes qui séparent les aires chargées positivement des aires chargées négativement.

L'équation de Laplace n'est satisfaite sur la surface que pour les points situés sur certaines lignes de la surface. Par suite, la surface S, à l'intérieur de laquelle C est constant, doit comprendre toute l'étendue de la région dans laquelle l'équation de Laplace est satisfaite.

Force agissant sur une surface électrisée.

79. L'expression générale des composantes de la force qui agit sur un corps électrisé, parallèlement aux trois axes, est de la forme

$$A = \iiint \rho X \, dx \, dy \, dz; \tag{14}$$

on a des expressions analogues pour les composantes B et C parallèles à Oy et Oz.

Mais, sur une surface électrisée, ρ est infini, et X est discontinu : nous ne pouvons donc calculer la force directement au moyen d'expressions de cette forme.

Mais nous avons fait voir que la discontinuité ne porte que sur la composante de l'intensité qui est normale à la surface électrisée et que les deux autres composantes sont continues.

Supposons donc que l'on prenne l'axe des x normal à la surface en un point donné; supposons aussi, au moins pour la première partie de cette étude, que X ne soit pas véritablement discontinu, mais qu'il varie continuellement de X_1 à X_2 quand x varie de x_1 à x_2. Si le résultat de notre calcul conduit à une valeur déterminée de la force comme limite lorsque $x_2 - x_1$ décroît indéfiniment, nous pourrons considérer ce résultat comme exact pour $x_2 = x_1$, et pour une surface électrisée sans épaisseur.

Substituant à ρ sa valeur trouvée au § 77, nous avons

$$A = \frac{1}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X \, dx \, dy \, dz. \tag{15}$$

Intégrant cette expression par rapport à x depuis $x = x_1$ jusqu'à

$x = x_2$, elle devient

$$(16)\qquad A = \frac{1}{4\pi}\int\int\left[\frac{1}{2}(X_2^2 - X_1^2) + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)X\,dx\right]dy\,dz.$$

Telle est la valeur de A pour une couche parallèle au plan de yz et d'épaisseur $x_2 - x_1$.

Puisque Y et Z sont continus, $\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ est fini, et, puisque X est également fini,

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)X\,dx < C(x_2 - x_1),$$

où C est la plus grande valeur que prenne $\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)X$ de $x = x_1$ à $x = x_2$.

Donc, quand $x_2 - x_1$ décroît au delà de toute limite, ce terme tend vers zéro, et il reste

$$(17)\qquad A = \int\int\frac{1}{8\pi}(X_2^2 - X_1^2)\,dy\,dz,$$

où X_1 est la valeur de X du côté négatif, et X_2 du côté positif de la surface.

Mais, d'après le n° 78,

$$(18)\qquad X_2 - X_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 4\pi\sigma,$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$(19)\qquad A = \int\int\frac{1}{2}(X_2 + X_1)\sigma\,dy\,dz.$$

Ici $dy\,dz$ est l'élément de surface, σ la densité superficielle, et $\frac{1}{2}(X_2 + X_1)$ est la moyenne arithmétique des intensités électromotrices des deux côtés de la surface.

Donc, un élément d'une surface électrisée est soumis à l'action d'une force dont la composante normale à la surface est égale au produit de la charge de l'élément par la moyenne arithmétique des intensités électromotrices normales, de chaque côté de la surface.

Puisque les deux autres composantes de l'intensité électromotrice ne sont pas discontinues, il ne peut y avoir de doute dans l'évaluation des composantes correspondantes de la force qui agit sur la surface.

Nous pouvons maintenant supposer que la normale à la surface ait

une direction quelconque par rapport aux axes : l'expression générale des composantes de la force qui agit sur un élément dS s'écrira alors

$$A = \tfrac{1}{2}(X_1 - X_2)\sigma\, dS,$$
$$B = \tfrac{1}{2}(Y_1 - Y_2)\sigma\, dS,$$
$$C = \tfrac{1}{2}(Z_1 - Z_2)\sigma\, dS.$$

Surface électrisée d'un conducteur.

80. Nous avons déjà montré que, dans tout l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrique, $X = Y = Z = 0$, et que, par suite, V est constant.

Donc

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho = 0,$$

et par suite ρ doit être nul dans tout l'intérieur du conducteur; ou bien, il n'y a pas d'électricité à l'intérieur du conducteur.

Donc une distribution superficielle d'électricité est la seule possible sur un conducteur en équilibre.

Une distribution s'étendant à toute la masse du corps ne peut exister que si le corps est un non-conducteur.

Puisque l'intensité résultante à l'intérieur du conducteur est zéro, l'intensité résultante, immédiatement en dehors du conducteur, doit être dirigée suivant la normale, égale à $4\pi\sigma$, en la comptant du dedans vers le dehors du conducteur.

Cette relation entre la densité superficielle et l'intensité résultante près de la surface d'un conducteur est connue sous le nom de *loi de Coulomb*, Coulomb ayant établi par expérience que l'intensité de la force électrique, près d'un point donné sur la surface d'un conducteur, est normale à la surface et proportionnelle à la densité superficielle au point donné. La relation numérique

$$R = 4\pi\sigma$$

a été établie par Poisson.

La force qui agit sur un élément dS de la surface électrisée d'un conducteur est, d'après le § 79 (puisque l'intensité est nulle sur le côté intérieur de la surface),

$$\frac{1}{2} R\sigma\, dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{8\pi} R^2\, dS.$$

Cette force est dirigée vers l'extérieur du conducteur, que la charge

soit positive ou négative; sa valeur, en dynes par centimètre carré, est

$$\frac{1}{2} R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} R^2,$$

et elle agit comme une pression appliquée à la surface du conducteur et dirigée vers l'extérieur.

81. Si maintenant nous supposons que l'on électrise un corps de forme allongée, nous pouvons, en faisant décroître ses dimensions latérales, arriver à concevoir une ligne électrisée.

Soient ds la longueur d'une partie de ce corps allongé, c sa circonférence, σ la densité superficielle de l'électricité à sa surface; alors, si λ est la charge par unité de longueur, $\lambda = c\sigma$, et l'intensité électrique résultante près de la surface est

$$4\pi\sigma = 4\pi\frac{\lambda}{c}.$$

Si c décroît indéfiniment, tandis que λ reste fini, l'intensité à la surface augmente indéfiniment. Or, pour tout diélectrique, il y a une limite au delà de laquelle l'intensité ne peut plus être augmentée sans qu'il y ait décharge disruptive; une distribution dans laquelle une quantité finie d'électricité serait placée sur une portion finie d'une ligne est donc incompatible avec l'état des choses dans la nature.

Lors même que l'on trouverait un isolant à travers lequel une force infinie ne ferait point passer une décharge, il serait impossible de charger un conducteur linéaire d'une quantité finie d'électricité; car il faudrait une force électromotrice infinie pour amener l'électricité sur le conducteur linéaire.

De la même manière, on peut montrer qu'un point chargé d'une quantité finie d'électricité ne saurait exister dans la nature. Il est avantageux, cependant, de parler dans certains cas de lignes et de points électrisés, et nous pouvons supposer que ces lignes et ces points soient figurés par des fils électrisés ou par de petits corps dont les dimensions soient négligeables à côté des distances principales que l'on considère.

Puisque la quantité d'électricité répartie sur une longueur donnée d'un fil à un potentiel donné décroît indéfiniment quand le diamètre du fil décroît indéfiniment, la distribution de l'électricité sur des corps de dimensions considérables ne sera pas sensiblement altérée si l'on introduit dans le champ des fils métalliques très fins, tels que ceux

qui servent à établir les communications électriques entre ces corps et la terre, une machine électrique ou un électromètre.

Des lignes de force.

82. Si nous menons une ligne dont la direction coïncide en chaque point avec celle de la force résultante en ce point, cette ligne est appelée *ligne de force*.

En tous les points de son parcours, une ligne de force va des points où le potentiel est le plus haut à ceux où il est le plus bas.

Une ligne de force ne peut donc être fermée sur elle-même, mais elle a forcément une origine et une fin. Le commencement d'une ligne de force doit être sur une surface électrisée positivement, la fin sur une surface électrisée négativement.

Le point initial et le point terminal de la ligne sont appelés des *points correspondants* sur la surface positive et la surface négative.

Si la ligne de force se meut de manière que son point initial décrive une courbe fermée sur la surface positive, son point terminal tracera une courbe fermée correspondante sur la surface négative, et la ligne de force elle-même engendrera une surface tubulaire, que l'on appelle un *tube d'induction* ou un *solénoïde* (1).

Puisque, en un point quelconque de la surface tubulaire, la force résultante est comprise dans le plan tangent, il n'y a pas induction à travers la surface. Donc, si le tube ne renferme pas de corps électrisé, la valeur totale de l'induction à travers la surface fermée que forment la surface tubulaire et ses deux extrémités sera nulle, d'après le § 77, et les valeurs de $\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS$ pour les deux extrémités doivent être égales et de signes contraires.

Si ces surfaces sont des surfaces de conducteurs, $\varepsilon = 0$ et $\mathrm{R} = -4\pi\sigma$ et $\int\int \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS$ devient $-4\pi\int\int \sigma\, dS$, c'est-à-dire la charge de la surface multipliée par 4π.

Donc la charge positive, comprise dans la courbe fermée à un des bouts du tube, est numériquement égale à la charge négative comprise dans la courbe fermée correspondante, à l'autre bout du tube.

---

(1) De σωλήν, *tube*. Faraday emploie dans le même sens le terme de *sphondyloïde* (3271).

Plusieurs résultats importants peuvent se déduire des propriétés des lignes de force.

La surface intérieure d'un vase conducteur fermé est entièrement libre de toute charge, et le potentiel de tous les points intérieurs est le même que celui du conducteur, pourvu qu'il n'y ait point à l'intérieur du vase de corps électrisé isolé.

En effet, *une ligne de force* doit commencer sur une surface chargée positivement et finir sur une surface chargée négativement; et, puisqu'il n'y a pas de corps électrisé à l'intérieur du vase, *une ligne de force*, s'il en existe à l'intérieur du vase, ne peut que commencer et finir sur la surface intérieure du vase.

Mais le potentiel doit être plus élevé au commencement qu'à la fin d'une ligne de force; d'autre part, le potentiel doit être le même en *tous les points d'un conducteur* en équilibre électrique.

Donc il ne peut exister aucune ligne de force dans l'espace compris à l'intérieur d'un vase creux qui ne renferme *aucun corps* électrisé.

Si un conducteur, placé à l'intérieur d'un vase clos, est mis en communication avec ce vase, son potentiel devient le même que celui du vase et sa surface devient le prolongement de la surface intérieure du vase. Le conducteur doit donc se décharger de toute électrisation.

Si nous supposons que la surface d'un corps électrisé soit divisée en parties élémentaires telles que la charge de chaque élément soit égale à l'unité, et si l'on trace dans le champ de force des solénoïdes, ayant ces éléments pour bases, l'intégrale prise sur une surface quelconque sera représentée par le nombre des solénoïdes que rencontre cette surface. C'est *dans ce sens que* Faraday utilise sa conception des lignes de force, pour représenter en chaque point du champ, non seulement la direction, mais aussi la grandeur de la force.

Nous avons employé l'expression de *lignes de force*, parce que c'est celle dont se sont servis Faraday et d'autres. Mais, rigoureusement, ces lignes devraient être appelées *lignes d'induction électrique*.

Dans les cas ordinaires, les lignes d'induction représentent en chaque point la *direction* et la *grandeur* de l'intensité électromotrice résultante, parce que l'intensité et l'induction sont dans la même direction et dans un rapport constant. Mais il y a d'autres cas où il est important de se souvenir que ces lignes représentent seulement l'induction, et que l'intensité est déterminée par les surfaces équipotentielles, puisqu'elle est normale à ces surfaces et inversement proportionnelle à la distance de deux surfaces consécutives.

Du pouvoir inducteur spécifique.

83 *a*. Dans l'étude des intégrales de surface qui précède, nous avons adopté la conception ordinaire d'une action directe à distance, et nous n'avons pas fait entrer en considération les effets qui dépendent de la nature du diélectrique au sein duquel on observe les forces.

Or Faraday a observé que la quantité d'électricité induite par une force électromotrice donnée sur la surface du conducteur qui limite un diélectrique n'est pas la même pour tous les diélectriques. La quantité d'électricité induite est plus considérable pour la plupart des diélectriques solides ou liquides que pour l'air et les gaz. Aussi dit-on que ces corps ont un pouvoir inducteur spécifique supérieur à celui de l'air, qui est pris comme milieu type.

Nous pouvons exprimer la théorie de Faraday sous une forme mathématique en disant que, dans un milieu diélectrique, l'induction à travers une surface est égale au produit de la force électrique normale par le coefficient de pouvoir inducteur spécifique du milieu. Si nous désignons ce coefficient par K, nous devrons, dans tout le cours de l'étude des intégrales de surface, multiplier X, Y et Z par K, en sorte que l'équation de Poisson devient

$$\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi\rho = 0. \tag{1}$$

A la surface de séparation de deux milieux dont les pouvoirs inducteurs sont K_1 et K_2 et les potentiels V_1 et V_2, l'équation caractéristique (1) s'écrira

$$K_1 \frac{dV_1}{dv_1} + K_2 \frac{dV_2}{dv_2} + 4\pi\sigma = 0, \tag{2}$$

où v_1 et v_2 sont les normales menées dans les deux milieux et σ la densité superficielle vraie à la surface de séparation, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui existe effectivement à la surface sous forme de charge, et qui ne peut être altérée que si l'on apporte de l'électricité en ce point ou si l'on en retire.

Distribution apparente de l'électricité.

83 *b*. Si, partant de la distribution effective du potentiel, nous en

(1) *Voir* § 78 *b*.

déduisons la densité de volume ρ' et la densité superficielle σ', dans l'hypothèse que K est toujours égal à l'unité, nous pouvons appeler ρ' la densité de volume apparente et σ' la densité superficielle apparente : car une distribution électrique ainsi définie rendrait compte de la distribution effective du potentiel, si l'on suppose que la loi des forces électriques donnée au § 66 ne demande point à être modifiée, à raison des propriétés différentes des divers diélectriques.

La charge apparente d'électricité comprise dans une région donnée peut augmenter ou diminuer sans qu'il passe d'électricité à travers la surface qui limite la région. Nous devons donc la distinguer de la charge vraie qui satisfait à l'équation de continuité.

Dans un milieu diélectrique hétérogène, où K varie d'une manière continue, si ρ' est la densité de volume apparente,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho' = 0. \tag{3}$$

Comparant cette équation à celle qui précède, nous trouvons

$$4\pi(\rho - \rho') + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

L'électrisation vraie, représentée par ρ, produira, dans le diélectrique dont le pouvoir inducteur variable est représenté par K, le même potentiel en chaque point, que donnerait la distribution apparente représentée par ρ' dans un diélectrique dont le pouvoir inducteur serait partout égal à l'unité.

La charge superficielle apparente σ' se déduit des forces électriques dans le voisinage de la surface, au moyen de l'équation caractéristique ordinaire

$$\frac{dV_1}{dv_1} - \frac{dV_2}{dv_2} + 4\pi\sigma' = 0. \tag{5}$$

Si un diélectrique solide de forme quelconque est un isolant parfait, et si sa surface ne reçoit aucune charge, l'électrisation vraie reste égale à zéro, quelles que soient les forces électriques qui agissent sur lui.

Donc

$$K_1\frac{dV_1}{dv_1} + K_2\frac{dV_2}{dv_2} = 0,$$

$$\frac{dV_1}{dv_1} = 4\pi\sigma'\frac{K_2}{K_1 - K_2}, \quad \frac{dV_2}{dv_2} = 4\pi\sigma'\frac{K_1}{K_1 - K_2}.$$

La densité superficielle σ' est celle de l'électrisation apparente pro-

duite par induction à la surface du diélectrique solide. Elle disparaît entièrement lorsqu'on supprime la force inductrice; mais si, pendant que cette force inductrice agit, on décharge l'électrisation apparente de la surface en passant une flamme sur cette surface, on fera apparaître une électrisation vraie opposée à σ', aussitôt que l'on supprimera la force inductrice (1).

---

(1) *Voir* FARADAY : *Remarks on static Induction* (*Proceedings of the Royal Institution*, 12 feb. 1858), et le § 58 relatif à la tourmaline.

[Maxwell passe ici brusquement d'une conception de l'électricité à l'autre. L'équation de Poisson est indépendante de la définition de l'*induction*, qui n'y entre pas; l'équation (1) ne peut être considérée comme une définition nouvelle de la quantité d'électricité; cette équation est en effet une simple équation de continuité, et résulte des définitions du § 62. Elle exprime que la quantité d'électricité $\rho\, dx\, dy\, dz$ est la somme des déplacements électriques sur les faces du parallélépipède infiniment petit, et l'équation (2) du § 83 a est aussi une équation de continuité relative à un petit cylindre normal à la surface des séparations des deux milieux. Cette définition de ce que Maxwell appelle la quantité *vraie* d'électricité coïncide avec celle de la quantité *apparente* d'électricité, c'est-à-dire avec la définition du § 65, tirée des lois de Coulomb, quand le diélectrique est le vide. (P.)]

CHAPITRE III.

DU TRAVAIL ÉLECTRIQUE ET DE L'ÉNERGIE D'UN SYSTEME DE CONDUCTEURS.

Du travail que doit exécuter un agent extérieur pour charger d'une manière donnée un système électrisé.

84. Le travail dépensé pour apporter une quantité δe d'électricité depuis l'infini ou tout autre point où le potentiel est zéro jusqu'en un point donné du système où le potentiel est V, est, par la définition même du potentiel (*voir* § 70),

$$V\,\delta e.$$

L'effet de ce transport est d'augmenter de δe la charge en ce point donné du système, en sorte que, si la charge y était e, elle devient $e + \delta e$ après l'opération.

Nous pouvons donc exprimer le travail dépensé pour produire un changement donné dans la charge du système par l'intégrale

$$W = \Sigma\left(\int V\,de\right), \tag{1}$$

où la sommation Σ s'étend à toutes les parties du système électrisé.

De l'expression du potentiel donnée au § 73, il ressort que le potentiel en un point peut être considéré comme la somme d'un nombre quelconque de parties, dont chacune est le potentiel dû à une portion correspondante de la charge du système.

Si donc V est en un point donné le potentiel dû à un système de charges, que nous pouvons appeler $\Sigma(e)$, et si V' est, au même point, le potentiel dû à un autre système de charges $\Sigma(e')$, le potentiel produit en ce point par l'ensemble des deux systèmes de charges existant simultanément sera

$$V + V'.$$

Par suite, si chacune des charges du système est altérée dans le rapport de n à 1, le potentiel en un point quelconque du système est aussi modifié dans le rapport de n à 1.

Supposons donc que l'opération qui consiste à charger un conduc-

teur soit menée de la manière suivante. Prenons d'abord le système libre de toute charge et au potentiel zéro, et chargeons-en simultanément les différentes parties; chacune proportionnellement à la charge qu'elle doit posséder finalement.

Ainsi, e étant la charge finale et V le potentiel final que doit prendre un point quelconque du système, à un instant quelconque de l'opération sa charge sera ne et son potentiel nV, et nous pourrons représenter toute l'opération de la charge, en supposant que n croisse d'une manière continue de 0 à 1.

Pendant que n croît de n à $n+\delta n$, un point du système dont la charge finale doit être e, et le potentiel final V, reçoit un accroissement de charge $e\delta n$, et son potentiel est nV; le travail effectué pendant cette opération est donc

$$eVn\delta n.$$

Le travail total accompli pour charger le système est

$$\Sigma eV\int_0^1 n\,dn = \tfrac{1}{2}\Sigma(eV), \tag{2}$$

c'est-à-dire la demi-somme des produits des charges des différents points du système par leurs potentiels respectifs.

Tel est le travail que doit accomplir un agent extérieur pour charger le système de la façon indiquée; mais, puisque le système est un système conservatif, le travail nécessaire pour amener le système à ce même état par tout autre procédé sera forcément le même.

Nous pouvons donc appeler

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma(eV) \tag{3}$$

l'*énergie électrique du système*, exprimée en fonction des charges des différentes parties et de leurs potentiels.

85 *a*. Supposons maintenant que le système passe de l'état (e, V) à l'état (e', V') par une suite d'opérations au cours desquelles les différentes charges croissent simultanément, et chacune proportionnellement à son accroissement total $e'-e$.

Si, à un instant quelconque, la charge d'une partie du système est $e+n(e'-e)$, son potentiel sera $V+n(V'-V)$ et le travail nécessaire pour faire varier la charge de cette portion sera

$$\int_0^1 (e'-e)[V+n(V'-V)]\,dn = \tfrac{1}{2}(e'-e)(V+V').$$

Si donc nous représentons par W' l'énergie du système dans l'état (e', V'),

$$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e' - e)(V + V'). \tag{4}$$

Mais

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma(eV), \quad W' = \tfrac{1}{2}\Sigma(e'V').$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4), on trouve

$$\Sigma(eV') = \Sigma(e'V) \quad (1). \tag{5}$$

Donc, dans un système invariable de conducteurs électrisés, si l'on considère deux états d'électrisation différents, la somme des produits des charges dans le premier état par les potentiels des mêmes points des conducteurs dans le second état est égale à la somme des produits des charges dans le second état par les potentiels des mêmes points dans le premier état.

Ce résultat correspond, dans la théorie élémentaire de l'électricité, au théorème de Green dans la théorie analytique. En choisissant convenablement l'état initial et l'état final du système, on peut en déduire un grand nombre d'utiles résultats.

85 *b*. De (4) et (5), nous tirons une autre expression de l'accroissement d'énergie, en fonction de l'accroissement des potentiels,

$$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e - e')(V' - V). \tag{6}$$

Si les accroissements sont infiniment petits, (4) et (6) pourront s'écrire

$$dW = \Sigma(V\delta e) = \Sigma(e\,\delta V),$$

et si nous désignons par W_e et W_V les expressions de W en fonction des charges ou en fonction des potentiels, par A_r un conducteur particulier du système, par e_r et V_r sa charge et son potentiel,

$$V_r = \frac{dW_e}{de_r}, \tag{8}$$

$$e_r = \frac{dW_v}{dV_r}. \tag{9}$$

---

(1) [Si m et m' sont les deux masses, r leur distance, on a

$$\Sigma\frac{ee'}{r} = \frac{1}{2}\Sigma e\left(\frac{\Sigma e'}{r}\right) = \frac{1}{2}\Sigma e'\left(\frac{\Sigma e}{r}\right),$$

c'est-à-dire la formule (5) démontrée indépendamment de toute considération mécanique : cette identité est indépendante de la loi de l'attraction, car on peut substituer à r une fonction quelconque de r sans la modifier. (P.)]

86. Si, dans un système invariable de conducteurs, l'un d'entre eux, que nous désignerons par A_t, n'a de charge ni dans l'état initial, ni dans l'état final, e_t et e'_t sont nuls pour ce conducteur, en sorte que les termes dépendant de A_t s'annulent dans les deux membres de l'équation (5).

Si un autre conducteur, A_u, est au potentiel zéro dans les deux états du système, $V_u = 0$ et $V'_u = 0$, et les termes dépendant de A_u disparaissent des deux membres de l'équation (5).

Si donc tous les conducteurs du système, sauf deux, A_r et A_s, sont ou bien isolés et privés de charge, ou bien reliés à la Terre, l'équation (5) se réduit à la forme

$$e_r V'_r + e_s V'_s = e'_r V_r + e'_s V_s; \tag{10}$$

si dans l'état initial

$$e_r = 1 \quad \text{et} \quad e_s = 0,$$

et si dans l'état final

$$e'_r = 0 \quad \text{et} \quad e'_s = 1,$$

l'équation (10) devient

$$V'_r = V_s, \tag{11}$$

c'est-à-dire que, si une charge égale à l'unité, communiquée à A_r, porte A_s au potentiel V, une charge égale à l'unité, communiquée à A_s, portera A_r au même potentiel, pourvu que chacun des autres conducteurs du système soit ou bien isolé et privé de charge, ou bien mis à la Terre de façon que son potentiel soit zéro.

C'est le premier exemple que nous rencontrons en électricité d'une relation de réciprocité (1). De pareilles relations se trouvent dans toutes les branches de la Science et permettent souvent de déduire la solution de problèmes nouveaux de problèmes plus simples et déjà résolus.

Ainsi, de ce fait qu'en un point extérieur à une sphère conductrice dont la charge est 1 le potentiel est r^{-1}, r étant la distance du point au centre de la sphère, nous concluons qu'un petit corps ayant une charge 1, et placé à une distance r du centre d'une sphère conductrice non chargée, porte le potentiel de cette sphère à la valeur r^{-1}.

Supposons maintenant que dans l'état initial

$$V_r = 1 \quad \text{et} \quad V_s = 0,$$

(1) Cette relation de réciprocité deviendra bien plus claire après la lecture du § 87. (C.)]

et que dans l'état final

$$V'_r = 0 \quad \text{et} \quad V'_s = 1,$$

l'équation (10) devient

$$e_s = e'_r, \tag{12}$$

c'est-à-dire que, si A_r porté au potentiel 1 induit sur A_s une charge e, A_s porté au potentiel 1 induira sur A_r une charge égale e.

Supposons, en troisième lieu, que dans l'état initial

$$V_r = 1 \quad \text{et} \quad e_s = 0,$$

et que dans l'état final

$$V'_r = 0 \quad \text{et} \quad e'_s = 1;$$

l'équation (10) deviendra dans ce cas

$$e'_r - V_s = 0. \tag{13}$$

Donc, si, A_s n'ayant point de charge, le fait de porter A_r au potentiel 1 élève A_s au potentiel V, quand on maintiendra A_r au potentiel zéro, une charge égale à l'unité communiquée à A_s induira sur A_r une charge négative dont la valeur numérique est V.

Dans tous les cas examinés, *nous pouvons supposer que certains* des conducteurs soient isolés et privés de charge, et que les autres soient reliés à la Terre.

Le troisième cas est une forme élémentaire d'un des théorèmes de Green. Comme exemple de la façon de l'employer, supposons que nous ayons déterminé, pour les divers éléments d'un système conducteur maintenu au potentiel zéro, la distribution des charges électriques induites par une charge égale à l'unité communiquée à un corps donné A_s du système.

Soit η_r la charge que prend A_r dans ces circonstances. Si maintenant nous supposons A_s privé de charge, et les autres corps portés chacun à un potentiel différent, le potentiel de A_s sera

$$V_s = -\Sigma(\eta_r V_r). \tag{14}$$

Par exemple, si en un point donné d'un vase conducteur creux nous avons déterminé la *densité superficielle de la charge induite* par l'unité de charge placée en un point donné à l'intérieur du vase, et si nous connaissons la valeur du potentiel en chaque point d'une surface de même forme et de mêmes dimensions que la surface intérieure du vase, nous pourrons conclure le potentiel en un point intérieur occupant une position correspondant à celle de l'unité de charge.

Donc, si l'on connaît le potentiel pour tous les points d'une surface

fermée, on peut le déterminer pour tout point intérieur à la surface, pourvu qu'elle ne renferme pas de corps électrisé, et pour tout point extérieur, pourvu qu'il n'y ait point de corps électrisé au dehors de la surface.

Théorie d'un système de conducteurs.

87. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n conducteurs de forme quelconque; soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ leurs charges, et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ leurs potentiels.

Supposons que le milieu diélectrique qui sépare les conducteurs reste le même et ne se charge point d'électricité au cours des opérations que nous avons à considérer.

Nous avons montré au § 84 que le potentiel de chaque conducteur est une fonction linéaire homogène des n charges.

Donc, puisque l'énergie électrique d'un système est la demi-somme du produit du potentiel de chaque conducteur par sa charge, l'énergie électrique doit être une fonction homogène du second degré des n charges, de la forme

$$(15)\quad W_e = \tfrac{1}{2}p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + \tfrac{1}{2}p_{22}e_2^2 + p_{13}e_1e_3 + p_{23}e_2e_3 + \tfrac{1}{2}p_{33}e_3^2 + \ldots$$

l'indice e signifiant que W est exprimé en fonction des charges. Lorsqu'on écrit W sans indice, on a en vue l'expression (3), où figurent les charges et les potentiels.

On peut déduire de cette expression le potentiel d'un quelconque des conducteurs; car, puisque le potentiel est défini le travail qu'il faut accomplir pour amener l'unité d'électricité du potentiel zéro au potentiel donné, et puisque ce travail se dépense pour accroître W, nous n'avons qu'à différentier W_e par rapport à la charge d'un conducteur donné pour obtenir le potentiel de ce conducteur (1). Nous obtenons

---

(1) [On a en effet (§ 84)

$$\delta W = V\,\delta e,$$

d'où, à la limite,

$$V = \frac{\partial W}{\partial e},$$

lorsque la seule variable est la charge du conducteur. Le lecteur doit se familiariser avec les différents points de vue suivant lesquels on peut considérer le travail des forces électriques : à chaque point de vue correspond une variable indépendante différente. La première fois (§ 70) que l'expression analytique du travail a été introduite, la variable indépendante était la distance; ici, c'est la charge; plus loin (équations 18, 19 et 21), c'est le potentiel. Les deux éléments e et V entrant symétriquement dans l'expression de l'énergie $W = \frac{1}{2}\Sigma eV$, on est conduit naturellement aux deux systèmes symétriques de relations (15), (16) et (18), (21). (C.)]

ainsi

$$(16)\qquad \begin{cases} V_1 = p_{11}e_1 + \ldots + p_{r1}e_r + \ldots + p_{n1}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ V_s = p_{1s}e_1 + \ldots + p_{rs}e_r + \ldots + p_{ns}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ V_n = p_{1n}e_1 + \ldots + p_{rn}e_r + \ldots + p_{nn}e_n, \end{cases}$$

système de n équations linéaires qui expriment les n potentiels en fonctions des n charges.

Les coefficients p_{rs} sont appelés *coefficients de potentiel;* chacun a deux indices correspondant, le premier à l'indice de la charge, le second à l'indice du potentiel.

Le coefficient p_{rr}, pour lequel les deux indices sont les mêmes, représente le potentiel de A_r, quand sa charge est égale à l'unité et que celle des autres conducteurs est zéro. Il y a n coefficients de cette espèce, un pour chaque conducteur.

Le coefficient p_{rs}, dans lequel les deux indices sont différents, représente le potentiel de A_s, quand A_r reçoit une charge égale à l'unité, la charge de tous les autres conducteurs, sauf A_r, étant nulle.

Nous avons déjà montré, au § 86, que $p_{rs} = p_{sr}$, mais nous pouvons le prouver d'une façon plus rapide, en remarquant que

$$(17)\qquad p_{rs} = \frac{\partial V_s}{\partial e_r} = \frac{\partial}{\partial e_r}\frac{\partial W_e}{\partial e_s} = \frac{\partial}{\partial e_s}\frac{\partial W_e}{\partial e_r} = \frac{\partial V_r}{\partial e_s} = p_{sr}.$$

Le nombre des coefficients à deux indices différents *distincts les uns des autres* est donc $\frac{1}{2}n(n-1)$, puisqu'il y a un de ces coefficients par couple de conducteurs.

En résolvant les équations (16) par rapport à $e_1, e_2, \ldots$, nous avons n équations donnant les charges en fonction des potentiels

$$(18)\qquad \begin{cases} e_1 = q_{11}V_1 + \ldots + q_{1s}V_s + \ldots + q_{1n}V_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ e_r = q_{r1}V_1 + \ldots + q_{rs}V_s + \ldots + q_{rn}V_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ e_n = q_{n1}V_1 + \ldots + q_{ns}V_s + \ldots + q_{nn}V_n. \end{cases}$$

On a aussi, dans ce cas, $q_{rs} = q_{sr}$, car

$$(19)\qquad q_{rs} = \frac{\partial e_r}{\partial V_s} = \frac{\partial}{\partial V_s}\frac{\partial W_v}{\partial V_r} = \frac{\partial}{\partial V_r}\frac{\partial W_v}{\partial V_s} = \frac{\partial e_s}{\partial V_r} = q_{sr}.$$

En substituant ces valeurs des charges dans l'équation de l'énergie électrique

$$(20)\qquad W = \tfrac{1}{2}(e_1V_1 + \ldots + e_rV_r + \ldots + e_nV_n),$$

nous obtenons une expression de l'énergie en fonction des potentiels :

$$(21)\quad W_V = \tfrac{1}{2}q_{11}V_1^2 + q_{12}V_1V_2 + \tfrac{1}{2}q_{22}V_2^2 + q_{13}V_1V_3 + q_{23}V_2V_3 + \tfrac{1}{2}q_{33}V_3^2 + \dots$$

Un coefficient dans lequel les deux indices sont les mêmes est appelé *capacité électrique du conducteur* auquel il correspond.

Définition. — La capacité d'un conducteur est la charge de ce conducteur quand son potentiel est égal à l'unité et que celui des autres conducteurs est nul.

Telle est la définition de la capacité proprement dite d'un conducteur, quand on ne fait point d'autres spécifications. Mais il est quelquefois avantageux de spécifier un état différent pour une partie ou pour la totalité des autres conducteurs, de spécifier par exemple que la charge de certains d'entre eux est nulle; on peut alors définir la capacité du conducteur sous ces conditions comme étant la charge pour laquelle le potentiel de ce conducteur est égal à l'unité.

Les autres coefficients sont appelés *coefficients d'induction*. Un quelconque d'entre eux, q_{rs}, représente la charge de A_r, lorsque A_s est porté au potentiel 1 et que les autres conducteurs, sauf A_s, sont maintenus au potentiel zéro.

Le calcul mathématique des coefficients de potentiel et d'induction est en général difficile. Nous démontrerons plus loin qu'ils ont toujours des valeurs déterminées, et, dans certains cas spéciaux, nous calculerons ces valeurs. Nous ferons voir aussi comment on peut les déterminer par expérience.

Quand il est question de la capacité d'un conducteur sans qu'il soit fait mention de la forme ou de la position d'autres conducteurs du système, on devra entendre par là la capacité du conducteur, quand il ne se trouve en présence d'aucun conducteur ou corps électrisé à distance finie.

Il est quelquefois avantageux, lorsqu'on ne s'occupe que des capacités et des coefficients d'induction, de les écrire sous la forme [A.P], en désignant par ce symbole la charge du conducteur A quand P est porté au potentiel un.

De même [(A + B).(P + Q)] représentera la charge de A + B, lorsque P et Q sont tous deux portés au potentiel un, et il est clair que, puisque

$$[(A+B)(P+Q)] = [AP] + [AQ] + [BP] + [BQ] = [(P+Q)(A+B],$$

on peut combiner ces symboles complexes par voie d'addition et de soustraction, comme si c'étaient des symboles de quantités.

Le symbole [A.A] représente la charge de A lorsque le potentiel de A est 1, c'est-à-dire la capacité de A.

De même, [(A + B)(A + Q)] représente la somme des charges de A et de B, lorsque A et Q sont portés au potentiel 1 et que le potentiel de tous les conducteurs, sauf A et Q, est maintenu égal à zéro.

Ce symbole peut se décomposer en

$$[A.A] + [A.B] + [A.Q] + [B.Q].$$

Les coefficients de potentiel ne peuvent être traités de cette manière. Les coefficients d'induction représentent des charges qui peuvent se combiner par addition; *mais les coefficients de potentiel* représentent des potentiels, et si le potentiel de A est V_1 et celui de B V_2, la somme $V_1 + V_2$ n'a pas de signification physique relativement aux phénomènes, quoique $V_1 - V_2$ représente la force électromotrice qui agit de A vers B.

Les coefficients d'induction entre deux conducteurs peuvent s'exprimer en fonction des capacités des conducteurs et de la capacité de l'ensemble des deux conducteurs

$$[A.B] = \tfrac{1}{2}[(A + B)(A + B)] - \tfrac{1}{2}[A.A] - \tfrac{1}{2}[B.B].$$

Dimensions des coefficients.

88. Puisque le potentiel d'une charge e à une distance r est $\frac{e}{r}$, les dimensions d'une charge d'électricité sont égales à celles du produit d'un potentiel pour une longueur.

Les coefficients de capacité et d'induction ont donc les mêmes dimensions qu'une ligne, et chacun d'eux peut être représenté par une ligne droite, dont la longueur est indépendante du système d'unités que nous employons.

Pour la même raison, un coefficient de potentiel peut être représenté par l'inverse d'une longueur.

De certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients.

89 *a*. En premier lieu, puisque l'énergie électrique d'un système est une quantité essentiellement positive, son expression sous forme de fonction quadratique des charges ou des potentiels doit être positive, quelles que soient les valeurs positives ou négatives que l'on donne aux charges ou aux potentiels.

Or les conditions pour qu'une fonction de n variables, homogène et du second degré, soit toujours positive sont au nombre de n, et

peuvent s'écrire

$$(22)\qquad \begin{cases} p_{11} > 0, \\ \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{cases}$$

Ces n conditions sont nécessaires et suffisantes pour que W soit essentiellement positif (1).

Mais, puisque, dans l'équation (16), nous pouvons placer les conducteurs dans un ordre quelconque, il faudra que tout déterminant que l'on peut former symétriquement au moyen des coefficients relatifs à une combinaison quelconque des n conducteurs, soit positif; le nombre de ces combinaisons est $2^n - 1$.

Mais on trouve que n seulement de ces conditions sont indépendantes.

Les coefficients de capacité et d'induction sont soumis à des conditions de même forme.

89 *b. Les coefficients de potentiel sont tous positifs, mais aucun des coefficients p_{rs} n'est supérieur à p_{rr} ou p_{ss}.*

En effet, donnons à A_r une charge égale à l'unité, les autres conducteurs n'ayant point de charge. Il se formera un système de surfaces équipotentielles, dont l'une sera la surface de A_r et sera au potentiel p_{rr}. Si A_s est placé dans un trou creusé dans A_r, de façon à en être complètement renfermé, son potentiel sera aussi p_{rr}.

Si, au contraire, A_s est extérieur à A_r, son potentiel p_{rs} sera compris entre p_{rr} et zéro.

Considérons en effet les lignes de force partant du conducteur électrisé A_r. Sa charge a pour mesure l'excès du nombre des lignes qui partent de ce corps sur le nombre des lignes qui y finissent. Donc, si le conducteur n'a pas de charge, le nombre des lignes de force qui pénètrent dans le conducteur est égal au nombre des lignes qui en sortent. Les lignes qui pénètrent dans le conducteur viennent des points où le potentiel est plus élevé; celles qui en sortent vont vers les points où le potentiel est moins élevé. Donc le potentiel d'un corps

(1) *Voir* Williamson, *Calcul différentiel*, 3e édit., p. 407.

non chargé doit être compris entre le potentiel le plus élevé et le potentiel le plus bas qui se rencontrent dans le champ, et par suite les potentiels les plus élevés et les plus bas ne peuvent être ceux des corps non chargés.

Le potentiel le plus élevé doit donc être p_{rr}, c'est-à-dire celui du corps chargé A_r; le plus bas doit être celui des points de l'espace situés à une distance infinie, lequel est nul; et tous les autres potentiels, tels que p_{rs}, doivent être compris entre p_{rr} et zéro.

Si A_s entoure complètement A_t, $p_{rs} = p_{rt}$.

89 *c. Aucun des coefficients d'induction n'est positif; et la somme de tous ceux qui sont relatifs à un même conducteur ne peut être numériquement plus grande que le coefficient de capacité de ce conducteur, lequel est toujours positif.*

Soit en effet A_r maintenu au potentiel 1, pendant que tous les autres conducteurs sont maintenus au potentiel zéro; la charge de A_r est q_{rr}, et celle d'un autre conducteur A_s est q_{rs}.

Le nombre de lignes de force qui sortent de A_r est q_{rr}. De ces lignes, les unes finissent sur les autres conducteurs, les autres s'étendent à l'infini; mais aucune d'elles ne peut joindre deux des autres conducteurs, ou aller de l'un d'eux à l'infini, car ils sont tous au potentiel zéro.

Aucune ligne de force ne peut émaner d'un des autres conducteurs, tel que A_s, car aucun point du champ n'a un potentiel inférieur à celui de A_r. Si A_s est complètement séparé de A_r par la surface fermée d'un des conducteurs, q_{rs} est nul. Si A_s n'est pas complètement séparé, q_{rs} est une quantité négative.

Si un des conducteurs A_t entoure complètement A_r, toutes les lignes de forces partant de A_r rencontrent A_t et les conducteurs qu'il renferme, et la somme des coefficients d'induction de ces conducteurs, par rapport à A_r, sera q_{rr} avec le signe contraire. Mais, si A_r n'est pas complètement entouré par un conducteur, la somme des coefficients $q_{rt}, \ldots$ sera inférieure à q_{rr}.

Nous avons déduit ces deux théorèmes indépendamment par des considérations d'électricité. Nous laissons au lecteur le soin de déterminer si l'un est une conséquence mathématique de l'autre.

89 *d.* Quand il n'y a qu'un conducteur dans le champ, son coefficient de potentiel sur lui-même est l'inverse de sa capacité.

On appelle *centre électrique du conducteur* le centre de masse de sa charge, quand il n'y a point d'actions extérieures. Si le conduc-

teur est symétrique autour d'un centre de figure, ce point est le centre électrique. Si les dimensions du conducteur sont petites en comparaison des distances que l'on considère, la position du centre électrique peut être appréciée de sentiment avec une exactitude suffisante.

Le potentiel, à une distance c du centre électrique, doit être compris entre

$$\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right),$$

où e est la charge et a la distance maximum d'un point du corps au centre électrique (1).

En effet, si la charge est concentrée en deux points, à des distances a de part et d'autre du centre électrique, la première de ces expressions est le potentiel d'un point de la ligne qui joint les charges; et la deuxième expression est le potentiel d'un point de la ligne perpendiculaire à la ligne qui joint les charges. Pour toutes les autres distributions, comprises à l'intérieur d'une sphère de rayon a, le potentiel est compris entre ces deux valeurs.

S'il y a deux conducteurs dans le champ, le coefficient de potentiel de l'un sur l'autre est $\frac{1}{c'}$, où c' ne peut différer de c, distance des deux centres électriques, de plus de $\frac{a^2+b^2}{c^2}$, a et b étant les distances maximum d'un point de chaque surface au centre électrique correspondant.

89 *e*. Si un nouveau conducteur est introduit dans le champ, le coefficient de potentiel d'un quelconque des autres sur lui-même diminue.

En effet, supposons d'abord que le nouveau corps B soit un corps non conducteur et n'ait de charge en aucun de ses points. Alors, si un des conducteurs A_1 reçoit une charge e_1, la distribution de l'électricité sur les conducteurs du système ne sera pas troublée par B, puisque B n'a toujours point de charge; et l'énergie électrique du système sera simplement

$$\tfrac{1}{2} e_1 V_1 = \tfrac{1}{2} e_1^2 p_{11}.$$

Supposons maintenant que B devienne un conducteur; de l'électri-

(1) [Ces expressions sont respectivement les deux premiers termes du développement de $\frac{e}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c-a}\right)$ et de $\frac{e}{\sqrt{a^2+c^2}}$, suivant les puissances ascendantes de a. (P.)].

cité s'écoulera des points où le potentiel est le plus haut à ceux où il est le plus bas; et, ce faisant, elle diminue l'énergie électrique du système. La quantité $\frac{1}{2}e_1^2 p_{11}$ doit donc décroître.

Mais e_1 reste constant, donc p_{11} doit diminuer.

Si *donc on augmente* B, *en mettant un autre corps* b *en contact* avec lui, p_{11} diminuera encore.

Car, supposant d'abord qu'il n'y ait pas de communication électrique entre B et b, l'introduction du nouveau corps diminuera p_{11}. Établissons une communication entre B et b. S'il passe de l'électricité par cette communication, elle va des points où le potentiel est le plus élevé à ceux où il est moins élevé et, par suite, diminue encore p_{11}, *ainsi que nous l'avons vu.*

Donc la diminution de p_{11}, produite par le corps B, est plus grande que celle que produirait tout autre corps dont la surface peut être comprise dans B, et plus petite que celle que produirait tout autre corps dont la surface peut entourer B.

Nous montrerons au Chapitre XI qu'une sphère de diamètre b étant placée à une distance r, la valeur de p_{11} diminue d'une quantité qui est à peu près $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^3}$.

Donc si le corps B a une forme quelconque, dont b est le plus grand diamètre, la diminution de p_{11} sera moindre que $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^3}$.

Si donc le plus grand diamètre de B est assez petit en comparaison de la distance à A_1, pour que l'on puisse négliger les quantités de l'ordre de $\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^3}$, nous pouvons admettre que l'inverse de la capacité de A_1, placé seul dans le champ, nous donne une approximation suffisante de la valeur de p_{11}.

90 a. Supposons que la capacité de A_1, seul au milieu du champ, soit K_1, et que celle de A_2 soit K_2; soit r la distance moyenne entre A_1 et A_2, *et admettons que* r *soit très grand en comparaison des dimensions de* A_1 et A_2. Nous pouvons écrire alors

$$p_{11} = \frac{1}{K_1}, \quad p_{12} = \frac{1}{r}, \quad p_{22} = \frac{1}{K_2},$$

$$V_1 = e_1 K_1^{-1} + e_2 r^{-1},$$

$$V_2 = e_1 r^{-1} + e_2 K_2^{-1};$$

d'où

$$q_{11} = K_1(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{12} = -K_1 K_2 r^{-1}(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{22} = K_2(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1}.$$

De ces coefficients, q_{11} et q_{22} sont les capacités de A_1 et A_2, lorsque ces corps, au lieu d'être seuls et à une distance infinie de tout autre conducteur, sont mis en présence à une distance r l'un de l'autre.

90 *b*. Quand deux conducteurs sont assez voisins pour que le coefficient d'induction de l'un sur l'autre soit considérable, l'ensemble des deux est appelé un *condensateur*.

Soient A et B les deux conducteurs ou armatures d'un condensateur.

Soient L la capacité de A, N celle de B et M le coefficient d'induction de l'un sur l'autre. (Nous devons nous souvenir que M est essentiellement négatif, de sorte que la valeur numérique de L + M ou de M + N est inférieure à celle de L ou N.)

Supposons que a et b soient les armatures d'un autre condensateur placé à une distance R du premier, R étant très grand en comparaison des dimensions de chacun des condensateurs et soient l, m, n les coefficients de capacité et d'induction du condensateur ab, lorsqu'il est seul. Calculons l'effet d'un de ces condensateurs sur les coefficients de l'autre.

Posons

$$D = LN - M^2 \quad \text{et} \quad d = ln - m^2.$$

Les coefficients de potentiel de chaque condensateur pris isolément seront

$$\begin{aligned} p_{AA} &= D^{-1}N, \quad p_{aa} = d^{-1}n, \\ p_{AB} &= -D^{-1}M, \quad p_{ab} = d^{-1}m, \\ p_{BB} &= D^{-1}L, \quad p_{bb} = d^{-1}l. \end{aligned}$$

La valeur de ces coefficients ne sera pas sensiblement changée, si les deux condensateurs sont à la distance R. Or le coefficient de potentiel de deux conducteurs quelconques placés à la distance R est R^{-1}. Donc

$$p_{Aa} = p_{Ab} = p_{Ba} = p_{Bb} = R^{-1}.$$

Les équations aux potentiels seront donc

$$\begin{aligned} V_A &= D^{-1}Ne_A - D^{-1}Me_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b, \\ V_B &= -D^{-1}Me_A - D^{-1}Le_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b, \\ V_a &= R^{-1}e_A + R^{-1}e_B + d^{-1}ne_a - d^{-1}me_b, \\ V_b &= R^{-1}e_A + R^{-2}e_B + d^{-1}me_a + d^{-1}le_b, \end{aligned}$$

et, en résolvant ces équations par rapport aux charges, nous trou-

vons

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{AB} = M' = M + \frac{(L+M)(N+M)(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{Aa} = -\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$

$$q_{Ab} = -\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$

où L', M', N' sont ce que deviennent L, M, N, quand le second condensateur est introduit dans le champ.

Si l'on n'introduit dans le champ qu'un seul conducteur a, $m=n=0$, et

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2 l}{R^2-l(L+2M+N)},$$

$$q_{AB} = M' = M + \frac{(L+M)(M+N)l}{R^2-l(L+2M+N)},$$

$$q_{Aa} = -\frac{Rl(L+M)}{R^2-l(L+2M+N)}.$$

S'il n'y a que les deux conducteurs ordinaires A et a,

$$M = N = m = n = 0$$

et

$$q_{AA} = L + \frac{L^2 l}{R^2-Ll}, \quad q_{Aa} = -\frac{RLl}{R^2-Ll},$$

expressions semblables à celles que l'on a trouvées au § 90 *a*.

La quantité $L+2M+N$ est la charge totale du condensateur, quand ses armatures sont toutes deux au potentiel 1. Elle ne peut être supérieure à la moitié du plus grand diamètre du condensateur.

$L+M$ est la charge de la première armature, $M+N$ celle de la seconde, lorsque toutes deux sont au potentiel 1. Ces quantités doivent être l'une et l'autre positives et inférieures à la capacité de l'armature prise seule. Par suite, les corrections à faire porter sur les coefficients de potentiel sont bien moindres pour un condensateur que pour un conducteur ordinaire de même capacité.

Des approximations de ce genre sont souvent utiles pour évaluer la capacité de conducteurs de forme irrégulière, placés à une distance finie d'autres conducteurs.

91. Lorsqu'un conducteur rond A_3, dont les dimensions sont petites en comparaison de la distance des conducteurs, est introduit dans le champ, le coefficient de potentiel de A_1 sur A_2 augmente si A_3 est à

l'intérieur d'une sphère ayant pour diamètre la ligne droite A_1A_2; il diminue si A_3 est extérieur à cette sphère.

En effet, si A_1 reçoit l'unité de charge, il y aura sur A_2 une distribution d'électricité, où $+e$ sera du côté le plus éloigné de A_1, et $-e$ du côté le plus rapproché. Le potentiel sur A_2, dû à cette distribution de A_2, sera positif ou négatif, selon que $+e$ ou $-e$ est plus voisin de A_2; et si la forme de A_2 n'est pas très allongée, cette position dépendra de la question de savoir si l'angle $A_1A_2A_3$ est aigu ou obtus, c'est-à-dire si A_3 est extérieur ou intérieur à la sphère de rayon A_1A_2.

Si A_2 a une forme allongée, il est aisé de voir que s'il a son diamètre le plus long dirigé suivant la tangente au cercle passant par les points A_1, A_2, A_3, il peut accroître le potentiel de A_2, lors même qu'il serait entièrement extérieur à la sphère; et si son diamètre le plus long est dirigé suivant le rayon de la sphère, il peut diminuer le potentiel sur A_2, lors même qu'il serait entièrement intérieur à la sphère. Mais cette proposition n'est destinée qu'à donner une idée grossière des phénomènes auxquels on doit s'attendre pour une disposition d'appareil donnée.

92. Si un nouveau conducteur A_3 est introduit dans le champ, les capacités de tous les conducteurs qui y étaient déjà augmentent, et la valeur numérique du coefficient d'induction relatif à chaque couple de conducteurs diminue.

Supposons que A_1 soit au potentiel 1, et tous les autres au potentiel zéro. Puisque la charge du nouveau conducteur est négative, elle induira une charge positive sur tous les autres conducteurs : par suite, la charge positive de A_1 augmentera, et la charge négative de tous les autres conducteurs diminuera.

Travail des forces électriques pendant le déplacement d'un système de conducteurs isolés et électrisés.

93 *a*. Puisque les conducteurs sont isolés, leurs charges restent constantes pendant le déplacement. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les potentiels avant, $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$ les potentiels après le déplacement. L'énergie électrique avant le déplacement est

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma(eV)$$

et, après le déplacement,

$$W' = \tfrac{1}{2}\Sigma(eV').$$

Le travail des forces électriques, pendant le déplacement, est égal

à l'excès de l'énergie électrique initiale W sur l'énergie finale W', soit

$$W - W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e(V - V').$$

Cette expression donne le travail effectué durant le déplacement, grand ou petit, d'un système isolé.

Pour trouver la force qui tend à produire un déplacement d'une espèce particulière, appelons φ la variable dont la variation correspond à cette sorte de déplacement, et Φ la force correspondante, comptée positivement lorsque la force électrique tend à accroître φ; alors

$$\Phi\, d\varphi = -\, dW_e$$

ou

$$\Phi = -\frac{dW_e}{d\varphi},$$

où W_e représente l'énergie électrique exprimée comme fonction quadratique des charges (¹).

93 *b. Démontrer que*

$$\frac{\partial W_e}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_v}{\partial \varphi} = 0.$$

Nous avons trois expressions différentes de l'énergie du système :

1°
$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma(Ve),$$

fonction définie des n charges et des n potentiels;

2°
$$W_e = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(e_r e_s p_{rs}),$$

où r et s peuvent être les mêmes ou différents, et où rs et sr doivent être compris tous deux dans la sommation. C'est une fonction des n charges et des variables qui définissent la configuration du système. Soit φ une de ces variables;

3°
$$W_v = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(V_r V_s q_{rs}),$$

où la sommation doit être faite comme plus haut. C'est une fonction des n potentiels et de variables qui définissent la configuration du système; φ est l'une d'elles.

Puisque

$$W = W_e = W_v,$$
$$W_e + W_v - 2W = 0.$$

(¹) [Il est clair que Φ est la composante de la force suivant la direction du déplacement $d\varphi$, quand on prend pour φ une longueur; mais si $d\varphi$ représente un déplacement angulaire autour d'un axe, Φ sera le moment des forces électriques autour de cet axe. (P.)]

Si nous supposons pour les n charges, pour les n potentiels et pour φ des variations compatibles, nous devrons avoir

$$\Sigma\left[\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_r}-V_r\right)\delta e_r\right]+\Sigma\left[\left(\frac{\partial W_V}{\partial V_s}-e_s\right)\delta V_s\right]+\left(\frac{\partial W_e}{\partial\varphi}+\frac{\partial W_V}{\partial\varphi}\right)\delta\varphi=0.$$

Or les n charges, les n potentiels et φ ne sont pas tous indépendants les uns des autres : il n'y a que $n+1$ de ces quantités qui puissent être indépendantes. Mais nous avons déjà démontré que

$$\frac{\partial W_e}{\partial e_r}=V_r,$$

et que, par suite, la première somme de termes s'annule identiquement ; il résulte de là, lors même que nous ne l'aurions pas encore démontré, que

$$\frac{\partial W_V}{\partial V_s}=e_s,$$

et enfin que,

$$\frac{\partial W_e}{\partial\varphi}+\frac{\partial W_V}{\partial\varphi}=0 \quad (1).$$

Travail des forces électriques pendant le déplacement d'un système dont les potentiels sont maintenus constants.

93 *c*. De la dernière équation, il résulte que la force $\Phi=\dfrac{dW_V}{d\varphi}$; et, si le système est déplacé, sous la condition que les potentiels restent constants, le travail des forces électriques est

$$\int\Phi\,d\varphi=\int dW_V=W'_V-W_V,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, le travail des forces électriques est égal à l'*accroissement* de l'énergie électrique.

Ici, nous avons donc à la fois un accroissement d'énergie et un travail effectué par le système. Il faut donc que le système reçoive de l'énergie d'une source extérieure, telle qu'une pile voltaïque, pour maintenir les potentiels constants pendant le déplacement.

---

(1) [*Exemple* : Si le système se réduit à deux masses e et e' séparées par la distance r, on aura

$$V=\frac{e'}{r},\quad V'=\frac{e}{r},\quad W=\frac{1}{2}[eV+e'V'],\quad W_e=\frac{ee'}{r},\quad W_V=rVV',$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial r}=-\frac{ee'}{r^2}=-VV'=-\frac{\partial W_V}{\partial r}.$$

(P.)]

Le travail effectué par la pile est donc égal à la somme du travail du système et de l'accroissement d'énergie; ou bien, puisque ces deux termes sont égaux, le travail de la pile est égal au double du travail du système de conducteurs pendant son déplacement.

De la comparaison des systèmes électrisés semblables.

94. Si deux systèmes électrisés sont semblables, au sens géométrique du mot, et que les longueurs des lignes correspondantes des deux systèmes soient entre elles comme L est à L'; et si le diélectrique qui sépare les corps conducteurs est le même dans les deux systèmes, les coefficients d'induction et de capacité seront dans le rapport de L à L'. En effet, considérons des parties A et A' correspondantes dans les deux systèmes; soient e et e' les quantités d'électricité sur A et sur A'; les potentiels dus à ces charges seront, pour des points correspondants B et B',

$$V = \frac{e}{AB}, \quad V' = \frac{e'}{A'B'}.$$

Mais, puisque AB est à A'B' comme L est à L', nous devons avoir

$$\frac{e}{e'} = \frac{LV}{L'V'}.$$

Si le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique n'est pas le même dans les deux systèmes, et qu'il soit K dans le premier et K' dans le second; si le potentiel en un point du premier système est au potentiel au point correspondant du second système comme V est à V'; et si les quantités d'électricité réparties sur les parties correspondantes sont entre elles comme E est à E', nous aurons

$$\frac{e}{e'} = \frac{LVK}{L'V'K'}.$$

Au moyen de cette relation, nous pouvons trouver les charges totales des parties correspondantes dans deux systèmes qui : 1° sont géométriquement semblables; 2° sont formés de diélectriques dont les pouvoirs inducteurs spécifiques aux points correspondants sont dans le rapport de K à K'; 3° sont électrisés de façon que les potentiels des points correspondants soient dans le rapport de V à V'.

De là il résulte que, si q est un coefficient de capacité ou d'induction du premier système et q' le correspondant du second système,

$$\frac{q}{q'} = \frac{LK}{L'K'};$$

et si p et p' représentent deux coefficients de potentiel correspondants dans les deux systèmes,

$$p : p' :: \frac{1}{LK} : \frac{1}{L'K'}.$$

Si l'un des corps est déplacé dans le premier système et que le corps correspondant du second système reçoive un déplacement semblable, ces déplacements sont dans le rapport de L à L′; et si les forces agissantes sont dans le rapport de F à F′, les travaux effectués dans les deux systèmes sont entre eux comme FL est à F′L′.

Mais l'énergie électrique totale est la demi-somme des produits des charges par les potentiels des corps chargés; de sorte que si, dans les systèmes semblables, W et W′ sont les énergies électriques totales des deux systèmes,

$$\frac{W}{W'} = \frac{eV}{e'V'},$$

et la différence d'énergie, après des déplacements semblables dans les deux systèmes, sera dans le même rapport. Donc, si FL est proportionnel au travail électrique effectué pendant le déplacement,

$$\frac{FL}{F'L'} = \frac{eV}{e'V'}.$$

En combinant ces proportions, nous trouvons pour le rapport de la force résultante agissant sur un corps du premier système à la force résultante agissant sur le corps correspondant du second système

$$\frac{F}{F'} = \frac{V^2K}{V'^2K'}$$

ou

$$F : F' :: \frac{e^2}{L^2K} : \frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

La première de ces proportions montre que, dans des systèmes semblables, la force est proportionnelle au carré de la force électromotrice et au pouvoir inducteur, mais qu'elle ne dépend pas des dimensions linéaires du système.

Donc, deux conducteurs placés dans un liquide dont la capacité inductive est plus grande que celle de l'air, et électrisés à des potentiels donnés, s'attireront plus qu'ils n'auraient fait dans l'air, étant électrisés au même potentiel.

La seconde proportion montre que, si la quantité d'électricité est donnée pour chaque corps, les forces sont en raison directe du carré

des charges, et en raison inverse du carré de la distance et du simple pouvoir inducteur du milieu.

Donc, si deux conducteurs, ayant des charges données, sont placés dans un liquide dont le pouvoir inducteur est plus grand que celui de l'air, ils s'attireront moins que s'ils étaient entourés d'air et chargés des mêmes quantités d'électricité.

CHAPITRE IV [1].

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

95 *a*. Dans le Chapitre II, nous avons calculé la fonction potentielle et étudié quelques-unes de ses propriétés, en partant de l'hypothèse, qu'il existe entre les corps électrisés une action directe à distance, résultante des actions directes qui s'exercent entre les différentes parties électrisées des corps.

Si l'on appelle méthode de recherche directe une étude ainsi faite, la méthode inverse consistera à admettre que le potentiel est une fonction caractérisée par ces mêmes propriétés que nous avons déjà établies, et à rechercher la forme de cette fonction.

Dans la méthode directe, le potentiel se calcule par intégration, connaissant la distribution de l'électricité; et l'on trouve qu'il satisfait à certaines équations aux différences partielles. Dans la méthode inverse, on suppose données les équations aux différences partielles, et l'on doit trouver le potentiel et la distribution de l'électricité.

C'est seulement dans les problèmes où la distribution est donnée, que l'on peut faire usage de la méthode directe. Quand il s'agit de trouver la distribution sur un conducteur, on est forcé de recourir à la méthode inverse.

Nous allons montrer que, dans tous les cas, la méthode inverse conduit à un résultat déterminé, et nous établirons certains théorèmes généraux déduits de l'équation aux différences partielles de Poisson :

$$\frac{\partial^2 V}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Les idées mathématiques, exprimées par cette équation, sont d'une nature toute différente de celles qu'exprime l'intégrale définie

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r}\, dx'\, dy'\, dz'.$$

[1] [Le lecteur peut sans inconvénient dans une première lecture passer les Chapitres IV et V, qui ne renferment que des développements purement mathématiques.] (C.)

Dans l'équation différentielle, nous exprimons que la somme des dérivées secondes de V, dans le voisinage d'un point, est liée d'une certaine manière à la densité en ce point; mais nous n'exprimons pas de relation entre la valeur de V en ce point et la valeur de ρ en un point de distance finie du premier.

Au contraire, dans l'intégrale définie, la distance du point (x', y', z'), pour lequel on a ρ, au point (x, y, z), pour lequel on a V, est désignée par r et intervient explicitement dans l'expression à intégrer.

L'intégrale est donc la forme mathématique qui convient pour la théorie d'une action s'exerçant à distance entre les molécules, tandis que l'équation différentielle est l'expression qui convient pour la théorie d'une action s'exerçant entre les parties contiguës d'un milieu.

Nous avons vu que le résultat de l'intégration satisfait à l'équation différentielle; nous avons maintenant à montrer que c'est la seule solution de cette équation qui satisfasse à certaines conditions.

De la sorte, non seulement nous établirons l'équivalence mathématique des deux expressions, mais encore nous préparerons notre esprit à passer de la théorie d'une action directe à distance, à celle d'une action entre les parties contiguës d'un milieu.

93 *b*. Les théorèmes considérés dans ce Chapitre sont relatifs aux propriétés de certaines intégrales de volume prises dans l'étendue d'une région finie de l'espace que nous désignerons sous le nom de *champ électrique*.

L'élément de ces intégrales, c'est-à-dire la quantité sous le signe $\int$, est tantôt le carré d'un certain vecteur dont la grandeur et la direction varient d'un point à l'autre du champ; tantôt le produit d'un vecteur par la composante d'un autre vecteur suivant la direction du premier.

Des différentes manières dont une quantité vectorielle peut être distribuée dans l'espace, deux sont d'une importance particulière.

Le premier cas est celui où le vecteur peut être représenté par la variation dans l'espace (§ 17) d'une quantité scalaire appelée le *potentiel*.

Une telle distribution peut être appelée *irrotationnelle*. Telle est la distribution de la force résultante due à la combinaison d'un certain nombre de centres de force, dont la loi d'attraction ou de répulsion est une fonction donnée de la distance.

Le second mode de distribution est celui où la convergence (§ 25) est nulle en tous les points. Cette distribution peut être appelée *solénoïdale*: la vitesse d'un fluide incompressible a une distribution solénoïdale.

Si les forces centrales, lesquelles, avons-nous dit, donnent lieu à une

distribution irrotationnelle de la force résultante, varient en raison inverse du carré de la distance, et si les centres sont extérieurs au champ, la distribution dans le champ est solénoïdale en même temps qu'irrotationnelle.

Si le mouvement d'un fluide incompressible, qui est solénoïdal, ainsi que nous l'avons dit, est produit par des forces centrales dépendant de la distance, ou par des pressions superficielles s'exerçant sur un fluide sans frottement et primitivement en repos, la distribution de la vitesse est irrotationnelle aussi bien que solénoïdale.

Quand nous aurons à désigner une distribution à la fois irrotationnelle et solénoïdale, nous la désignerons sous le nom de *distribution de Laplace*, Laplace ayant signalé quelques-unes des propriétés les plus importantes d'une telle distribution.

Les intégrales de volume discutées dans ce Chapitre sont, ainsi que nous le verrons, des expressions de l'énergie du champ électrique. Dans le premier groupe de théorèmes, qui commence au théorème de Green, l'énergie est exprimée en fonction de l'intensité électromotrice, vecteur dont la distribution est irrotationnelle dans les cas d'équilibre électrique. Et l'on fait voir que, le potentiel à la surface étant donné, de toutes les distributions irrotationnelles, celle qui est aussi solénoïdale a une énergie minimum : d'où il suit qu'il ne peut y avoir qu'une seule distribution de Laplace compatible avec un système de potentiels à la surface donné.

Dans le second groupe de théorèmes, qui comprend le théorème de Thomson, l'énergie est exprimée en fonction du déplacement électrique, vecteur dont la distribution est solénoïdale. Et l'on fait voir que, si les charges des surfaces sont données, de toutes les distributions solénoïdales, celle qui a l'énergie minimum est aussi irrotationnelle; donc, là encore, il ne peut exister qu'une seule distribution de Laplace compatible avec le système de charges donné.

La démonstration de tous ces théorèmes est conduite de la même façon. Pour éviter des redites, chaque fois que l'on devra passer par une intégration de surface faite en coordonnées rectangulaires, nous ferons usage du résultat du théorème III, § 21 (1), où a été étudiée complètement la relation d'une intégrale de volume et de l'intégrale de surface correspondante. Tout ce que nous aurons à faire sera donc

(1) Ce théorème paraît avoir été donné, pour la première fois, par Ostrogradsky, dans un Mémoire lu en 1828 et inséré en 1831 dans les *Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. I, p. 39; mais on peut le regarder comme une forme de l'équation de continuité.

de substituer dans ce théorème, à X, Y, Z, les composantes du vecteur duquel dépend le théorème particulier que l'on considère.

Dans la première édition de ce livre, l'énoncé de chaque théorème était surchargé d'une multitude de conditions alternatives; on avait eu pour but de montrer la généralité du théorème et la variété des cas auxquels il pouvait s'appliquer; en fait, elles avaient plutôt pour effet de confondre, dans l'esprit du lecteur, ce qui était l'hypothèse et ce qui était à démontrer.

Cette fois, chaque théorème est d'abord énoncé sous une forme moins étendue, mais mieux définie, et c'est ensuite que l'on montre de quel degré de généralité il est susceptible.

Jusqu'ici, nous avons employé le symbole V pour le potentiel, et nous continuerons ainsi, tant que nous ne ferons que de l'électrostatique. Mais, dans ce Chapitre et dans les parties du second Volume où le potentiel électrique se rencontre dans des recherches électromagnétiques, nous emploierons le symbole Ψ pour désigner spécialement le potentiel électrique.

Théorème de Green.

96 *a*. L'important théorème qui suit a été donné par Georges Green dans son *Essai d'application des Mathématiques à l'électricité et au magnétisme*.

Ce théorème est relatif à l'espace limité par une surface fermée s, espace que nous appellerons le *champ*. Soit ν la normale menée de la surface s vers l'intérieur du champ, et soient l, m, n les cosinus directeurs de cette normale; alors

$$(1) \qquad l\frac{\partial\Psi}{\partial x} + m\frac{\partial\Psi}{\partial y} + n\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{d\Psi}{d\nu}$$

sera le taux de variation de la fonction Ψ, lorsqu'on s'avance sur la normale ν. Il est entendu que l'on prendra la valeur de $\frac{d\Psi}{d\nu}$ sur la surface même, où $\nu = 0$. Posons, comme aux § 26 et 77,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -\nabla^2\Psi,$$

et, s'il y a deux fonctions Ψ et Φ, posons

$$(3) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -S.\nabla\Psi.\nabla\Phi.$$

Le lecteur qui n'est pas familier avec la méthode des quaternions peut, s'il le veut, regarder les expressions $\nabla^2\Psi$ et $S.\nabla\Psi.\nabla\Phi$ comme

étant simplement des abréviations conventionnelles pour les expressions auxquelles on vient de les égaler; et, comme on n'emploiera dans ce qui suit que les méthodes cartésiennes ordinaires, il n'est pas nécessaire de se rappeler l'interprétation de ces expressions dans la théorie des quaternions. La raison pour laquelle nous employons comme abréviations ces expressions, de préférence à de simples lettres arbitrairement choisies, est que dans le langage des quaternions elles représentent complètement les quantités auxquelles elles sont égalées. Le symbole d'opération ∇ appliqué à la fonction scalaire Ψ donne la variation de cette fonction dans l'espace, et l'expression $-S.\nabla\Psi.\nabla\Phi$ est la partie scalaire du produit de deux variations dans l'espace, ou le produit d'une de ces variations par la composante de l'autre suivant sa direction. L'expression $\frac{d\Psi}{dv}$ s'écrit ordinairement dans les quaternions $S.\mathrm{U}v.\nabla\Psi$, $\mathrm{U}v$ étant un vecteur unité dans la direction de la normale. Il ne paraît pas y avoir grand avantage à employer cette notation ici; mais nous trouverons cet avantage quand nous en viendrons à parler des milieux non isotropes.

Énoncé du théorème de Green.

Soient Ψ et Φ deux fonctions de x, y et z, qui sont, ainsi que leurs dérivées premières, finies et continues dans une certaine région acyclique ς limitée par une surface fermée s. Alors

$$4)\quad \begin{aligned} &\iint\int \Psi \frac{d\Phi}{dv}\,ds - \iiint \Psi.\nabla^2\Phi.d\varsigma \\ &\quad = \iiint S.\nabla\Psi.\nabla\Phi.d\varsigma = \iint \Phi \frac{d\Psi}{dv}\,ds - \iiint \Phi\nabla^2\Psi.d\varsigma, \end{aligned}$$

où les intégrales doubles doivent être étendues sur toute la surface s, et les intégrales triples dans tout le champ ς limité par cette surface.

Pour établir cette proposition, posons, comme au § 21, théorème III,

$$(5)\qquad \mathrm{X} = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \mathrm{Y} = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \mathrm{Z} = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Alors

$$(6)\qquad \mathrm{R}\cos\varepsilon = \Psi\left(l\frac{\partial\Phi}{\partial x} + m\frac{\partial\Phi}{\partial y} + n\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu},$$

d'après (1), et

$$(7)\quad \begin{aligned} \frac{\partial\mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial z} &= \Psi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\Psi.\nabla^2\Phi - S.\nabla\Psi.\nabla\Phi \end{aligned}$$

d'après (2) et (3).

Mais, d'après le théorème III,

$$(5)\qquad \iint \mathrm{R}\cos\varepsilon\, ds = -\iiint \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\right) d\varsigma$$

ou, d'après (6) et (7),

$$(8)\qquad \iint \Psi \frac{d\Phi}{dv}\, ds - \iiint \Psi.\nabla^2\Phi.\, ds = \iiint \mathrm{S}.\nabla\Psi\,\nabla\Phi.\, d\varsigma,$$

et puisque, dans le second membre de cette équation, nous pouvons échanger Ψ et Φ, nous pouvons le faire aussi dans le premier membre, et nous obtenons ainsi l'énoncé complet du théorème de Green donné dans l'équation (4).

96 *a*. Nous avons maintenant à montrer que le théorème de Green est encore vrai, si l'une des fonctions, Ψ par exemple, est multiforme, pourvu que ses dérivées premières soient uniformes et finies à l'intérieur de la région acyclique ς.

Puisque $\nabla\Psi$ et $\nabla\Phi$ sont uniformes, le second membre de l'équation (4) est uniforme; et puisque Ψ est multiforme, un élément quelconque du premier membre, tel que $\Psi\nabla^2\Phi$, est multiforme. Mais, si pour un point A compris dans la région ς nous choisissons une des différentes valeurs de Ψ, soit Ψ_0, la valeur de Ψ sera définie en tout autre point P. Car la valeur choisie de Ψ étant continue dans la région, la valeur de Ψ au point P devra être celle que l'on obtient par une variation continue le long d'un contour quelconque allant de A en P, en partant en A de la valeur de Ψ_0. Si les valeurs en P étaient différentes pour deux contours allant de A en P, ces contours devraient comprendre entre eux une courbe fermée le long de laquelle les dérivées premières de Ψ deviennent infinies. Or c'est contraire à l'hypothèse, car puisque les dérivées premières ne deviennent pas infinies dans la région ς, la courbe fermée est tout entière en dehors de la région; et, puisque la région est acyclique, deux contours compris dans la région, ne peuvent enfermer rien qui soit extérieur à la région.

Donc, si l'on donne Ψ_0 comme valeur de Ψ au point A, la valeur en P est déterminée.

Si l'on avait choisi pour valeur en A une autre valeur de Ψ, soit $\Psi_0 + n\mathrm{K}$, la valeur en P aurait été $\Psi + n\mathrm{K}$. Mais la valeur du premier membre de l'équation (4) serait restée la même que précédemment, car le changement revient à augmenter le premier

membre de

$$n\,\mathrm{K}\left[\iint \frac{d\Phi}{dv}\,ds - \iiint \nabla^2\Phi\,.\,d\varsigma\right],$$

ce qui est égal à zéro, d'après le théorème III.

96 *c*. Si la région ς a des connexions doubles ou multiples, on peut la ramener à être acyclique, en fermant chacun de ses circuits par un diaphragme.

Soient s_1 l'un de ces diaphragmes et K_1 la constante cyclique correspondante, c'est-à-dire la quantité dont croît Ψ, lorsqu'on décrit une fois le circuit en marchant dans le sens positif. Puisque la région ς s'étend des deux côtés du diaphragme s_1, chaque élément de s_1 paraîtra deux fois dans l'intégrale de surface.

Si nous supposons la normale ν_1 tracée du côté positif de ds_1 et ν'_1 menée du côté négatif,

$$\frac{d\Phi}{d\nu'_1} = -\frac{d\Phi}{d\nu_1}$$

et

$$\Psi'_1 = \Psi_1 + \mathrm{K}_1$$

en sorte que l'élément de l'intégrale de surface correspondant à ds_1 sera

$$\Psi_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1}\,ds_1 + \Psi'_1 \frac{d\Phi}{d\nu'_1}\,ds_1 = -\mathrm{K}_1 \frac{d\Phi}{d\nu_1}\,ds_1.$$

Si donc la région *s* a des connexions multiples, le premier membre de l'équation (4) devra s'écrire

$$(4\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv}\,ds - \mathrm{K}_1 \iint \frac{d\Phi}{d\nu_1}\,ds_1 - \dots \\ &\qquad - \mathrm{K}_n \iint \frac{d\Phi}{d\nu_n}\,ds_n - \iiint \Psi\,.\,\nabla^2\Phi\,.\,ds, \end{aligned}\right.$$

la première intégrale de surface devant être prise sur la surface limite, et les suivantes sur les différents diaphragmes, chaque élément d'un diaphragme n'étant compté qu'une fois, et la normale étant menée dans le sens positif du circuit.

La nécessité de cette modification du théorème dans le cas des surfaces à connexions multiples a été signalée par Helmholtz (1), et la modification faite par Thomson (2).

---

(1) *Sur les intégrales des équations d'Hydrodynamique qui se présentent dans les mouvements tourbillonnaires* [*Journ. de Crelle*, 1858. Traduit par Tait, *Phil. Mag.*, 1867 (I)].

(2) *Sur le mouvement tourbillonnaire* (*Trans. Roy. Soc. Edinb.*, t. XXV, Part I, p. 2[1, 1867).

90 *d*. Supposons maintenant, avec Green, qu'une des fonctions, soit Φ, ne satisfasse pas à la condition de rester finie, ainsi que ses dérivées, à l'intérieur de la région donnée; mais qu'elle devienne infinie au point P, et en ce point seulement de la région, et que près de P la valeur de Φ soit $\Phi_0 + \frac{e}{r}$, où Φ_0 est une quantité finie et continue, et r est la distance au point P. Ce sera le cas, si Φ est le potentiel : 1° d'une quantité d'électricité e concentrée au point P; et 2° d'une quantité d'électricité distribuée de façon que sa densité de volume ne soit infinie en aucun point de la région considérée.

Supposons maintenant une sphère très petite, de rayon a, décrite du point P comme centre; alors, dans la région extérieure à la sphère, et intérieure à la surface s, Φ ne présente point de singularité, et l'on peut appliquer le théorème de Green, en se souvenant qu'il faut tenir compte de la surface de la petite sphère lorsqu'on prend l'intégrale de surface.

Pour prendre l'intégrale de volume, on retranchera de l'intégrale correspondant au volume de la région entière celle qui correspond au volume de la petite sphère.

Mais, pour cette sphère,

$$\iiint \Phi . \nabla^2 \Psi . dx\, dy\, dz$$

ne peut être numériquement plus grand que

$$(\nabla^2 \Psi)_g \iiint \Phi\, dx\, dy\, dz$$

ou que

$$(\nabla^2 \Psi)_g (2\pi e a^2 + \tfrac{1}{3}\pi a^3 \Phi_0),$$

l'indice g appliqué à une quantité désignant la plus grande des valeurs numériques de cette quantité à l'intérieur de la sphère.

Cette intégrale de volume est donc de l'ordre de a^2, et peut être négligée quand a décroît et finit par s'annuler.

L'autre intégrale de volume

$$\iiint \Psi . \nabla^2 \Phi . dx\, dy\, dz$$

ne peut être numériquement plus grande que

$$\Psi_g (\nabla^2 \Phi)_g \tfrac{1}{3}\pi a^3;$$

elle est donc de l'ordre de a^3 et peut être négligée quand a s'annule.

L'intégrale de surface

$$\int\int \Phi \frac{d\Psi}{dv}\, ds$$

ne peut être numériquement plus grande que

$$\Phi_g \int\int \frac{d\Psi}{dv}\, ds.$$

Or, d'après le théorème III,

$$\int\int \frac{d\Psi}{dv}\, ds = -\int\int\int \nabla^2\Psi . dx\, dy\, dz,$$

ce qui ne peut être numériquement plus grand que

$$(\nabla^2\Psi)_g \tfrac{1}{3}\pi a^3;$$

à la surface, Φ_g a à peu près la valeur $\frac{e}{a}$, de sorte que

$$\int\int \frac{d\Psi}{dv}\, ds$$

ne peut être numériquement plus grand que

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 e(\nabla^2\Psi)_g;$$

l'intégrale est donc de l'ordre de a^2, et peut être négligée quand a s'annule.

Mais l'intégrale de surface qui est dans le second membre de l'équation

$$\int\int \Psi \frac{d\Phi}{dv}\, ds$$

ne s'annule pas, car

$$\int\int \frac{d\Phi}{dv}\, ds = -4\pi e,$$

et, si Ψ_0 est la valeur de Ψ au point P,

$$\int\int \Psi \frac{d\Phi}{dv}\, ds = -4\pi e\Psi_0.$$

L'équation (4) devient donc, dans ce cas,

$$(4a) \qquad \begin{cases} \int\int \Psi \dfrac{d\Phi}{dv}\, ds - \int\int\int \Psi . \nabla^2\Phi . d\varsigma - 4\pi e\Psi_0 \\ \quad = \int\int \Phi \dfrac{d\Psi}{dv}\, ds - \int\int\int \Phi . \nabla^2\Psi . d\varsigma. \end{cases}$$

97 *a*. Nous pouvons appliquer ce cas du théorème de Green, ainsi

que fait Green lui-même, à la détermination de la densité superficielle dans une distribution qui produit un potentiel dont les valeurs sont données au dedans et au dehors d'une surface fermée donnée. Ces valeurs doivent se confondre sur la surface; à l'intérieur de la surface, on doit avoir $\nabla^2\Psi = 0$, et à l'extérieur $\nabla^2\Psi' = 0$.

Green commence par la méthode directe, c'est-à-dire que, étant donnée la distribution de la densité superficielle σ, il trouve les potentiels en un point intérieur P et en un point extérieur P', en intégrant les expressions

$$\Psi_P = \int\int \frac{\sigma}{r}\,ds, \quad \Psi'_P = \int\int \frac{\sigma}{r'}\,ds, \tag{9}$$

où r et r' sont mesurés à partir des points P et P'.

Soit maintenant $\Phi = \frac{1}{r}$. En appliquant le théorème de Green à l'espace intérieur à la surface, et en se rappelant que $\nabla^2\Phi = 0$ et que $\nabla^2\Psi = 0$, on trouve

$$\int\int \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{dv} - 4\pi\Psi_P\,ds = \int\int \frac{1}{r}\frac{d\Psi'}{dv'}\,ds, \tag{10}$$

où Ψ_P est la valeur de Ψ au point P.

De même, si nous appliquons le théorème à l'espace compris entre la surface s et une surface qui l'entoure à une distance infinie α, la partie de l'intégrale de surface correspondant à cette dernière surface sera de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$, et pourra être négligée; et l'on aura

$$\int\int \Psi' \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv'}\,ds = \int\int \frac{1}{r}\cdot\frac{d\Psi'}{dv'}\,ds. \tag{11}$$

Or $\Psi = \Psi'$ à la surface, et puisque les normales v et v' sont menées en sens inverses,

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv} + \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dv'} = 0.$$

Donc, en additionnant les équations (10) et (11), les seconds membres se déterminent l'un l'autre, et l'on a

$$-4\pi\Psi_P = \int\int \frac{1}{r}\left(\frac{d\Psi}{dv} - \frac{d\Psi'}{dv'}\right)ds. \tag{12}$$

97 *b*. Green démontre aussi que, si l'on se donne arbitrairement la valeur du potentiel en chaque point d'une surface fermée s, on peut

déterminer le potentiel en un point quelconque intérieur ou extérieur à la surface.

A cet effet, il suppose une fonction Φ, telle que sa valeur soit : près du point P, sensiblement égale à $\frac{1}{\rho}$; et, à la surface, égale à zéro; et que $\nabla^2\Phi = 0$ pour tout point intérieur à la surface.

Green démontre l'existence d'une pareille fonction par cette considération physique que, si s est une surface conductrice reliée à la terre, et si l'unité d'électricité est placée au point P, le potentiel à l'intérieur de s devra satisfaire aux conditions imposées. Car, s étant reliée à la terre, le potentiel sera nul en tous les points de s; et puisque le potentiel est dû à l'électricité de P et à l'électricité induite sur s, $\nabla^2\Phi = 0$ en tout point intérieur à la surface.

Appliquant à ce cas le théorème de Green, on trouve

$$4\pi\Psi_P = \iint \Psi \frac{d\Phi}{dv}\, ds \tag{13}$$

où, dans l'intégrale de surface, Ψ est la valeur du potentiel donnée pour l'élément ds; et, puisque, σ_P étant la densité de l'électricité induite sur s par l'unité d'électricité placée en P,

$$4\pi\sigma_P + \frac{d\Phi}{dv} = 0, \tag{14}$$

l'équation (13) peut s'écrire

$$\Psi_P = \iint \Psi . \sigma . ds,$$

où σ est la densité superficielle de la charge induite sur ds par l'unité d'électricité placée en P.

Donc, si pour une position particulière de P on connaît la valeur de σ en chaque point de la surface, on pourra calculer par une simple intégration le potentiel en P, dans l'hypothèse que l'on se donne le potentiel en chaque point de la surface, et qu'à l'intérieur de la surface le potentiel est soumis à la condition

$$\nabla^2\Psi = 0.$$

Nous démontrerons plus loin que, si l'on a obtenu une valeur de Ψ satisfaisant à ces conditions, cette valeur est la seule qui existe.

Fonction de Green.

98. Soit une surface fermée s, maintenue au potentiel zéro. Soient P et Q deux points du côté positif de la surface (nous pouvons prendre

à volonté l'intérieur ou l'extérieur par côté positif); et soit un petit corps chargé de l'unité d'électricité et placé en P. Le potentiel en Q sera formé de deux parties, l'une due à l'action directe de l'électricité de P, l'autre due à l'action de l'électricité induite par P sur s. Cette dernière partie du potentiel est appelée *fonction de Green*, et se désigne par G_{pq}.

Cette quantité est une fonction des positions des points P et Q, et sa forme dépend de la surface s. Elle a été calculée dans le cas où s est une sphère, et dans quelques autres très peu nombreux. Elle représente le potentiel au point Q dû à la charge induite sur s par l'unité d'électricité placée en P.

Le potentiel effectif en un point Q, dû tant à l'électricité placée en P qu'à la charge induite sur s, est

$$\frac{1}{r_{pq}} + G_{pq},$$

r_{pq} désignant la distance de P à Q.

Sur la surface s, et en tous les points situés du côté négatif de s, le potentiel est nul; donc

$$(1) \qquad G_{pa} = -\frac{1}{r_{pa}},$$

l'indice a indiquant qu'au lieu de Q on prend un point A sur la surface s.

Désignons par $\sigma_{pa'}$ la densité superficielle induite par P sur le point A′ de la surface s; G_{pq} étant le potentiel de Q dû à cette distribution superficielle

$$(2) \qquad G_{pq} = \int\int \frac{\sigma_{pa'}}{r_{qa'}}\, ds',$$

ds' étant un élément de la surface s pris au point A′, et l'intégration s'étendant à toute la surface s.

Mais, si l'unité d'électricité avait été placée en Q, nous aurions par l'équation (1)

$$(3) \qquad \frac{1}{r_{qa'}} = -G_{qa'},$$

$$(4) \qquad = -\int\int \frac{\sigma_{qa}}{r_{aa'}}\, ds,$$

σ_{qa} étant la densité de la charge induite en A par Q, ds un élément de surface, et $r_{aa'}$ la distance de A à A′.

Substituant dans l'expression de G_{pq} cette valeur de $\frac{1}{r_{qa'}}$, nous

trouvons

$$G_{pq} = -\iint\int\int \frac{\sigma_{qa}\,\sigma_{pa'}}{r_{aa'}}\,ds\,ds'. \tag{5}$$

Puisque cette expression n'est pas altérée, si nous changeons p en q et q en p, nous avons

$$G_{pq} = G_{qp}, \tag{6}$$

résultat dont nous avons déjà démontré la nécessité au § 87, mais que nous trouvons maintenant comme conséquence des opérations mathématiques par lesquelles on peut calculer la fonction de Green.

Supposons une distribution quelconque d'électricité, et plaçons dans le champ un point chargé de l'unité d'électricité; si la surface au potentiel zéro sépare entièrement le point de la distribution supposée, et que nous prenions cette surface pour surface s, et ce point pour point P, la fonction de Green en un point quelconque situé sur la surface du même côté que P est égale au potentiel de la distribution supposée sur le même point de l'autre côté de la surface. De la sorte, on peut combiner un nombre quelconque de cas, dans lesquels la fonction de Green peut être trouvée pour une position particulière de P. Quant à trouver la forme de la fonction, quand on se donne la forme de la surface et que la position du point P est arbitraire, c'est un problème d'une bien plus grande difficulté, quoique mathématiquement possible, ainsi que nous l'avons prouvé.

Si nous supposons le problème résolu, et le point P pris à l'intérieur de la surface, pour tous les points extérieurs le potentiel de la surface est égal et opposé à celui de P. La distribution superficielle est donc *centrobarique* (1) et son action sur tout point extérieur est la même que celle d'une unité d'électricité négative placée en P.

99 *a*. Si dans le théorème de Green nous faisons $\Psi = \Phi$, nous trouvons

$$\iint \Psi \frac{d\Psi}{dv}\,ds - \iint\int\int \Psi.\nabla^2\Psi.\,d\varsigma = \iint\int\int (\nabla^2\Psi)^2\,d\varsigma; \tag{16}$$

si Ψ est le potentiel dû à une distribution où l'électricité a dans l'espace la densité de volume ρ, et sur les conducteurs dont les surfaces sont $s_1, s_2, \ldots$, et les potentiels $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ les densités superficielles

(1) Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 526.

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

(17) $$\nabla^2 \Psi = -4\pi\rho,$$

(18) $$\frac{d\Psi}{dv} = -4\pi\tau$$

et

(19) $$\iint \frac{d\Psi}{dv_1}\, ds_1 = -4\pi e_1.$$

e_1 étant la charge de la surface s_1.

Divisant (16) par -8π, nous trouvons

(20) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \ldots) + \frac{1}{2}\iiint \Psi \rho\, dx\, dy\, dz \\ &= \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right.$$

Or le premier terme est l'énergie du système due aux charges superficielles; le second, celle qui est due à l'électricité distribuée dans toute l'étendue du champ, s'il en existe ainsi distribuée.

Le second membre représente donc l'énergie électrique totale du système, le potentiel Ψ y étant une fonction donnée de x, y et z.

Comme nous aurons souvent l'occasion d'employer cette intégrale de volume, nous la désignerons par l'abréviation W_Ψ, en sorte que

(21) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Si l'on n'a de charges que sur les surfaces des conducteurs, $\rho = 0$, et le second terme du premier membre de l'équation (20) disparaît.

Le premier terme est l'énergie du système électrisé exprimée, comme au § 84, en fonction du potentiel et de la charge de chaque conducteur : c'est cette expression de l'énergie que nous désignons par W.

99 *b*. Soit Ψ une fonction de x, y, z soumise à la condition d'avoir en chaque point d'une surface fermée s une valeur connue Ψ. La valeur de Ψ pour des points non situés sur la surface s est d'ailleurs absolument arbitraire.

Posons

(22) $$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace compris à l'intérieur de la surface. Nous allons démontrer que si Ψ_1 est une forme particulière de Ψ

qui satisfait à la condition à la surface, et qui, en outre, satisfait en chaque point intérieur à la surface à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \Psi_1 = 0, \tag{23}$$

la valeur W_1 de W, qui correspond à Ψ_1, est plus petite que la valeur correspondant à toute autre fonction différant de Ψ_1 en un point intérieur à la surface.

Soit, en effet, Ψ une fonction quelconque, qui se confond avec Ψ_1 pour tous les points de la surface, mais non plus pour les points qui sont intérieurs à cette surface; posons

$$\Psi = \Psi_1 - \Psi_2, \tag{24}$$

où Ψ_2 est une fonction qui s'annule en tous les points de la surface.

La valeur de W correspondant à Ψ sera évidemment

$$\left\{ \begin{aligned} W &= W_1 - W_2 \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

D'après le théorème de Green, le troisième terme peut s'écrire

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \Psi_2 . \nabla^2 \Psi_1 . dS - \frac{1}{4\pi} \iint \Psi_2 \frac{d\Psi_1}{dv}\, ds. \tag{26}$$

Or l'intégrale de volume s'annule, puisque $\nabla^2 \Psi_1 = 0$ à l'intérieur de la surface; l'intégrale de surface s'annule aussi, puisque $\Psi_2 = 0$ à la surface; donc l'équation (25) se réduit à la forme

$$W = W_1 + W_2. \tag{27}$$

Les éléments de l'intégrale W_2, étant des sommes de trois carrés, ne peuvent prendre de valeurs négatives, et l'intégrale elle-même ne peut être que positive ou nulle; donc, si W_2 n'est pas nul, il est positif, et W est plus grand que W_1. Mais, si W_2 est nul, chacun de ses éléments doit être nul, et, par suite,

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = 0,$$

pour tous les points intérieurs à la surface; Ψ_2 doit donc être une constante dans tout l'intérieur de cette surface, et, comme $\Psi_2 = 0$ sur la surface, $\Psi_2 = 0$ en tous les points intérieurs, et $\Psi = \Psi_1$; c'est-à-dire que si W n'est pas plus grand que W_1, Ψ doit forcément être identique à Ψ_1 en tous les points intérieurs à la surface.

Il résulte de là que Ψ_1 est la seule fonction de x, y, z qui devienne

égale à Ψ à la surface et qui satisfasse à l'équation de Laplace en tous les points intérieurs.

Car, si ces conditions étaient également remplies par une autre fonction Ψ_2, W_2 devrait être inférieur à toute autre valeur de W. Mais nous avons déjà démontré que W_1 est plus petit que toute autre valeur, et, par suite, que W_2; donc il ne peut exister de fonction différente de Ψ_1 qui satisfasse aux conditions.

Le cas qui nous sera le plus utile est celui où le champ est limité par une surface extérieure s et par un nombre quelconque de surfaces intérieures $s_1, s_2, \ldots$, et où les conditions sont que Ψ soit nul sur s et qu'il soit égal à $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ sur $s_1, s_2, \ldots$, $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ étant des constantes pour chaque surface, comme c'est le cas pour un système de conducteurs dont les potentiels sont donnés.

De toutes les valeurs de Ψ satisfaisant à ces conditions, celle-là donne la valeur minimum de W_Ψ, pour laquelle $\nabla^2\Psi = 0$ en chaque point du champ.

Théorème de Thomson.

LEMME.

100 *a*. Soit Ψ une fonction de x, y, z, finie et continue à l'intérieur d'une surface fermée s, et prenant sur certaines surfaces fermées $s_1, s_2, \ldots, s_p$ les valeurs $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p$, constantes pour chaque surface.

Soient u, v, w des fonctions de x, y, z que l'on peut regarder comme les composantes d'un vecteur $\mathfrak{f}$ soumis à la condition solénoïdale

$$-S.\nabla\mathfrak{f} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{28}$$

Posons, dans le théorème III,

$$X = \Psi u, \quad Y = \Psi v, \quad Z = \Psi w; \tag{29}$$

le résultat de ces substitutions est

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p \\ &+ \iiint \Psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = 0, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

les intégrales de surface s'étendant aux différentes surfaces, et les intégrales de volume au champ tout entier.

Or la première intégrale de volume s'annule en vertu de la condition solénoïdale imposée à u, v et w; les intégrales de surface s'annulent dans les cas suivants :

1° Si $\Psi = 0$ en chaque point de la surface;

2° Si $lu + mv + nw = 0$ en chaque point de la surface;

3° Si la surface est entièrement formée de parties qui satisfont aux conditions (1) ou (2).

4° Si Ψ est constant sur toute la surface fermée et que

$$\iint (lu + mv + nw)\, ds = 0.$$

Dans ces quatre cas, l'intégrale de volume

$$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0. \tag{31}$$

100 *b*. Considérons un champ limité par la surface fermée extérieure s_1 et par les surfaces fermées intérieures $s_1, s_2, \ldots$.

Soit Ψ une fonction de x, y, z finie, continue et satisfaisant à l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{32}$$

à l'intérieur du champ, et prenant sur les surfaces $s_1, s_2, \ldots$ les valeurs $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ constantes, mais non données, et la valeur zéro sur la surface extérieure s.

La charge de chacune des surfaces conductrices telle que s_i est donnée par l'intégrale de surface

$$e_i = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi_i}{dv_i}\, ds, \tag{33}$$

la normale v_i étant menée de la surface s_i vers l'intérieur du champ électrique.

100 *c*. Soient maintenant f, g, h des fonctions de x, y, z que l'on peut regarder comme les composantes d'un vecteur $\mathfrak{D}$, soumises seulement aux conditions : de satisfaire en chaque point du champ à l'équation solénoïdale

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0; \tag{34}$$

de donner, sur chacune des surfaces fermées s_i, la relation

$$\iint (l_i f + m_i g + n_i h)\, ds_i = e_i, \tag{35}$$

où l_1, m_1, n_1 sont les cosinus directeurs de la normale ν_1, menée de la surface s_1 vers l'intérieur du champ électrique, et où e_1 est la même quantité que dans l'équation (33), c'est-à-dire, en fait, la charge électrique du conducteur dont la surface est s_1.

Considérons la valeur de l'intégrale de volume

$$W_D = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{36}$$

étendue à tout le champ intérieur à s et extérieur à s_1, s_2, et comparons-la à

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz, \tag{37}$$

les limites de l'intégration étant les mêmes.

Posons

$$u = f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w = h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{38}$$

et

$$W_\delta = 2\pi \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{39}$$

Alors, puisque

$$f^2 + g^2 + h^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] + u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2\pi}\left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right),$$

$$W_D = W_\Psi + W_\delta - \iiint \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz; \tag{40}$$

mais, en premier lieu, u, v, w satisfont à la condition solénoïdale en tous les points du champ, car on a, d'après les équations (38),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\nabla^2 \Psi, \tag{41}$$

et, d'après les conditions exprimées par les équations (34) et (32), les deux termes du second membre de l'équation (41) sont nuls.

En second lieu, l'intégrale de surface

$$\begin{aligned} &\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w)\, ds_1 \\ &\quad = \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{d\Psi_1}{d\nu_1}\, ds_1; \end{aligned} \tag{42}$$

mais, d'après (35), le premier terme du second membre est e_1, et, d'après (33), le second terme est $-e_1$, de sorte que

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w)\, ds_1 = 0. \tag{43}$$

Donc, puisque Ψ_1 est constant, la quatrième condition du § 100 *a* est satisfaite; le dernier terme de l'équation (40) est nul, et cette équation se réduit à

$$W_D = W_\Psi + W_\delta. \tag{44}$$

Mais, puisque l'élément de l'intégrale W_δ est une somme de trois carrés, il est ou nul ou positif. Si donc, en un point quelconque du champ, u, v et w ne sont pas tous nuls, l'intégrale W_δ a une valeur positive, et, par suite, W_D est plus grand que W_Ψ. Mais les valeurs

$$u = v = w = 0,$$

pour tous les points, satisfont aux conditions. Donc, si en chaque point

$$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \tag{45}$$

on a

$$W_D = W_\Psi. \tag{46}$$

et la valeur de W_D correspondant à ces valeurs de f, g, h est plus petite que la valeur correspondant à toutes autres valeurs différentes de f, g, h.

Donc, lorsque la charge de chaque conducteur est donnée, il y a une et une seule solution du problème qui consiste à déterminer pour chaque point du champ le déplacement et le potentiel.

Ce théorème, sous une de ses formes plus générales, a été énoncé pour la première fois par Sir W. Thomson (1). Nous montrerons plus loin de quelle généralisation il est susceptible.

100 *d*. On peut modifier ce théorème en supposant que le vecteur $\mathfrak{D}$, au lieu de satisfaire en tous les points du champ à la condition solénoïdale, satisfait à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho, \tag{47}$$

(1) *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, février 1848.

où ρ est une quantité finie, dont la valeur est donnée pour chaque point du champ, et qui peut être positive ou négative, continue ou discontinue, pourvu que son intégrale de volume, prise pour une région finie, reste finie.

Nous pouvons aussi supposer que, sur certaines surfaces comprises dans le champ,

$$lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma, \tag{48}$$

où l, m, n, l', m', n' sont les cosinus directeurs des normales menées en un point de ces surfaces vers les régions pour lesquelles les composantes du déplacement sont respectivement f, g, h et f', g', h'; et où σ est une quantité donnée pour chaque point de la surface, dont l'intégrale, prise sur une surface finie, est finie.

100 *e*. Nous pouvons aussi changer les conditions aux surfaces limites, en supposant qu'en tout point de ces surfaces

$$lf + mg + nh = \sigma, \tag{49}$$

où σ est donné pour chaque point.

(Dans l'énoncé primitif, on supposait seulement donnée la valeur de l'*intégrale* de σ sur chacune des surfaces. Ici nous supposons sa valeur donnée pour chaque élément de surface, ce qui reviendrait à considérer dans l'énoncé primitif chaque élément comme une surface indépendante.)

Aucune de ces modifications ne porte atteinte à l'exactitude du théorème, pourvu que l'on se souvienne que Ψ doit satisfaire aux conditions correspondantes, c'est-à-dire à la condition générale

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0 \tag{50}$$

et à la condition à la surface

$$\frac{d\Psi}{dv} + \frac{d\Psi}{dv'} + 4\pi\sigma = 0; \tag{51}$$

car si, comme précédemment,

$$f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = u, \quad g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = v, \quad h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial z} = w,$$

u, v et w satisferont à la condition solénoïdale générale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

à la condition à la surface

$$lu + mv + nw + l'u' + m'v' + n'w' = 0,$$

et à la condition à la surface limite

$$lu + mv + nw = 0;$$

d'où nous tirons, comme plus haut,

$$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0$$

et

$$W_D = W_\Psi + W_\varepsilon.$$

Donc il est démontré, comme précédemment, que W_D prend sa valeur minimum unique, lorsque W_ε est nul, ce qui suppose que ε est nul partout, ou que

$$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

101 *a*. Dans l'énoncé de ces théorèmes, nous nous sommes tenus jusqu'à présent renfermés dans cette théorie de l'électricité qui admet que les phénomènes électriques dépendent seulement de la forme, de la position relative et de la charge des conducteurs, mais qui ne tient pas compte de la nature du milieu diélectrique qui sépare ces conducteurs.

D'après cette théorie, par exemple, il y a une relation invariable entre la densité superficielle sur un conducteur et l'intensité électromotrice aux points extérieurs voisins de la surface : c'est ce qui est exprimé par la loi de Coulomb

$$R = 4\pi\sigma.$$

Mais ceci n'est vrai que dans le milieu que l'on prend pour type; ce milieu peut être l'air. La relation n'est plus la même pour d'autres milieux, ainsi que l'a démontré Cavendish, qui ne publia cependant point sa découverte, et ainsi que plus tard l'a retrouvé Faraday sans avoir connaissance des travaux de Cavendish.

Pour exprimer complètement les phénomènes, nous reconnaissons la nécessité de considérer deux vecteurs, liés par une relation différente pour les différents milieux. L'un d'eux est l'intensité électromotrice; l'autre, le déplacement électrique.

L'intensité électromotrice est liée au potentiel par des équations de forme invariable; le déplacement électrique est lié par des équations de forme invariable à la distribution de l'électricité; mais la relation

de l'intensité électromotrice et du déplacement électrique dépend de la nature du milieu diélectrique, et doit s'exprimer par des équations dont la forme la plus générale n'a point encore été entièrement déterminée jusqu'à ce jour, et ne peut se déterminer que par des expériences sur les diélectriques.

101 *b*. L'intensité électromotrice est un vecteur, défini au § 68, comme étant le quotient de la force mécanique qui agit sur une petite quantité *e* d'électricité divisée par cette quantité *e*. Nous désignerons ses composantes par les lettres P, Q, R et le vecteur lui-même par la lettre $\mathfrak{E}$.

En électrostatique, l'intégrale de ligne de $\mathfrak{E}$ est toujours indépendante du contour d'intégration; en d'autres termes, $\mathfrak{E}$ est la variation dans l'espace d'un potentiel; d'où

$$P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

ou, plus brièvement, dans la notation des quaternions,

$$\mathfrak{E} = -\nabla \Psi.$$

101 *c*. Le déplacement électrique, dans une direction quelconque, a été défini au § 68 le quotient de la quantité d'électricité transportée à travers une petite aire A, dont le plan est normal à la direction considérée, divisée par cette aire A. Nous désignerons par f, g, h les composantes du déplacement, par $\mathfrak{D}$ le vecteur lui-même.

La densité de volume en un point quelconque est définie par l'équation

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

ou, dans la notation des quaternions,

$$\rho = -S.\nabla \mathfrak{D}.$$

La densité superficielle en un point d'une surface électrisée est définie par l'équation

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h',$$

où f, g, h sont les composantes du déplacement d'un côté de la surface, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale menée à la surface de ce côté, et où f', g', h', et l', m', n' sont les composantes du déplacement, et les cosinus directeurs de la normale, de l'autre côté de la surface.

Dans la notation des quaternions, cette relation s'exprime par l'équation

$$\sigma = -(S.\mathrm{U}\nu\,\mathfrak{D} + S.\mathrm{U}\nu'\,\mathfrak{D}),$$

où $\mathrm{U}\nu$ et $\mathrm{U}\nu'$ sont les normales unités des deux côtés de la surface, et où S indique que l'on doit prendre la partie scalaire du produit.

Si la surface est celle d'un conducteur, et ν la normale extérieure, f', g', h' et $\mathfrak{D}'$ sont nuls, et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned}\sigma &= lf + mg + nh \\ &= -S.\mathrm{U}\nu\,\mathfrak{D}.\end{aligned}$$

La charge totale du conducteur est donc

$$e = \int\int (lf + mg + nh)\,ds = -\int\int S.\mathrm{U}\nu.\mathfrak{D}.ds.$$

101 *d*. Ainsi qu'on l'a fait voir au § 84, l'énergie électrique d'un système est égale à la demi-somme des produits des charges des conducteurs par leurs potentiels respectifs.

$$\begin{aligned}\mathrm{W} &= \tfrac{1}{2}\,\Sigma e\Psi \\ &= \tfrac{1}{2}\int\int\int \rho\Psi.dx\,dy\,dz + \tfrac{1}{2}\int\int \sigma\Psi.ds \\ &= \tfrac{1}{2}\int\int\int \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int\int \Psi(lf + mg + nh)\,ds,\end{aligned}$$

où l'intégrale de volume doit être prise pour toute l'étendue du champ électrique, et l'intégrale de surface sur les surfaces des conducteurs.

Posons, dans le théorème III, § 21,

$$\mathrm{X} = \Psi f, \quad \mathrm{Y} = \Psi g, \quad \mathrm{Z} = \Psi h,$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}\int\int \Psi(lf + mg + nh)\,ds &= -\int\int\int \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\ &= -\int\int\int \left(f\frac{\partial\Psi}{\partial x} + g\frac{\partial\Psi}{\partial y} + h\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz;\end{aligned}$$

substituant cette valeur à l'intégrale de surface dans W, nous trouvons

$$\mathrm{W} = -\tfrac{1}{2}\int\int\int \left(f\frac{\partial\Psi}{\partial x} + g\frac{\partial\Psi}{\partial y} + h\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

ou

$$W = \frac{1}{2}\int\int\int (fP + gQ + hR)\,dx\,dy\,dz.$$

101 *e*. Nous arrivons maintenant à la relation entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$.

L'unité d'électricité est habituellement définie d'après des expériences faites dans l'air. Or nous savons, par les travaux de Boltzmann, que la constante diélectrique de l'air est un peu supérieure à celle du vide et varie avec la densité; donc, en toute rigueur, toutes les mesures de quantité d'électricité devraient être affectées d'une correction pour les ramener, soit à une pression et à une température normales dans l'air, soit au vide, ce qui serait plus scientifique; de même que les indices de réfraction, mesurés dans l'air, exigent une correction semblable, cette correction étant d'ailleurs assez petite dans les deux cas, pour n'être sensible que dans des mesures d'une extrême précision.

Dans le milieu choisi comme milieu normal

$$4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$$

ou

$$4\pi f = P, \quad 4\pi g = Q, \quad 4\pi h = R.$$

Dans un milieu isotrope, dont la constante diélectrique est K,

$$4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E},$$
$$4\pi f = KP, \quad 4\pi g = KQ, \quad 4\pi h = KR.$$

Mais il y a certains milieux, et le verre est un de ceux qui ont été le plus soigneusement étudiés, pour lesquels la relation entre $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ est plus compliquée et fait intervenir la variation dans le temps d'une de ces quantités ou de toutes deux; la relation doit alors être de la forme

$$f\left(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}, \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}, \frac{\partial^2\mathfrak{D}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}, \dots\right) = 0.$$

Pour l'instant, nous n'essayerons pas de discuter des relations de cette forme plus générale, et nous nous bornerons au cas où $\mathfrak{D}$ est une fonction linéaire et vectorielle de $\mathfrak{E}$.

La forme la plus générale d'une pareille relation peut être représentée par

$$4\pi\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{E}),$$

où, dans l'étude actuelle, φ représentera toujours une fonction linéaire et vectorielle. Les composantes de $\mathfrak{D}$ seront donc des fonctions linéaires et homogènes des composantes de $\mathfrak{E}$, et pourront être mises sous la

forme

$$4\pi f = K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R,$$
$$4\pi g = K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R,$$
$$4\pi h = K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R,$$

où le premier indice de chaque coefficient K indique la direction du déplacement, et le second la direction de l'intensité électromotrice.

La forme la plus générale d'une fonction linéaire et vectorielle comprend donc neuf constantes arbitraires. Si les coefficients qui ont le même couple d'indices sont égaux, la fonction est dite autoconjuguée.

Si nous exprimons $\mathfrak{E}$ en fonction de $\mathfrak{D}$, nous aurons

$$\mathfrak{E} = 4\pi\psi(\mathfrak{D}),$$

ψ étant la fonction inverse de φ, d'où

$$P = 4\pi(k_{xx}f + k_{yx}g + k_{zx}h),$$
$$Q = 4\pi(k_{xy}f + k_{yy}g + k_{zy}h),$$
$$R = 4\pi(k_{xz}f + k_{yz}g + k_{zz}h).$$

101 *f*. Le travail accompli par l'intensité électromotrice dont les composantes sont P, Q, R, pour déterminer dans l'unité de volume du milieu un déplacement dont les composantes sont df, dg, dh, est

$$dW = P\,df + Q\,dg + R\,dh.$$

Puisqu'un diélectrique, soumis à un déplacement électrique, constitue un système conservatif, W doit être une fonction de f, g, h; et, puisque f, g, h peuvent varier indépendamment, on doit avoir

$$P = \frac{\partial W}{\partial f}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial g}, \quad R = \frac{\partial W}{\partial h};$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial g} = \frac{\partial^2 W}{\partial f\,\partial g} = \frac{\partial^2 W}{\partial g\,\partial f} = \frac{\partial Q}{\partial f};$$

mais

$$\frac{\partial P}{\partial g} = 4\pi k_{yx},$$

coefficient de y dans l'expression de P, et

$$\frac{\partial Q}{\partial f} = 4\pi k_{xy},$$

coefficient de x dans l'expression de Q.

Donc, si un diélectrique constitue un système conservatif (et nous

savons qu'il en est ainsi, puisque ce système peut conserver son énergie pendant un temps indéfini),

$$k_{xy} = k_{yx},$$

et ψ est une fonction autoconjuguée.

Il en résulte que φ est aussi autoconjugué, et que

$$K_{xy} = K_{yx}.$$

101 *g*. L'expression de l'énergie peut donc être mise sous l'une ou l'autre des formes

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\iiint (K_{xx}P^2 + K_{yy}Q^2 + K_{zz}R^2 + 2K_{yz}QR + 2K_{zx}RP + 2K_{xy}PQ)\,dx\,dy\,dz,$$

$$W_D = 2\pi \iiint (k_{xx}f^2 + k_{yy}g^2 + k_{zz}h^2 + 2k_{yz}gh + 2k_{zx}hf + 2k_{xy}fg)\,dx\,dy\,dz.$$

l'indice exprimant en fonction de quel vecteur est exprimé W. Quand il n'y a pas d'indice, il faut entendre que l'énergie est exprimée en fonction des deux vecteurs.

Ainsi, nous avons en tout six expressions différentes de l'énergie d'un champ électrique. Trois d'entre elles font intervenir les charges et les potentiels à la surface des conducteurs; elles sont données au § 87.

Les trois autres sont des intégrales de volume prises dans toute l'étendue du champ, et font intervenir les composantes de l'intensité électromotrice, ou du déplacement électrique, ou de ces deux quantités à la fois.

Les trois premières appartiennent donc à la théorie des actions à distance; les trois autres, à la théorie des actions propagées à travers un milieu interposé entre les corps.

Ces trois expressions de W peuvent s'écrire

$$W = -\frac{1}{2}\iiint S.\mathfrak{D}\mathfrak{E}.d\varsigma,$$

$$W_e = -\frac{1}{8\pi}\iiint S.\mathfrak{E}\varphi(\mathfrak{E}).d\varsigma,$$

$$W_D = -2\pi\iiint S.\mathfrak{D}\psi(\mathfrak{D}).d\varsigma.$$

101 *h*. Pour étendre le théorème de Green, au cas d'un milieu hé-

térogène non isotrope, nous n'avons qu'à poser dans le théorème III

$$X = \Psi\left(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$Y = \Psi\left(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$Z = \Psi\left(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right).$$

Nous obtenons ainsi, en nous souvenant que l'ordre des indices est indifférent,

$$\begin{aligned}
&\iint\Psi\Big[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + (K_{xy}l + K_{yy}m + K_{zy}n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\
&\qquad + (K_{zx}l + K_{zy}m + K_{zz}n)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big]\,ds\\
&+\iiint\Psi\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\Big]\,dx\,dy\,dz\\
&= -\iiint\Big[K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\\
&\qquad + K_{yz}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\\
&\qquad + K_{zx}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\\
&\qquad + K_{xy}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Big]\,dx\,dy\,dz\\
&= \iint\Phi\Big[(K_{xx}l + K_{yx}m + K_{zx}n)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\\
&\qquad + (K_{xy}l + K_{yy}m + K_{zy}n)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\
&\qquad + (K_{xz}l + K_{yz}m + K_{zz}n)\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big]\,ds\\
&+\iiint\Phi\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + K_{xz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yx}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + K_{yz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zx}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + K_{zy}\frac{\partial\Psi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\Big]\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

En employant la notation des quaternions, ce résultat peut s'écrire plus brièvement

$$\begin{aligned}\iint \Psi S.U\nu\varphi(\nabla\Phi)\,ds - \iint\!\!\int \Psi S.(\nabla\varphi\nabla)\,d\tau \\ = -\iint\!\!\int S.\nabla\Psi\nabla\Phi\,d\tau = \iint\!\!\int S.\nabla\Phi\varphi\nabla\Psi\,d\tau \\ = \iint \Phi S.U\nu\varphi(\nabla\Psi)\,ds - \iint\!\!\int \Phi S.(\nabla\varphi\nabla)\Psi\,d\tau.\end{aligned}$$

Limites entre lesquelles doit être comprise la capacité électrique d'un conducteur.

102 *a*. On a déjà défini capacité d'un conducteur ou d'un système de conducteurs la charge qui porte au potentiel 1 ce conducteur ou ce système, tous les autres conducteurs du champ étant au potentiel zéro.

La méthode suivante pour déterminer les valeurs limites entre lesquelles doit se trouver comprise la capacité d'un conducteur a été suggérée par un Mémoire *Sur la théorie de la résonance,* par l'hon. J. W. Strutt, *Phil. Trans.*, 1871 (*voir* § 308).

Désignons par s_1 la surface du conducteur ou du système, dont on doit déterminer la capacité ; par s_0 la surface des autres conducteurs. Soient Ψ_1 le potentiel de s_1, Ψ_0 celui de s_0. Soient e_1 la charge de s_1 ; celle de s_0 sera $-e_1$.

Alors, si q est la capacité de s_1,

$$q = \frac{e_1}{\Psi_1 - \Psi_0}, \tag{1}$$

et si W est l'énergie du système pour la distribution actuelle de l'électricité,

$$W = \tfrac{1}{2} e_1(\Psi_1 - \Psi_0) \tag{2}$$

et

$$q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2} = \frac{e_1^2}{2W}. \tag{3}$$

Soit à trouver une limite supérieure de la capacité. Imaginons une valeur de Ψ qui soit égale à 1 sur s_1 et à 0 sur s_0, et calculons la valeur de l'intégrale de volume

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\iint\!\!\int\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \tag{4}$$

pour toute l'étendue du champ.

On a démontré (§ 99 *b*) que W ne peut être supérieur à W_Ψ; la capacité q ne peut donc être plus grande que $2W_\Psi$.

Soit maintenant à trouver une limite inférieure. Imaginons un système de valeurs de f, g, h satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

ainsi qu'à

$$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 = e_1, \tag{6}$$

et calculons la valeur de l'intégrale de volume

$$W_D = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz, \tag{7}$$

pour toute l'étendue du champ. On a démontré (§ 100 *c*) que W ne peut être plus grand que W_D; la capacité ne peut donc être inférieure à

$$\frac{e_1^2}{2W_D}. \tag{8}$$

La méthode la plus simple pour obtenir un système de valeurs de f, g, h, qui satisfasse à la condition solénoïdale, est de supposer l'électricité répandue sur la surface s_1 et sur la surface s_0, de façon que la somme de ces charges soit nulle. On calcule alors le potentiel Ψ dû à cette distribution, et l'énergie électrique du système ainsi disposé, que l'on peut appeler W_σ.

Si alors nous faisons

$$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

ces valeurs de f, g, h satisferont à la condition solénoïdale. Mais, dans ce cas, nous pouvons déterminer W_D sans passer par la recherche de l'intégrale de volume; car, puisque cette solution rend $\nabla^2 \Psi = 0$ en tous les points du champ, nous pouvons obtenir W_D sous forme d'intégrales de surface

$$W_D = \frac{1}{2}\iint \Psi \sigma_1\, ds_1 + \frac{1}{2}\iint \Psi \sigma_0\, ds_0, \tag{9}$$

où la première intégrale est étendue à la surface s_1, et la seconde à la surface s_0.

Si la surface s_0 est à une distance infinie de s_1, le potentiel sur s_0 est nul, et le second terme disparaît.

101 *b*. **Toutes les fois qu'on cherche la distribution de l'électricité sur des conducteurs dont le potentiel est donné, on peut obtenir de la manière suivante une solution approchée du problème.**

Soit s_1 la surface d'un conducteur ou d'un système de conducteurs maintenus au potentiel 1; soit s_0 la surface de tous les autres conducteurs, y compris le conducteur creux qui entoure tout le reste, et qui peut, dans certains cas, être supposé à une distance infinie des autres.

Commençons par mener une série des lignes droites ou courbes, de s_1 à s_0.

Supposons que sur chacune de ces lignes Ψ soit égal à 1 en s_1, et à 0 en s_0. Alors, P étant un point quelconque sur une de ces lignes, nous pouvons prendre comme première approximation $\Psi_1 = \frac{P s_0}{s_1 s_0}$.

Nous obtenons ainsi une première approximation de Ψ qui satisfait à la condition d'être égale à 1 sur s_1 et à 0 sur s_0.

La valeur de W_Ψ, calculée d'après Ψ_1, serait plus grande que W.

Comme deuxième approximation des lignes de force, supposons que

$$f = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad g = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad h = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}. \tag{10}$$

Le vecteur, dont les composantes sont f, g, h, est normal aux surfaces pour lesquelles Ψ_1 est constant. Déterminons p de façon que f, g, h satisfassent à la condition solénoïdale. Nous avons ainsi

$$p\left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Si nous menons de s_1 à s_0 une ligne qui soit constamment normale aux surfaces pour lesquelles Ψ est constant, et si nous désignons par s la longueur de cette ligne mesurée à partir de s_0,

$$R\frac{dx}{ds} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad R\frac{dy}{ds} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad R\frac{dz}{ds} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \tag{12}$$

R étant l'intensité résultante égale à $-\frac{d\Psi}{ds}$, de sorte que

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -R\frac{dp}{ds} = R^2\frac{dp}{d\Psi}, \tag{13}$$

et l'équation (11) devient

$$p\nabla^2\Psi = R^2\frac{dp}{d\Psi}, \tag{14}$$

d'où

$$p = Ce^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2\Psi}{R^2}\, d\Psi}, \tag{15}$$

l'intégrale étant une intégrale linéaire prise le long de la ligne s.

Supposons maintenant que le long de la ligne s

$$-\frac{d\Psi_2}{ds} = f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} + h\frac{dz}{ds} = -p\frac{d\Psi_1}{ds}, \tag{16}$$

alors

$$\Psi_2 = C\int_0^{\Psi_1} e^{\int \frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2} d\Psi_1} d\Psi_1, \tag{17}$$

l'intégration étant toujours effectuée le long de la ligne s. La constante C doit maintenant être déterminée par la condition que $\Psi_2 = 1$ en même temps que Ψ_1 sur s_1, c'est à dire que

$$C\int_0^1 e^{\int_0^{\Psi} \frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2} d\Psi_1} d\Psi_1 = 1, \tag{18}$$

ce qui donne une dernière approximation de Ψ; on peut répéter cette opération.

Les résultats obtenus par le calcul de W_{Ψ_1}, W_{Ψ_2}, W_{Ψ_3}, ... donnent des capacités alternativement au-dessus et au-dessous de la capacité vraie, et s'en approchant constamment.

L'opération, telle qu'on vient de l'exposer, suppose le calcul de la forme de la ligne s et l'intégration suivant cette ligne, opérations qui sont en général trop difficiles pour que l'on puisse les effectuer pratiquement.

Dans certains cas, on peut arriver à une approximation par une méthode plus simple.

102 *c*. Comme exemple de cette méthode, nous allons l'appliquer à la recherche par approximations successives des surfaces équipotentielles et des lignes d'induction dans le champ électrique compris entre deux surfaces qui sont à peu près planes et parallèles, mais ne le sont pas rigoureusement, et dont l'une est maintenue au potentiel zéro et l'autre au potentiel 1.

Soient les équations des deux surfaces

$$z_1 = f_1(x, y) = a \tag{19}$$

pour la surface au potentiel zéro

$$z_2 = f_2(x, y) = b \tag{20}$$

pour la surface au potentiel 1, a et b étant des fonctions données de x et y, et b étant toujours plus grand que a. Les dérivées premières de a et b par rapport à x et à y sont des quantités très petites, dont on peut négliger les puissances et les produits de plus de deux facteurs.

Nous commencerons par supposer que les lignes d'induction soient parallèles à l'axe des z, auquel cas

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = 0; \tag{21}$$

donc sur chaque ligne d'induction, h est constant, et

$$\Psi = -4\pi \int_a^z h\,dz = -4\pi h(z - a). \tag{22}$$

Lorsque $z = b$, $\Psi = 1$, d'où

$$h = -\frac{1}{4\pi(b - a)} \tag{23}$$

et

$$\Psi = \frac{z - a}{b - a}, \tag{24}$$

ce qui donne une première approximation du potentiel et indique une série de surfaces équipotentielles dont les intervalles, mesurés parallèlement à z, sont égaux.

Pour obtenir une deuxième approximation des lignes d'induction, supposons qu'elles soient partout normales aux surfaces équipotentielles définies par l'équation (24).

Ceci revient à poser les conditions

$$4\pi f = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad 4\pi g = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad 4\pi h = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

où λ doit être déterminé de façon qu'en tout point du champ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \tag{26}$$

et que l'intégrale linéaire

$$4\pi \int \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} + h \frac{dz}{ds} \right) ds, \tag{27}$$

prise le long d'une ligne d'induction quelconque, de la surface a à la surface b, soit égale à -1.

Supposons que

$$\lambda = 1 + A + B(z-a) + C(z-a)^2, \tag{28}$$

et négligeons les puissances et les produits de A, B, C, et, pour le moment, les puissances et les produits des dérivées premières de a et b.

La condition solénoïdale donne

$$B = -\nabla^2 a, \quad C = -\frac{1}{2}\frac{\nabla^2(b-a)}{b-a}, \tag{29}$$

où

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{30}$$

Si, au lieu de prendre l'intégrale de ligne suivant la nouvelle ligne d'induction, nous la prenons suivant l'ancienne, parallèle à z, la seconde condition donne

$$1 = 1 + A + \tfrac{1}{2}B(b-a) + \tfrac{1}{3}C(b-a)^2,$$

d'où

$$A = \tfrac{1}{6}(b-a)\nabla^2(2a+b), \tag{31}$$

et

$$\lambda = 1 + \tfrac{1}{6}(b-a)\nabla^2(2a+b) - (z-a)\nabla^2 a - \frac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\nabla^2(b-a). \tag{32}$$

Nous trouvons ainsi, pour seconde approximation des composantes du déplacement,

$$\left\{\begin{aligned} -4\pi f &= \frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial(b-a)}{\partial x}\frac{z-a}{b-a}\right], \\ -4\pi g &= \frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial(b-a)}{\partial y}\frac{z-a}{b-a}\right], \\ -4\pi h &= \frac{\lambda}{b-a} \end{aligned}\right. \tag{33}$$

et, pour seconde approximation du potentiel,

$$\left\{\begin{aligned} \Psi = {} & \frac{z-a}{b-a} + \tfrac{1}{6}\nabla^2(2a+b)(z-a) \\ & - \tfrac{1}{2}\nabla^2 a\,\frac{(z-a)^2}{b-a} - \tfrac{1}{6}\nabla^2(b-a)\,\frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Si σ_a et σ_b sont les densités superficielles, Ψ_a et Ψ_b les potentiels sur les surfaces a et b respectivement

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi}(\Psi_a - \Psi_b)\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{3}\nabla^2 a - \frac{1}{6}\nabla^2 b\right),$$

$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi}(\Psi_b - \Psi_a)\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{6}\nabla^2 a - \frac{1}{3}\nabla^2 b\right).$$

CHAPITRE V.

ACTION MÉCANIQUE ENTRE DEUX SYSTÈMES ÉLECTRISÉS.

103. Soient E_1 et E_2 les deux systèmes électrisés dont nous nous proposons d'étudier les actions réciproques. Supposons que la distribution de l'électricité dans le système E_1 soit définie par la densité de volume ρ_1 pour l'élément dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1. Soit ρ_2 la densité de volume de l'élément de E_2, dont les coordonnées sont x_2, y_2, z_2.

La composante suivant les x, de la force qui agit sur l'élément E_1 par suite de la répulsion de l'élément E_2, sera

$$\rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2$$

avec

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

et, si A représente la composante suivant les x de la force totale qui agit sur E_1 en raison de la présence de E_2,

$$(1) \qquad A = \iiiint\int\int\int \frac{x_1 - x_2}{r^3} \rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

où l'intégration par rapport à x_1, y_1, z_1 s'étend à tout l'espace occupé par E_1, et l'intégration par rapport à x_2, y_2, z_2 à tout l'espace occupé par E_2. Mais, puisque ρ_1 est nul, sauf dans le système E_1, et ρ_2 nul, sauf dans le système E_2, la valeur de l'intégrale ne sera pas changée si nous étendons les limites des intégrations et si nous supposons que ces limites soient pour toutes les intégrations $\pm\infty$.

Cette expression de la force n'est que la traduction littérale en symboles mathématiques de la théorie qui suppose que la force électrique agit directement à distance entre les corps, et ne tient pas compte du milieu ambiant.

Si nous définissons Ψ_2 le potentiel au point $x_1 y_1 z_1$ dû à la présence du système E_2 par l'équation

$$(2) \qquad \Psi_2 = \iiint \frac{\rho_2}{r} dx_2 dy_2 dz_2,$$

Ψ_2 s'annule à l'infini et satisfait en tout point à l'équation

$$\nabla^2 \Psi_2 = 4\pi\rho_2. \tag{3}$$

Nous pouvons alors exprimer A sous forme d'une intégrale triple

$$A = -\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \rho_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1. \tag{4}$$

On suppose ici que le potentiel Ψ_2 a une valeur définie en chaque point du champ, et c'est en fonction de cette valeur, ainsi que de la distribution ρ_1 de l'électricité dans le premier système E_1, qu'est exprimée la force A, sans qu'il soit fait mention explicitement de la distribution de l'électricité dans le second système E_2.

Soit Ψ_1 le potentiel dû au premier système, exprimé en fonction de x, y, z et défini par l'équation

$$\Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1; \tag{5}$$

Ψ_1 s'annule à une distance infinie et satisfait en tout point à l'équation

$$\nabla^2 \Psi_1 = 4\pi\rho_1. \tag{6}$$

Nous pouvons maintenant éliminer ρ_1 dans A, et nous obtenons

$$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \nabla^2 \Psi_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1, \tag{7}$$

où la force est exprimée en fonction des deux potentiels uniquement.

104. Dans toutes les intégrations considérées jusqu'ici, il est indifférent de prendre telles ou telles limites, pourvu que ces limites englobent l'ensemble du système E_1. Dans ce qui suit, nous supposerons les systèmes E_1 et E_2 tels qu'une certaine surface fermée s renferme la totalité du système E_1, sans aucune partie de E_2.

Posons alors

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2; \tag{8}$$

$$\begin{cases} \text{A l'intérieur de } s \ldots\ldots & \rho_2 = 0, \quad \rho = \rho_1, \\ \text{A l'extérieur de } s \ldots\ldots & \rho_1 = 0, \quad \rho = \rho_2, \end{cases} \tag{9}$$

alors

$$A_{11} = -\iiint \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \rho_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \tag{10}$$

représente la force résultante parallèle aux x, qui agit sur le système E_1

et qui est due à l'électricité de ce système même. Mais, dans la théorie des actions directes à distance, cette force doit être nulle, car l'action d'une molécule P sur une autre Q est égale et opposée à celle de Q sur P, et, puisque les composantes des deux actions entrent dans l'intégrale, elles se détruisent l'une l'autre.

Nous pouvons donc écrire

$$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\nabla^2\Psi\,dx_1\,dy_1\,dz_1, \tag{11}$$

où Ψ est le potentiel dû aux deux systèmes, l'intégration étant limitée maintenant à la partie de l'espace située dans la surface fermée s, laquelle renferme en entier le système E_1, mais ne comprend aucune partie du système E_2.

105. Si l'action de E_2 sur E_1 s'exerce non plus directement et à distance, mais par la propagation d'une tension dans un milieu continu s'étendant de E_1 à E_2; et, si nous connaissons la tension en chaque point d'une surface fermée s qui sépare complètement E_2 de E_1, nous serons en mesure de déterminer complètement l'action mécanique de E_2 sur E_1. Car, si la tension propagée à travers s ne rend pas entièrement compte de l'action exercée sur E_1, il faut nécessairement qu'il existe une action directe entre quelque chose d'intérieur et quelque chose d'extérieur à s.

Si donc il est possible de rendre compte de l'action de E_2 sur E_1 au moyen d'une tension propagée à travers le milieu ambiant, il doit être possible d'exprimer cette action sous forme d'une intégrale étendue sur une surface quelconque s séparant complètement E_1 de E_2.

Essayons donc d'exprimer, sous forme d'intégrale de surface,

$$A = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz. \tag{12}$$

Nous pourrons le faire au moyen du théorème III, si nous pouvons déterminer X, Y et Z de façon que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{13}$$

Prenons ces termes séparément :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2,$$

De même

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2.$$

Si donc nous posons

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 &= 8\pi p_{xx},\\
\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 &= 8\pi p_{yy},\\
\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 &= 8\pi p_{zz},\\
\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z} &= 4\pi p_{yz} = 4\pi p_{zy},\\
\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x} &= 4\pi p_{zx} = 4\pi p_{xz},\\
\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} &= 4\pi p_{xy} = 4\pi p_{yx},
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(15)\qquad A = \iiint\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace intérieur à s. Transformant cette intégrale de volume par le théorème III, on a

$$(16)\qquad A = \iint(lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx})\,ds,$$

où ds est un élément pris sur une surface fermée quelconque, comprenant la totalité de E_1 et ne renfermant rien de E_2, et où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale menée à s vers l'extérieur.

Pour les composantes suivant y et z de la force agissant sur E_1, on a de même

$$(17)\qquad B = \iint(lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy})\,ds,$$

$$(18)\qquad C = \iint(lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz})\,ds.$$

Si en réalité le système E_2 exerce sur E_1 une action directe à distance, sans intervention du milieu, nous devrons regarder les quantités p_{xx}, ... comme de simples abréviations pour certaines expressions symboliques, sans y attacher aucun sens physique.

Mais si nous admettons que les actions mutuelles se transmettent entre E_1 et E_2 au moyen d'une tension du milieu qui les sépare, les équations (16), (17), (18) donnent les composantes de la force résultante, due à l'action sur l'extérieur de la surface s, d'une tension dont les six composantes sont $p_{xx}, \ldots$, et nous devons, par suite, considérer $p_{xx}, \ldots$ comme les composantes d'une tension existant en réalité dans le milieu.

106. Pour nous faire une idée plus claire de la nature de cette tension, supposons que l'on modifie la forme d'une partie de la surface s, de façon que l'élément ds devienne une partie d'une surface équipotentielle. Cette modification sera légitime, pourvu que nous ne laissions en dehors aucune partie de E_1 et que nous n'enfermions aucune partie de E_2.

Soit ν une normale menée à ds vers le dehors.

Soit $R = -\frac{d\Psi}{d\nu}$ l'intensité de la force électromotrice dans la direction de ν; alors

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -Rl, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = -Rm, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = -Rn,$$

et les six composantes de la tension sont

$$p_{xx} = \frac{1}{8\pi}R^2(l^2 - m^2 - n^2), \quad p_{yz} = \frac{1}{4\pi}R^2 mn,$$

$$p_{yy} = \frac{1}{8\pi}R^2(m^2 - n^2 - l^2), \quad p_{zx} = \frac{1}{4\pi}R^2 nl,$$

$$p_{zz} = \frac{1}{8\pi}R^2(n^2 - l^2 - m^2), \quad p_{xy} = \frac{1}{4\pi}R^2 lm;$$

si a, b, c sont les composantes de la force agissant sur ds rapportée à l'unité de surface

$$a = lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz} = \frac{1}{8\pi}R^2 l,$$

$$b = \frac{1}{8\pi}R^2 m,$$

$$c = \frac{1}{8\pi}R^2 n.$$

Donc la force agissant entre la partie du milieu extérieure à ds et la partie du milieu intérieure à ds est normale à l'élément et dirigée vers

le dehors, c'est-à-dire que c'est une tension semblable à celle d'une corde, dont la valeur, par unité de surface, est $\frac{1}{8\pi}R^2$.

Supposons maintenant que l'élément *ds* soit perpendiculaire aux surfaces équipotentielles qui le rencontrent; dans ce cas,

$$l\frac{\partial\Psi}{\partial x}+m\frac{\partial\Psi}{\partial y}+n\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0, \tag{19}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}8\pi(lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})\\ =l\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]+2m\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+2n\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial z};\end{aligned}\right. \tag{20}$$

multipliant (19) par $2\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ et le retranchant de (20), nous trouvons

$$8\pi(lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})=-l\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]=-lR^2. \tag{21}$$

Les composantes de la tension sur *ds*, rapportée à l'unité de surface, sont donc

$$a=-\frac{1}{8\pi}lR^2,$$

$$b=-\frac{1}{8\pi}mR^2,$$

$$c=-\frac{1}{8\pi}nR^2,$$

Donc, si l'élément *ds* est à angle droit sur une surface équipotentielle, la force qui agit sur lui est normale à la surface, et sa valeur numérique, par unité de surface, est la même que dans le premier cas; mais la direction de la force est différente, car c'est une pression au lieu d'une tension.

Nous avons ainsi déterminé complètement la nature de la force agissant en un point donné de milieu.

La direction de l'intensité électromotrice en ce point est un axe principal de tension, et la force, dans cette direction, est une tension dont la valeur numérique est

$$p=\frac{1}{8\pi}R^2,$$

R étant l'intensité électromotrice.

Toute direction perpendiculaire a la précédente est aussi un axe

principal de tension, et la force le long de cet axe est une pression dont la valeur numérique est également p.

La tension ainsi définie n'est pas du type le plus général, puisqu'elle a deux de ses tensions principales égales entre elles, et la troisième égale et de signe contraire.

Ces conditions réduisent de six à trois le nombre des variables indépendantes qui définissent la tension; et, par suite, cette tension est entièrement définie par les trois composantes de l'intensité électromotrice

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad -\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad -\frac{\partial\Psi}{\partial z}.$$

Les trois relations entre les six composantes de la tension sont

$$(23)\qquad \begin{cases} p_{yz}^2 = (p_{xx}-p_{yy})(p_{zz}-p_{xx}), \\ p_{zx}^2 = (p_{yy}-p_{zz})(p_{xx}-p_{yy}), \\ p_{xy}^2 = (p_{zz}-p_{xx})(p_{yy}-p_{zz}). \end{cases}$$

107. Examinons maintenant si les résultats obtenus doivent être modifiés dans le cas où, une quantité finie d'électricité étant rassemblée sur une surface finie, la densité de volume devient infinie sur cette surface.

Dans ce cas, nous avons montré (§ 78) que les composantes de l'intensité électromotrice sont discontinues sur la surface. Les composantes de la tension seront donc aussi discontinues sur la surface.

Soient

l, m, n les cosinus directeurs de la normale à ds;

P, Q, R les composantes de l'intensité électromotrice du côté de la surface où est menée la normale;

P′, Q′, R′ leurs valeurs de l'autre côté de la surface.

D'après le § 78*a*, si σ est la densité superficielle,

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}-\mathrm{P}' = 4\pi\sigma l, \\ \mathrm{Q}-\mathrm{Q}' = 4\pi\sigma m, \\ \mathrm{R}-\mathrm{R}' = 4\pi\sigma n. \end{cases}$$

Soit a la composante suivant x de la force qui agit sur l'unité d'aire de la surface, et qui est due à la tension du milieu des deux côtés de

la surface,

$$
\begin{aligned}
a &= l(p_{xx}-p'_{xx}) + m(p_{xy}-p'_{xy}) + n(p_{xz}-p'_{xz}) \\
&= \frac{1}{8\pi} l[(P^2-P'^2)-(Q^2-Q'^2)-(R^2-R'^2)] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} m(PQ-P'Q') + \frac{1}{4\pi} n(PR-P'R') \\
&= \frac{1}{8\pi} l[(P-P')(P+P')-(Q-Q')(Q+Q')-(R-R')(R+R')] \\
&\quad + \frac{1}{8\pi} m[(P-P')(Q+Q')+(P+P')](Q-Q') \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} n[(P-P')(R-R')+(P+P')(R-R')] \\
&= \tfrac{1}{2} l\sigma[l(P+P')-m(Q+Q')-n(R+R')] \\
&\quad + \tfrac{1}{2} m\sigma[l(Q+Q')+m(P+P')] \\
&\quad + \tfrac{1}{2} n\sigma[l(R-R')+n(P+P')] \\
&= \tfrac{1}{2}\sigma(P+P').
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Donc, en supposant que la tension en un point quelconque soit donnée par les équations (14), on trouve que la force résultante agissant dans la direction des x sur une surface électrisée, rapportée à l'unité de surface, est égale au produit de la densité superficielle par la moyenne arithmétique des composantes parallèles à x de l'intensité électromotrice, mesurée de part et d'autre de la surface.

Ce résultat est identique à celui que nous avons obtenu au § 79 par un procédé tout semblable.

Donc l'hypothèse d'une tension du milieu ambiant peut s'appliquer au cas où une quantité finie d'électricité est rassemblée sur une surface finie.

Dans la théorie de l'action à distance, la force résultante qui agit sur un élément de surface se déduit d'ordinaire en considérant une portion de surface dont les dimensions sont très petites par rapport aux rayons de courbure de la surface (1).

Sur la normale élevée au point milieu de cette portion de surface, on prend un point P dont la distance à la surface est très petite relativement aux dimensions de cette partie de la surface. En ce point, l'intensité électromotrice due à la petite portion de surface est sensiblement la même que si la surface était un plan illimité : c'est donc $2\pi\sigma$

(1) Cette méthode est due à Laplace (*voir* Poisson, *Sur la distribution de l'Électricité*, etc. *Mém. de l'Inst.*, 1811, p. 30).

dans la direction de la normale à la surface. Pour un point P′, de l'autre côté de la surface, l'intensité sera la même, mais dans la direction opposée.

Considérons maintenant la partie de l'intensité électromotrice qui est due au reste de la surface et aux autres corps électrisés, situés à une distance finie de l'élément de surface. Puisque les points P et P′ sont infiniment voisins l'un de l'autre, les composantes de l'intensité électromotrice due à des charges électriques à distance finie seront les mêmes en ces deux points.

Soit P_0 la composante suivant x de l'intensité électromotrice en A ou en A′ due aux charges à distance finie. La valeur de la composante totale en A sera

$$P - P_0 = -2\pi\sigma l$$

et, en A′,

$$P' = P_0 - 2\pi\sigma l,$$

d'où

$$P_0 = \tfrac{1}{2}(P + P').$$

Or la force mécanique résultante qui agit sur l'élément de surface est due entièrement aux charges électriques à distance finie, puisque l'action de l'élément sur lui-même doit avoir une résultante nulle; donc la composante suivant x de cette force, rapportée à l'unité de surface, doit être

$$\alpha = \sigma P_0 - \tfrac{1}{2}\sigma(P + P').$$

108. Si, comme dans l'équation (2), nous définissons le potentiel en en supposant la distribution d'électricité donnée, de ce fait que les actions et réactions réciproques de deux molécules électriques sont égales et opposées, il résulte que la composante suivant x de la force due à l'action du système sur lui-même doit être nulle, ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial\Psi}{\partial x}\nabla^2\Psi\,dx\,dy\,dz = 0; \tag{26}$$

mais si nous définissons Ψ comme étant une fonction de x, y, z qui satisfait à l'équation

$$\nabla^2\Psi = 0$$

pour tout point extérieur à la surface fermée s, et qui devient nulle à l'infini, il semble nécessaire de démontrer ce fait que l'intégrale de volume, étendue à toute région comprenant s, est nulle.

Une démonstration résulte du théorème du § 100*a*, d'après lequel,

si l'on donne $\nabla^2\Psi$ en tout point de la surface et si $\Psi = 0$ à l'infini, la valeur de Ψ est déterminée pour tout point et égale à

$$\Psi' = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\nabla^2\Psi \, dx\,dy\,dz, \tag{27}$$

r étant la distance du point pour lequel on donne la concentration de $\Psi = \nabla^2\Psi$ et celui pour lequel on veut trouver le potentiel Ψ'.

Car le théorème se réduit ainsi à ce que nous avons déduit de la première définition de Ψ.

Mais si nous considérons Ψ comme la fonction fondamentale de x, y, z, de laquelle nous avons tiré les autres, il est préférable de ramener (26) à la forme d'une intégrale de surface

$$\mathrm{A} = \iint (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz})\, dS; \tag{28}$$

et si nous supposons que partout la surface S soit à une très grande distance a de la surface s qui renferme tous les points pour lesquels $\nabla^2\Psi$ est différent de zéro, nous savons que Ψ ne peut être numériquement plus grand que $\frac{e}{a}$, e étant l'intégrale de volume de $\nabla^2\Psi$, et que R ne peut être plus grand que $\frac{\partial\Psi}{\partial a}$ ou $-\frac{e}{a^2}$, et qu'aucune des quantités p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} ne peut être supérieure à p, ou $\frac{\mathrm{R}^2}{8\pi}$, ou $\frac{e^2}{8\pi a^4}$. Donc l'intégrale de surface, prise sur une sphère de très grand rayon a, ne peut être supérieure à $\frac{e^2}{2a^2}$; et si a croît indéfiniment, l'intégrale de surface doit finir par s'annuler.

Mais cette intégrale de surface est égale à l'intégrale de volume (26), dont la valeur est la même, quelle que soit l'étendue de l'espace compris dans S, pourvu que S contienne tous les points pour lesquels $\nabla^2\Psi$ est différent de zéro. Donc, l'intégrale étant nulle quand a est infini, doit être également nulle lorsque l'on prend pour limites de l'intégration quelconque une surface renfermant tous les points pour lesquels $\nabla^2\Psi$ n'est pas nul.

109. La distribution des tensions, que nous avons considérée dans ce Chapitre, est précisément celle à laquelle a été conduit Faraday dans ses recherches sur l'induction dans les diélectriques. Il les résume dans les termes suivants :

« 1297. On peut concevoir la force directe d'induction comme s'exerçant suivant des lignes comprises et limitées par les deux sur-

faces conductrices électrisées et accompagnée d'une force latérale ou transversale, dont l'effet revient à écarter ou à repousser ces lignes représentatives (1224); ou bien encore la force d'attraction qui agit entre les molécules du diélectrique dans le sens de l'induction est accompagnée d'une force répulsive ou divergente dans la direction transversale.

» 1298. L'induction paraît être un certain état de polarisation des molécules, dans lequel elles sont jetées par l'action du corps électrisé; les molécules ont alors des points ou des parties positives ou négatives qui s'orientent symétriquement les unes par rapport aux autres et par rapport aux surfaces ou aux molécules inductrices. Cet état doit être un état de contrainte, car il ne prend naissance et ne se maintient que par l'action d'une force, et l'on retombe à l'état normal ou état de repos aussitôt que la force cesse d'agir. Il ne peut être entretenu par une quantité donnée d'électricité, que dans les seules matières isolantes, car ces substances seules sont capables de garder cette disposition des molécules. »

C'est là un exposé exact des conclusions auxquelles nous avons été conduit, par notre étude mathématique. En chaque point du milieu règne un état élastique, tel qu'il y a tension suivant les lignes de force, et pression suivant toutes les directions perpendiculaires à ces lignes, les valeurs numériques de la tension et de la pression étant égales, et variant toutes deux comme le carré de la force résultante au point considéré.

Cette expression de « tension électrique » a été employée en différents sens par les divers auteurs. Je l'emploierai toujours pour désigner la tension, suivant les lignes de force, qui, ainsi que nous l'avons vu, varie d'un point à un autre, mais est toujours proportionnelle au carré de la force résultante au point considéré.

110. L'hypothèse d'un pareil état de tension existant au sein d'un diélectrique fluide, tel que l'air ou la térébenthine, peut paraître, à première vue, en contradiction avec le principe établi qu'en un point d'un fluide les pressions sont égales dans tous les sens. Mais, quand on établit ce principe en considérant la mobilité et l'équilibre des parties du fluide, on admet précisément qu'il n'existe dans le fluide aucune action du genre de celle que nous supposons se produire le long des lignes de force. L'état de tension que nous venons d'étudier est parfaitement compatible avec la mobilité et l'équilibre d'un fluide, car nous avons vu que, si une portion du fluide n'a point de charge électrique, elle n'est soumise à aucune force résultante due aux tensions sur la surface, si intenses que soient ces tensions. C'est seulement quand une

partie du fluide est chargée que son état d'équilibre est troublé par les tensions agissant sur sa surface, et nous savons que, dans ce cas, elle tend effectivement à se mouvoir; donc l'état de tension supposé n'est pas incompatible avec l'équilibre d'un diélectrique fluide.

La quantité W qui a été étudiée au Chapitre IV, § 99, peut être interprétée comme étant l'énergie de milieu due à cette distribution des tensions. Des théorèmes de ce Chapitre il résulte que la distribution des tensions qui satisfait aux conditions énoncées à ce Chapitre fait de W un minimum absolu. Or, si l'énergie est un minimum pour une configuration déterminée d'un système, cette configuration correspond à l'équilibre, et à l'équilibre stable; un diélectrique soumis à l'action de corps électrisés prendra donc de lui-même un état où les tensions sont distribuées comme on vient de le décrire.

Il faut se souvenir avec soin que nous n'avons fait qu'un seul pas dans la théorie des actions transmises par un milieu. Nous avons supposé que ce milieu est dans un état de tension, mais nous n'avons en aucune façon rendu compte de cette tension, ni expliqué comment elle se maintient. Néanmoins ce pas me paraît être important, puisqu'il nous permet d'expliquer, par l'action des parties consécutives d'un milieu, des phénomènes que l'on croyait auparavant ne pouvoir s'expliquer que par une action directe à distance.

111. Je n'ai pas réussi à faire le second pas, à rendre compte par des considérations mécaniques de ces tensions du diélectrique. J'abandonne donc la théorie à ce point, me bornant à énoncer quelles sont les autres parties du phénomène de l'induction dans les diélectriques.

1° *Déplacement électrique* (1). — Lorsque l'induction se transmet à travers un diélectrique, il y a d'abord un déplacement d'électricité dans la direction de l'induction. Par exemple, dans une bouteille de Leyde dont l'armature intérieure est chargée positivement et l'armature extérieure négativement, le déplacement de l'électricité positive à travers la masse du verre se fait du dedans vers le dehors.

---

(1) [Le mot de déplacement électrique ne doit pas faire penser au lecteur que le passage d'une certaine quantité d'électricité à travers un diélectrique puisse être assimilé à un déplacement élastique du milieu; le caractère des déformations élastiques est de donner naissance à des forces qui leur sont proportionnelles et changent de signe avec elles, tandis que la tension est proportionnelle au carré du déplacement électrique et que l'état hypothétique du diélectrique est indépendant du sens de ce déplacement. On est donc obligé de supposer au milieu dans lequel se produit le déplacement électrique une constitution toute spéciale, différente de celle des milieux élastiques proprement dits. *Voir* § 831.] (P.)

Pendant tout le temps que ce déplacement croît, les choses se passent comme si un courant d'électricité positive allait de dedans au dehors; de même une diminution du déplacement équivaudrait à un courant de sens inverse.

La quantité totale d'électricité déplacée à travers l'aire d'une surface quelconque fixe dans le diélectrique a pour mesure la quantité que nous avons déjà étudiée au § 75, c'est-à-dire l'intégrale de surface de l'induction à travers cette aire, multipliée par $\frac{K}{4\pi}$, où K est la capacité inductrice spécifique du diélectrique.

2° *Charge superficielle des molécules du diélectrique.* — Concevons une partie du diélectrique, grande ou petite, séparée du reste par une surface fermée idéale. Nous devons supposer que sur chaque élément de cette surface il y a une charge, qui a pour mesure le déplacement total d'électricité à travers cet élément de surface, compté vers l'intérieur.

Dans le cas d'une bouteille de Leyde dont l'armature intérieure est chargée positivement, une portion quelconque de verre aura sa face intérieure chargée positivement et sa face extérieure négativement. Si cette portion est tout entière à l'intérieur du verre, sa charge superficielle est entièrement neutralisée par la charge opposée des parties qu'elle touche; mais, si elle est en contact avec un corps conducteur, dans lequel ne peut se maintenir l'état d'induction, la charge superficielle n'est plus neutralisée, mais constitue la charge apparente que l'on appelle généralement *charge du conducteur*.

Par suite, la charge qui se trouve à la surface de séparation du conducteur et du milieu diélectrique, et que l'on appelait dans l'ancienne théorie charge du conducteur, doit être appelée dans la théorie de l'induction, la *charge superficielle du diélectrique environnant*.

D'après cette théorie, toute charge est l'effet résiduel de la polarisation du diélectrique. Cette polarisation existe dans toute l'étendue de sa masse; mais elle y est neutralisée par des charges inverses des parties contiguës, en sorte que les effets de charge ne deviennent apparents qu'à la surface du diélectrique.

La théorie rend compte entièrement du théorème du § 77, à savoir que l'induction totale à travers une surface est égale à la quantité totale d'électricité contenue dans cette surface, multipliée par 4π; car ce que nous avons appelé induction à travers la surface n'est que le déplacement électrique multiplié par 4π, et le déplacement total vers le dehors est nécessairement égal à la charge totale contenue à l'intérieur de la surface.

La théorie rend également compte de l'impossibilité de donner à la matière *une charge absolue;* car toute molécule de diélectrique a à ses extrémités opposées des charges égales et opposées; et peut-être serait-il plus correct encore de dire que ces charges ne sont que la manifestation d'un seul phénomène que nous appelons la *polarisation électrique.*

Un milieu diélectrique, ainsi polarisé, est le siège d'énergie électrique; et l'énergie, pour l'unité de volume du milieu, est numériquement égale à la tension électrique sur l'unité d'aire, ces deux quantités étant égales à la moitié du produit du déplacement par l'intensité électromotrice résultante, ou

$$p = \frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi}\mathrm{K}\mathfrak{E}^2 = \frac{2\pi}{\mathrm{K}}\mathfrak{D}^2,$$

où p est la tension électrique, $\mathfrak{D}$ le déplacement, $\mathfrak{E}$ l'intensité électromotrice, et K la capacité inductive spécifique.

Si le milieu n'est pas un isolant parfait, l'état de tension que nous appelons *polarisation électrique* se détruit constamment. Le milieu cède à la force électromotrice, la tension électrique diminue, et l'énergie potentielle de cet état de contrainte se transforme en chaleur. La vitesse avec laquelle se produit cette destruction de l'état de polarisation du milieu dépend de la nature de ce milieu. Dans certaines espèces de verre, des jours, des années peuvent s'écouler avant que la polarisation tombe de la moitié de sa valeur initiale. Dans le cuivre, un changement identique s'effectue en moins d'un billionième de seconde (1).

Nous avons supposé qu'après avoir été polarisé le milieu a été simplement abandonné à lui-même. Dans le phénomène appelé *courant électrique,* le passage continu de l'électricité tend à rétablir l'état de polarisation, aussi vite que la conductibilité du milieu lui permet de se détruire. Ainsi l'agent extérieur, qui entretient le courant, dépense constamment du travail pour rétablir la polarisation du milieu, laquelle se détruit constamment; l'énergie potentielle de cette polarisation se transforme constamment en chaleur, et, après cette dépense d'énergie qui entretient le courant, le résultat final est d'élever graduellement la température du conducteur, jusqu'à ce qu'il se perde par conduction et radiation de la surface autant de chaleur qu'il s'en produit durant le même temps par le passage du courant électrique.

(1) [Aucune expérience jusqu'à ce jour n'a mis en évidence la polarisation dont Maxwell suppose l'existence dans les conducteurs proprement dits, tels que les métaux.] (P.)

CHAPITRE VI.

DES POINTS ET DES LIGNES D'ÉQUILIBRE.

112. Si en un point du champ électrique la force résultante est nulle, ce point est appelé un *point d'équilibre*.

Si tous les points d'une ligne sont des points d'équilibre, la ligne est appelée *ligne d'équilibre*.

Les conditions pour qu'un point soit un point d'équilibre sont que l'on ait en ce point

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

En un tel point, la valeur de V est donc maximum ou minimum, ou stationnaire, par rapport aux variations des coordonnées. Mais le potentiel ne peut avoir de valeur maximum ou minimum, qu'en un point chargé d'électricité positive ou négative, ou dans un espace fini limité par une surface chargée positivement ou négativement. Si donc on rencontre un point d'équilibre dans une partie du champ qui n'a pas de charge, ce ne peut être qu'un point stationnaire, mais non un maximum ni un minimum.

En effet, la première condition pour que l'on ait un maximum ou un minimum est que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

soient tous positifs ou tous négatifs, s'ils ont des valeurs finies. Or, d'après l'équation de Laplace, la somme de ces trois quantités est nulle en un point où il n'y a pas de charge : cette condition ne peut donc être satisfaite.

Au lieu de rechercher les conditions analytiques des cas où les trois composantes de la force s'annulent simultanément, nous allons faire une étude générale au moyen des surfaces équipotentielles.

Si, en un point P, V passe par un maximum véritable, la valeur de V est plus grande en P qu'en tous les autres points du voisinage immédiat; donc P est entouré par une série de surfaces équipotentielles fermées, chacune extérieure à la précédente, et en tous les points de chacune de ces surfaces la force électrique est dirigée vers le dehors. Or nous avons démontré au § 76 que l'intégrale de l'intensité électro-

motrice, prise sur une surface fermée quelconque, est égale à la charge totale comprise à l'intérieur de cette surface, multipliée par 4π. Dans le cas actuel, la force est dirigée vers le dehors en tous les points, et par suite l'intégrale de surface est nécessairement positive : il y a donc une charge positive à l'intérieur de la surface; et, comme cette surface peut être prise aussi voisine de P qu'on le veut, il y a une charge positive en P.

On démontrerait de même que, si V est minimum en P, P a une charge négative.

Enfin, soit P un point d'équilibre dans une région qui n'a point de charge : décrivons autour de P une sphère de très petit rayon. Ainsi que nous l'avons vu, le potentiel sur cette surface ne peut être partout plus grand qu'en P, ni partout plus petit. Il doit donc être plus grand sur certaines parties de cette surface, plus petit sur d'autres. Ces portions de surfaces sont limitées par des lignes le long desquelles le potentiel est le même qu'en P. Le long des lignes menées de P aux points où le potentiel est plus petit qu'en P, la force électrique est dirigée de P vers le dehors; le long des lignes menées de P aux points à un potentiel plus élevé, la force électrique est dirigée du dehors vers P : donc le point P est un point d'équilibre stable pour certains déplacements, et d'équilibre instable pour les autres déplacements.

113. Pour déterminer le nombre des points et des lignes d'équilibre, considérons la ou les surfaces pour lesquelles le potentiel a une valeur donnée C. Appelons *régions négatives* les régions où le potentiel a une valeur inférieure à C, *régions positives* les régions où il a une valeur plus grande que C. Soient V_0 le plus bas et V_1 le plus haut potentiel du champ électrique. Si nous faisons $C = V_0$, la région négative ne renfermera que le point ou le conducteur au potentiel le plus bas, et celui-là a forcément une charge négative. La région positive comprend le reste de l'espace, et, puisqu'elle entoure la région négative, elle est périphractique (*voir* § 18).

Si nous augmentons la valeur de C, la région négative va s'étendre, et de nouvelles régions négatives vont se former autour des corps chargés négativement; à chaque région négative qui se forme ainsi, la région positive environnante acquiert un degré de plus de périphraxie. Lorsque les régions négatives s'étendent, deux ou plusieurs d'entre elles peuvent se rencontrer suivant un point ou suivant une ligne. Si $n+1$ régions négatives se rencontrent, la région positive perd n degrés de périphraxie, et le point ou la ligne suivant laquelle elles se rencontrent est un point ou une ligne d'équilibre du degré n.

Lorsque C devient égal (1) à V_1, la région positive se réduit au point ou au conducteur dont le potentiel est le plus élevé, et par suite elle a perdu toute périphraxie; donc, si chaque point ou chaque ligne d'équilibre compte pour un, deux ou n, suivant son degré, le nombre total formé par les points et les lignes considérées est inférieur d'une unité au nombre des corps chargés négativement.

Il y a d'autres points et d'autres lignes d'équilibre que l'on rencontre, lorsque les régions positives sont séparées les unes des autres et que la région négative acquiert de la périphraxie. Leur nombre, compté d'après leur degré, est inférieur d'une unité au nombre des corps chargés positivement.

Si nous appelons *positifs* les points ou les lignes d'équilibre formés par l'intersection de deux ou plusieurs régions positives; *négatifs* ceux qui sont formés par la rencontre de régions négatives; et s'il y a p corps chargés positivement, n corps chargés négativement, la somme des degrés des points et des lignes d'équilibre positifs est $p-1$, et la somme des degrés des points et des lignes d'équilibre négatifs est $n-1$. La surface qui entoure le système électrisé à une distance infinie doit être comptée comme un corps ayant une charge égale et contraire à la somme des charges du système.

Mais, en outre de ces points et de ces lignes d'équilibre en nombre défini, qui sont formés par l'intersection des différentes régions, il peut en exister d'autres, dont nous pouvons dire seulement qu'ils sont en nombre pair. En effet, si, en s'étendant, une des régions négatives se recoupe elle-même, elle devient cyclique, et, en se rencontrant elle-même à diverses reprises, elle peut acquérir un nombre quelconque de degrés de cyclose, chacun de ces degrés correspondant au point ou à la ligne d'équilibre qui a donné lieu à la cyclose. Si la région négative continue de s'étendre jusqu'à remplir tout l'espace, elle perd tous les degrés de cyclose qu'elle avait acquis et finit par devenir acyclique. Il y a donc une série de points ou de lignes d'équilibre, sur lesquels se perd la cyclose, et ils sont égaux quant au nombre et au degré aux points et aux lignes sur lesquels s'était produite la cyclose.

Si la forme des corps chargés ou des conducteurs est arbitraire, nous pouvons seulement dire que le nombre de ces points additionnels est pair; mais, si l'on a des points chargés, ou des conducteurs sphériques, le nombre des points additionnels ne peut être supérieur à $(n-1)(n-2)$, n étant le nombre des corps.

---

(1) [Plus exactement, lorsque C ne diffère plus de V_1 que d'une quantité infiniment petite. (P.)]

114. Le potentiel au voisinage d'un point P peut être développé suivant la série

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \dots,$$

où H_1, H_2, ... sont des fonctions homogènes de x, y, z, dont les degrés sont respectivement 1, 2, ...

Puisque les dérivées premières de V s'annulent en un point d'équilibre, en un tel point $H_1 = 0$.

Soit H_n la première fonction qui ne s'annule pas : dans le voisinage du point P, nous pouvons négliger devant H_n toutes les fonctions de degré supérieur.

Or

$$H_n = 0$$

est l'équation d'un cône de degré n, qui est le cône ayant le contact le plus intime avec la surface équipotentielle au point P.

On voit donc que la surface équipotentielle passant par P a en ce point un point conique auquel est tangent un cône du deuxième degré ou d'un degré supérieur. L'intersection de ce cône avec une sphère ayant son sommet pour centre est appelée *ligne nodale*.

Si le point P n'est pas sur une ligne d'équilibre, la ligne nodale n'a pas de points doubles, mais se compose de courbes fermées dont le nombre est n ou plus petit.

Si la ligne nodale a des points doubles, le point P est sur une ligne d'équilibre, et la surface équipotentielle passant par P se coupe elle-même suivant cette ligne.

S'il y a des points doubles de la ligne nodale qui ne soient pas diamétralement opposés sur la sphère, le point P est à l'intersection de trois ou de plusieurs lignes d'équilibre; car la surface équipotentielle passant par P doit se couper elle-même suivant chacune des lignes d'équilibre.

115. Si deux nappes d'une surface équipotentielle se coupent, ce ne peut être qu'à angle droit (1).

Car, la tangente à la ligne d'intersection étant prise pour axe des z, on a

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Prenant aussi l'axe des x suivant la tangente à l'une des nappes, on a

(1) [Énoncé inexact, puisque l'on démontre qu'elles se coupent sous un angle $\frac{\pi}{n}$. Il faudrait dire : Si la surface a deux nappes seulement. (P.)]

aussi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Il résulte alors de cela et de l'équation de Laplace que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

ou que l'axe des y est tangent à l'autre nappe. Ce raisonnement suppose H_2 fini. Si H_2 est nul, prenons encore pour axe des z la tangente à la ligne d'intersection, et posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (1). Alors, puisque

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0,$$

équation dont la solution ordonnée suivant les puissances ascendantes de r est

$$V = V_0 + A_1 r\cos(\theta + \alpha_1) + A_2 r^2\cos(2\theta + \alpha_2) + \ldots + A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n).$$

En un point d'équilibre $A_1 = 0$, et si le premier coefficient qui ne s'annule pas est celui de r^n,

$$V - V_0 = A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n)$$

plus des termes renfermant des puissances plus élevées de r.

Cette équation montre que les n nappes de la surface équipotentielle $V = V_0$ se coupent sous des angles qui sont tous égaux à $\frac{\pi}{n}$. Ce théorème a été établi par Rankine (2) (3).

---

(1) [Inexact. (P.)]

(2) *Résumé des propriétés de certaines lignes d'écoulement* (*Phil. Mag.*, oct. 1864). *Voir* aussi Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 780; et Rankine et Stokes, dans les *Proc. R. S.*, p. 468, 1867; et W. R. Smith, *Proc. R. S. Edinb.*, p. 79, 1869-70.

(3) [La démonstration originale du théorème de Rankine est irréprochable. Le polynôme H_n (§ 114) peut s'écrire $A_p z^{n-p} + A_{p+1} z^{n-p-1} + \ldots + A_n$, en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de z; l'axe des z est alors une arête singulière d'ordre p, les A étant des polynômes homogènes en x et y dont l'indice exprime le degré. Ce polynôme doit satisfaire à l'équation de Laplace, ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial^2 A_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_p}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad A_p = r^p\cos(p\theta + \alpha),$$

en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Mais l'équation $A_p = 0$ est l'équation des plans tangents au cône $H_n = 0$, le long

Ce n'est que sous certaines conditions qu'il peut exister une ligne d'équilibre dans l'espace libre; mais il y a toujours une ligne d'équilibre sur la surface d'un conducteur, lorsque la densité superficielle est positive dans une partie et négative dans une autre.

Pour qu'un conducteur puisse avoir des charges contraires en différents points de sa surface, il faut qu'il y ait dans le champ des points où le potentiel est plus élevé que celui du corps, et d'autres points où le potentiel est plus bas.

Prenons d'abord deux corps électrisés positivement au même potentiel, il y aura entre les deux un point d'équilibre. Faisons diminuer graduellement le potentiel du premier corps : le point d'équilibre s'en rapproche et, à une certaine époque de notre opération, vient coïncider avec un point de la surface. Si nous continuons l'opération, la surface équipotentielle qui entoure le second corps, et qui est au même potentiel que le premier, coupe à angle droit la surface de ce second corps, suivant une courbe fermée qui est une ligne d'équilibre. Cette courbe fermée, après avoir décrit toute la surface du conducteur, va de nouveau se réduire à un seul point; puis le point d'équilibre s'éloignera de l'autre côté du premier corps, et il sera à une distance infinie lorsque les deux corps auront des charges égales et contraires.

Théorème d'Earnshaw.

116. Un corps électrisé, placé dans un champ de force électrique, ne peut être en équilibre stable.

Supposons d'abord que l'électricité du corps mobile (A) et celle du système de corps environnants (B) soient fixes sur ces corps.

Soit V le potentiel en un point du corps mobile dû à l'action des corps environnants (B), et soit e l'électricité répandue sur une petite partie du corps mobile A autour du point considéré. L'énergie potentielle de A par rapport à B sera.

$$M = \Sigma(Ve),$$

la sommation s'étendant à chacun des éléments électrisés de A.

Soient a, b, c les coordonnées d'un point électrisé de A, par

---

de la génératrice singulière, ou des plans tangents aux diverses nappes de la surface : celles-ci se coupent donc sous des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$.

Maxwell écrit à tort que la condition $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ doit être satisfaite en tous les points de l'espace pour que l'axe des z soit arête singulière. (P.)]

rapport à trois axes fixes dans A, et parallèles aux axes des x, y, z. Soient ξ, η, ζ les coordonnées absolues de l'origine de ce système d'axes.

Supposons pour l'instant que le corps A soit astreint à se mouvoir parallèlement à lui-même; les coordonnées absolues du point a, b, c deviennent

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c.$$

Le potentiel du corps A par rapport à B peut s'exprimer par la somme d'un certain nombre de termes, dans chacun desquels V est exprimé en fonction de a, b, c et ξ, η, ζ. La somme de ces termes est une fonction de a, b, c qui sont constants pour chaque point du corps, et de ξ, η, ζ qui varient lorsque le corps se meut.

Puisque l'équation de Laplace est satisfaite par chacun de ces termes, elle l'est par leur somme, ou

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Donnons maintenant à A un petit déplacement, tel que

$$d\xi = l\,dr, \quad d\eta = m\,dr, \quad d\zeta = n\,dr;$$

et soit dM l'accroissement du potentiel de A par rapport au système environnant B.

Si cet accroissement est positif, il faudra dépenser du travail pour augmenter r, et il y aura une force

$$R = \frac{dM}{dr},$$

qui tendra à diminuer r et à ramener A à sa première position; pour ce déplacement, l'équilibre sera donc stable. Si au contraire cet accroissement est négatif, la force tendra à augmenter r, et l'équilibre sera instable.

Considérons maintenant une sphère ayant son centre à l'origine, et un rayon r assez petit pour que, si le point fixe du corps est compris dans la sphère, aucune partie du corps mobile A ne puisse coïncider avec aucune partie du système extérieur B. Alors, puisque dans l'intérieur de la sphère

$$\nabla^2 M = 0,$$

l'intégrale

$$\iint \frac{dM}{dr}\, dS,$$

prise sur la surface de la sphère, sera nulle.

Donc si, sur une partie de la surface de la sphère, $\frac{dM}{dr}$ est positif, il doit y avoir une autre partie de la surface où il est négatif; et si le corps A est déplacé dans une direction où $\frac{dM}{dr}$ est négatif, il tendra à s'éloigner de sa position initiale, et, par suite, l'équilibre est forcément instable.

Ainsi l'équilibre est instable, lors même que le corps est astreint à ne se mouvoir que parallèlement à lui-même : *a fortiori* est-il instable, si le corps est entièrement libre.

Supposons maintenant que le corps A soit un conducteur. Nous pouvons traiter ce cas comme celui de l'équilibre d'un système de corps, l'électricité mobile étant considérée comme une partie de ce système; et nous pourrions conclure que, si le système est instable lorsqu'on lui a enlevé un certain nombre de degrés de liberté en fixant l'électricité, il l'est *a fortiori* lorsque cette liberté lui est rendue.

Mais nous pouvons traiter ce cas d'une façon plus particulière, de la manière suivante :

En premier lieu, supposons que l'électricité soit fixe sur A et que A se déplace de la petite distance dr. On a déjà considéré l'accroissement du potentiel de A dû à ce déplacement.

En second lieu, laissons l'électricité se mouvoir dans A et prendre sa distribution d'équilibre, qui est toujours stable. Pendant ce mouvement, le potentiel *décroît* nécessairement d'une quantité que l'on peut appeler $C\,dr$ (*voir* § 100).

Donc l'accroissement total du potentiel sera, lorsque l'électricité est libre de se mouvoir,

$$\left(\frac{dM}{dr} - C\right) dr,$$

et la force tendant à ramener A à sa position initiale sera

$$\frac{dM}{dr} - C,$$

où C est toujours positif.

Or nous avons montré que $\frac{dM}{dr}$ est négatif dans certaines directions; donc, lorsque l'électricité est libre de se mouvoir, l'instabilité dans ces directions est accrue.

CHAPITRE VII.

FORME DES SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES ET DES LIGNES D'INDUCTION DANS DES CAS SIMPLES.

117. Nous avons vu que l'on peut ramener la détermination de la distribution électrique à la surface d'un conducteur à la recherche de la solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

V étant une fonction de x, y, z qui est toujours finie et continue, qui s'annule à l'infini, et qui prend une valeur constante à la surface de chaque conducteur.

En général, les méthodes mathématiques connues ne permettent pas de résoudre cette équation, de façon à satisfaire à des conditions arbitrairement données; mais il est aisé de trouver un nombre quelconque de fonctions V satisfaisant à l'équation, et de déterminer dans chaque cas la forme des surfaces conductrices, de façon que ces fonctions V soient de véritables solutions.

On voit donc que ce que l'on pourrait appeler naturellement le problème inverse, à savoir, déterminer la forme des conducteurs, étant donnée l'expression du potentiel, est bien plus abordable que le problème direct : déterminer le potentiel, étant donnée la forme des conducteurs.

En fait, tous les problèmes électriques dont nous connaissons la solution ont été combinés par la méthode inverse. Il est donc de la plus grande importance pour l'électricien de connaître les résultats obtenus dans cette voie, puisque la seule méthode qui nous promette la solution de nouveaux problèmes consiste à réduire ces problèmes aux cas de problèmes analogues combinés à l'aide de la méthode inverse.

On peut tirer parti de deux manières de la connaissance historique de ces résultats : si l'on nous demande de combiner un appareil en vue de faire des mesures électriques de la plus grande exactitude possible, nous pouvons choisir pour les surfaces électrisées des formes

correspondant aux cas pour lesquels nous connaissons la solution exacte. Si, d'autre part, on nous demande d'évaluer la charge répandue sur des corps de forme donnée, nous pouvons partir d'un cas où une des surfaces équipotentielles prend une forme se rapprochant de la forme donnée; puis, par une méthode de tâtonnements, nous pourrons modifier le problème, jusqu'à ce qu'il réponde plus exactement aux données. Considérée au point de vue mathématique, cette méthode est évidemment très imparfaite; mais c'est la seule que nous ayons, et si nous ne sommes pas maîtres de choisir nos données, nous ne pouvons faire qu'un calcul approché de la distribution. Ce qu'il nous faut, c'est donc évidemment de connaître la forme des surfaces équipotentielles et des lignes d'induction dans autant de cas différents que nous en pourrons réunir, et de nous en souvenir. Pour certaines classes de cas, ceux qui se rapportent aux sphères, par exemple, il y a des méthodes mathématiques connues, dont nous pouvons nous servir. Dans les autres cas, nous n'avons d'autre ressource que la méthode plus terre à terre de dessiner par tâtonnement des figures, et de choisir parmi elles celles qui s'écartent le moins des figures dont nous avons besoin.

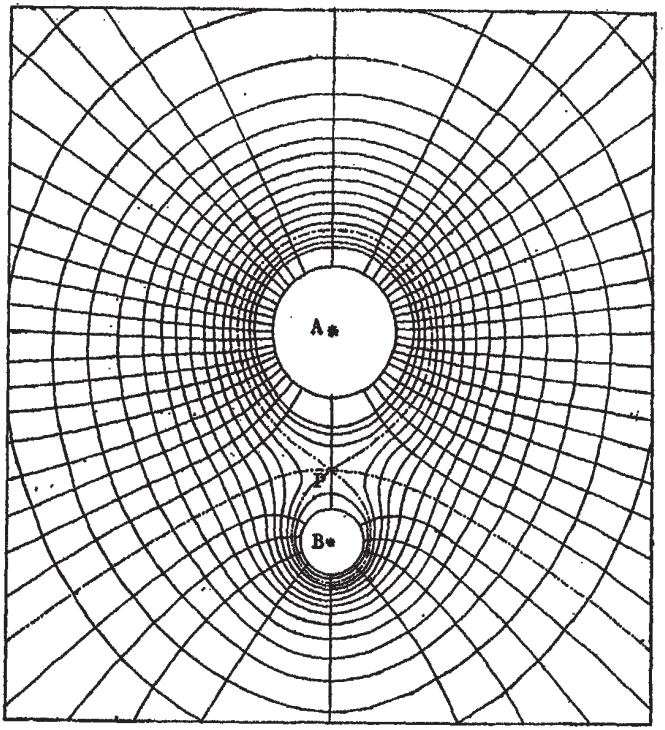
Cette dernière méthode peut, je crois, être de quelque utilité, même dans les cas où l'on a obtenu la solution exacte, car je trouve que, quand l'œil connaît la forme des surfaces équipotentielles, on est souvent conduit à bien choisir la méthode pour la solution mathématique.

J'ai donc tracé les diagrammes de plusieurs systèmes de surfaces équipotentielles et de lignes d'induction, de façon que le lecteur puisse se familiariser avec la forme de ces lignes. Les méthodes au moyen desquelles on peut tracer de pareils diagrammes sont exposées au § 123.

118. La première de ces Planches représente les sections des surfaces équipotentielles qui entourent deux points ayant des charges d'électricité de même nature, et dans le rapport de 20 à 5.

Chaque point est entouré d'un système de surfaces équipotentielles, d'autant plus voisines d'être des sphères qu'elles sont plus petites, quoique aucune d'elles ne soit rigoureusement une sphère. Si l'on prend pour surfaces de deux corps conducteurs deux de ces surfaces, une autour de chaque point, presque sphériques, mais ne l'étant pas complètement, et si ces corps sont chargés d'électricité de même espèce, le rapport des charges étant de 4 à 1, le diagramme représentera les surfaces équipotentielles, pourvu que l'on efface les courbes

Pl. I.



Lignes de force et surfaces équipotentielles.

A = 20, B = 5, P, point d'équilibre, $AP = \frac{4}{5}AB$.

intérieures aux deux corps. On voit par ce diagramme que l'action entre les corps est la même qu'entre deux points ayant les mêmes charges, qui ne seraient pas exactement au milieu de l'axe de chaque corps, mais un peu plus écartés l'un de l'autre que ne sont ces points milieux.

Le même diagramme nous permet de voir ce que sera la distribution sur une des surfaces ovales, plus larges d'un bout que de l'autre, qui entourent les deux centres. Un pareil corps, chargé de 25 unités d'électricité et n'étant soumis à aucune influence extérieure, aura une densité superficielle maximum à l'extrémité effilée, moindre à l'autre extrémité, et minimum sur un cercle un peu plus voisin du bout effilé que de l'autre.

Il y a une surface équipotentielle représentée par une ligne pointillée, qui est formée de deux nappes se rencontrant au point conique P. Ce point est un point d'équilibre, et la densité superficielle pour un corps ayant la forme de cette surface serait zéro en ce point.

Les lignes de force forment dans ce cas deux systèmes distincts, séparés l'un de l'autre par une surface du sixième degré, indiquée par une ligne pointillée passant par le point d'équilibre et présentant quelque ressemblance avec l'une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes.

Le diagramme peut aussi servir à représenter les surfaces équipotentielles et les lignes de force, dans le cas de deux sphères de matière soumise à la gravitation, dont les masses sont entre elles comme 4 et 1.

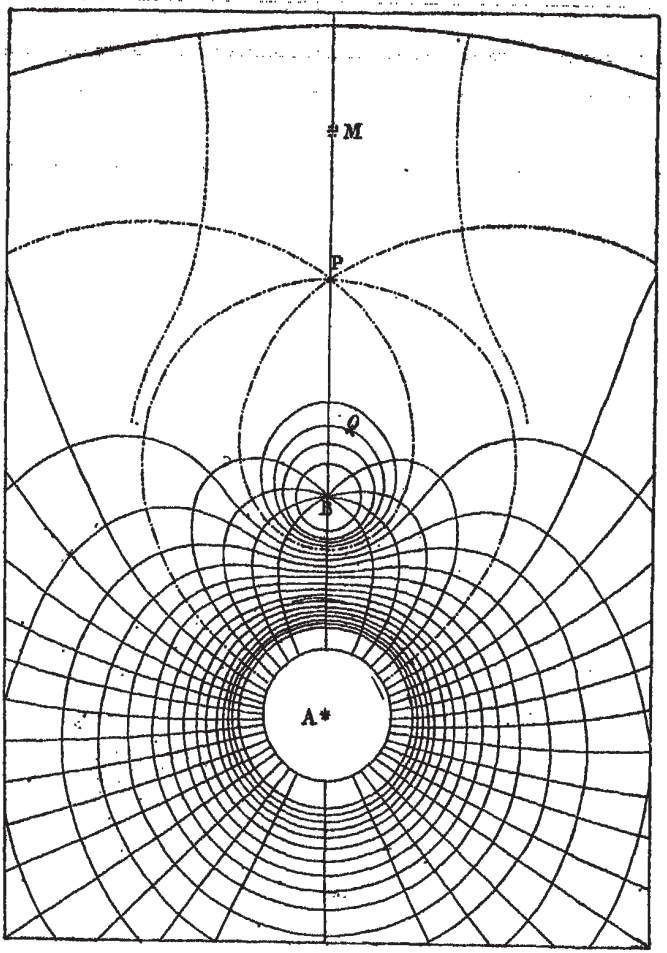
119. Sur la seconde Planche, nous avons encore deux points dont les charges sont comme 20 est à 5; mais l'une est positive et l'autre est négative. Dans ce cas, une des surfaces équipotentielles, celle qui correspond au potentiel zéro, est une sphère : elle est représentée sur le diagramme par le cercle Q. On verra l'importance de cette surface électrique quand nous en viendrons à la théorie des images électriques.

On voit par ce diagramme que deux corps ronds, chargés d'électricités contraires, s'attirent comme deux points ayant les mêmes charges, mais un peu plus rapprochés l'un de l'autre que ne sont les points milieux des corps ronds.

Ici encore, une des surfaces équipotentielles est formée de deux nappes, l'une intérieure qui entoure le point dont la charge est 5, l'autre extérieure qui comprend les deux corps, ces deux nappes se rencontrant en un point conique P, qui est un point d'équilibre.

Si la surface d'un conducteur a la forme de la nappe extérieure, celle d'un corps arrondi comme une pomme et présentant un creux

Pl. II.



Lignes de force et surfaces équipotentielles.

A = 20, B = — 5, P, point d'équilibre, AP = 2AB.

M, point où la force est maximum suivant l'axe.
Q, surface sphérique de potentiel zéro;
La ligne — · — · — · — est la ligne de force Ψ = 0,1.

conique à un des bouts de son axe, nous saurons déterminer la densité superficielle en chacun de ses points. La densité superficielle au fond du creux sera nulle.

Autour de cette surface, nous en avons d'autres qui ont un creux arrondi, s'effaçant de plus en plus et finissant par disparaître sur la surface équipotentielle qui passe par le point marqué M.

Les lignes de force de ce diagramme forment deux systèmes séparés par une surface qui passe par le point d'équilibre.

Si nous considérons les points situés sur l'axe au delà du point B, nous trouvons que la force résultante va en diminuant jusqu'au point double P, où elle s'annule. Elle change alors de signe, atteint un maximum en M, après quoi elle décroît d'une manière continue.

Mais ce maximum n'est qu'un maximum relativement aux autres points de l'axe; car, si nous considérons une surface passant par M et perpendiculaire à l'axe, M est le point où la force est minimum relativement aux points voisins sur cette surface.

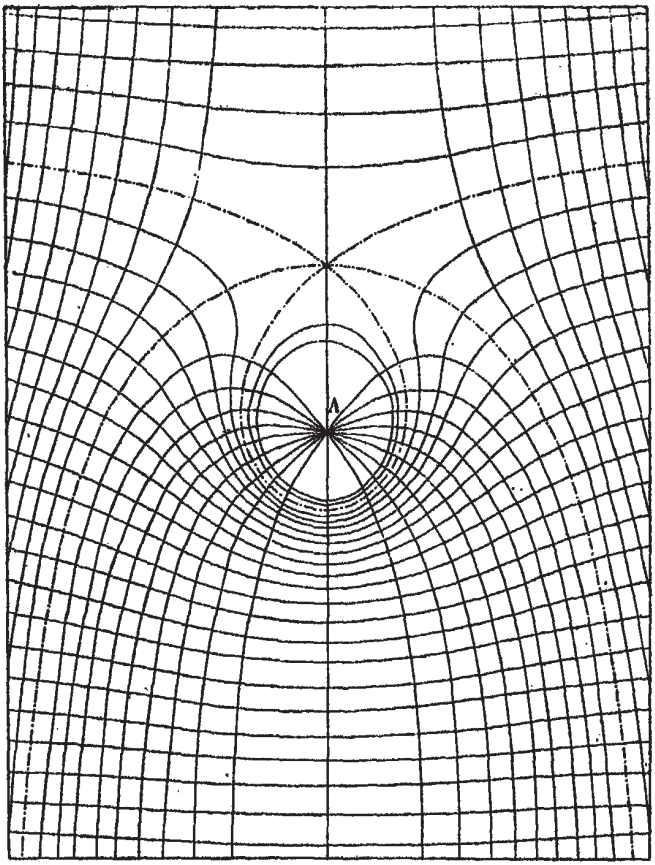
120. La *Pl. III* représente les surfaces équipotentielles et les lignes d'induction dues à un point dont la charge est 10, placé en A et entouré par un champ de force qui, avant l'introduction du point chargé, était partout uniforme, en direction comme en grandeur.

Les surfaces équipotentielles ont chacune un plan asymptotique. L'une d'elles, indiquée par un trait pointillé, présente un point conique et une nappe qui entoure le point A. Au-dessous de celle-là, les surfaces équipotentielles n'ont qu'une nappe présentant une dépression près de l'axe. Au-dessus, elles ont une partie fermée qui entoure A, et une autre nappe séparée présentant une légère dépression près de l'axe.

Si nous prenons pour surface d'un conducteur une des surfaces au-dessous de A, et une autre fort éloignée au-dessus de A pour surface d'un second conducteur à un potentiel différent, le système des lignes et des surfaces comprises entre les deux conducteurs figurera la distribution de la force électrique. Si le conducteur inférieur est très éloigné de A, sa surface est presque plane, et nous avons là la solution du problème de la distribution électrique sur deux surfaces, qui toutes deux sont à très peu près planes et parallèles, sauf que la surface supérieure présente vers son milieu une protubérance qui est plus ou moins accentuée, suivant la surface équipotentielle particulière que l'on a choisie (1).

(1) [*Voir* la Note complémentaire à la fin du Chapitre. (C.)]

Pl. III.



Lignes de force et surfaces équipotentielles.

A = 10.

121. La *Pl. IV* représente les surfaces équipotentielles et les lignes d'induction dues à trois points A, B et C, la charge de A étant de 15 unités d'électricité positive, celle de B de 12 négatives, et celle de C de 30 positives. Ces points sont placés en ligne droite, de façon que

$$AB = 9, \quad BC = 16, \quad AC = 25.$$

Dans ce cas, la surface au potentiel zéro est formée de deux sphères dont les centres sont A et C et les rayons 15 et 20. Ces sphères se rencontrent suivant un cercle qui coupe le plan de papier à angle droit en D et D′, de sorte que B est le centre de ce cercle dont le rayon est 12. Ce cercle est un exemple de ligne d'équilibre, car la force résultante est nulle en chaque point de cette ligne.

Si nous supposons que la sphère de centre A soit un conducteur chargé de 3 unités d'électricité positive et soumis à l'influence de 20 unités semblables placées en C, l'état de ce système sera représenté par le diagramme dont nous aurons effacé toutes les lignes intérieures à la sphère A. La partie de cette sphère qui est au delà du petit cercle DD′ est chargée négativement par l'influence de C; tout le reste de la sphère est chargé positivement, et le petit cercle DD′ lui-même est une ligne sur laquelle il n'y a point de charge.

Nous pouvons aussi considérer le diagramme comme représentant la sphère de centre C chargée de 8 unités d'électricité positive et soumise à l'influence de 15 unités semblables placées en A.

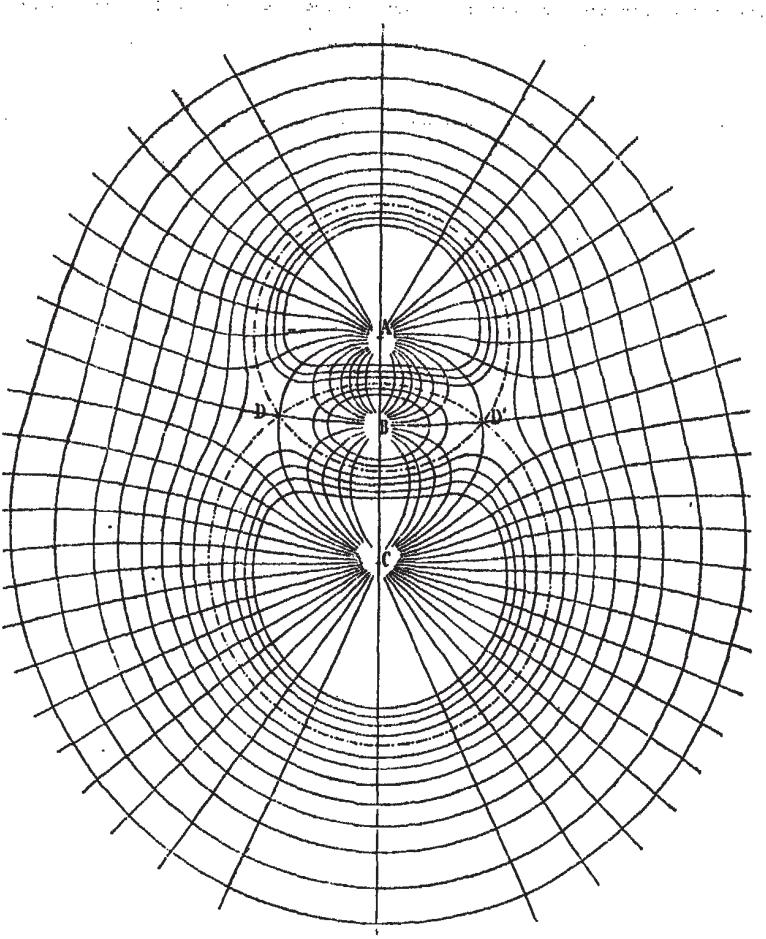
On peut encore prendre ce diagramme pour représenter un conducteur formé des grands segments de sphères qui se coupent en DD′ et chargé de 23 unités positives.

Nous reviendrons sur l'étude de ces diagrammes comme application de la théorie des images électriques de Thomson (*voir* § 168).

122. Ces diagrammes seront aussi étudiés avec fruit pour comprendre plus clairement le langage de Faraday, qui parle de *lignes de force*, de *force d'un corps électrisé*, etc.

Sous le nom de *force* on envisage spécialement cette propriété de l'action qui s'exerce entre deux corps matériels, en vertu de laquelle les mouvements de ces corps deviennent différents de ce qu'ils auraient été en l'absence de cette action. Si l'on considère les deux corps à la fois, l'ensemble du phénomène s'appelle *tension* et peut être défini comme consistant en un transport de quantité de mouvement d'un des corps sur l'autre. Lorsque nous ne portons notre attention que sur le premier des corps, la tension est appelée *force motrice* ou simplement

Pl. IV.



Lignes de force et surfaces équipotentielles.

A = 15, B = — 12, C = 20.

force agissant sur ce corps, et elle a pour mesure la quantité de mouvement que le corps reçoit par l'unité de temps.

L'action mécanique qui s'exerce entre deux corps électrisés est une tension, celle qui ne s'exerce que sur l'un d'eux est une force. La force exercée sur un petit corps électrisé est proportionnelle à sa charge, et la force par l'unité de charge est appelée *intensité de la force*.

Le mot d'*induction* a été employé par Faraday pour désigner la façon dont les charges des corps dépendent les unes des autres, chaque unité de charge positive étant reliée à une unité de charge négative par une ligne qui, sur tout son parcours dans un diélectrique fluide, a la même direction que l'intensité électrique. Une pareille ligne est souvent appelée une *ligne de force;* mais il est plus correct de l'appeler une *ligne d'induction*.

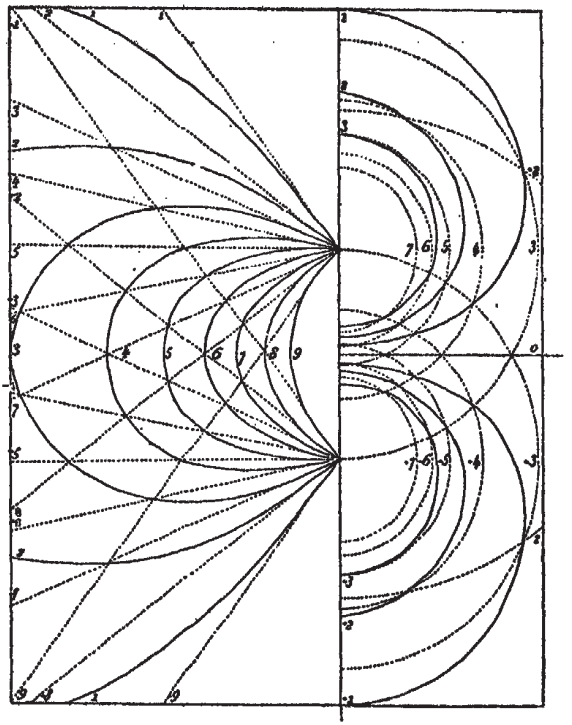
Or, suivant les idées de Faraday, la quantité d'électricité d'un corps a pour mesure le *nombre* des lignes de force ou plutôt d'induction qui émanent de ce corps. Ces lignes doivent toutes se terminer quelque part, sur des corps voisins, sur les murs et le plafond de la chambre, sur la Terre ou sur les corps célestes; et là où elles se terminent se trouve une quantité d'électricité précisément égale et contraire à celle qui se trouve sur la partie du corps d'où elles sont parties. En examinant les diagrammes, on voit qu'il en est bien ainsi. Il n'y a donc pas contradiction entre les vues de Faraday et les résultats mathématiques de l'ancienne théorie; au contraire, l'idée des lignes de force jette une grande lumière sur ces résultats : elle semble nous fournir le moyen de nous élever par un enchaînement continu de raisonnements, depuis les conceptions quelque peu dépourvues de souplesse de l'ancienne théorie, jusqu'à des notions susceptibles de plus d'ampleur; elle paraît ainsi nous ouvrir un champ étendu pour accroître nos connaissances par de nouvelles recherches.

123. Voici de quelle manière sont construits ces diagrammes : Prenons d'abord le cas d'un seul centre de force, un petit corps électrisé avec une charge e. Le potentiel à la distance r est $V = \frac{e}{r}$; d'où, si nous faisons $r = \frac{e}{V}$, nous tirerons r, rayon de la sphère pour laquelle le potentiel est V. Si maintenant nous donnons à V les valeurs 1, 2, 3, ..., et si nous traçons les sphères correspondantes, nous obtiendrons une série de surfaces équipotentielles, dont les potentiels sont ceux qui sont mesurés par les nombres naturels. Les sections de ces sphères par un plan passant par leur centre commun sont des cercles

qui peuvent être marqués chacun du nombre qui représente son potentiel. Ces sections sont représentées par les demi-cercles pointillés sur la partie droite de la *fig.* 6.

S'il y a un autre centre de force, nous pouvons de même tracer les

Fig. 6.



surfaces équipotentielles qui lui correspondent; si maintenant nous voulons trouver la forme des lignes équipotentielles dues à ces deux centres simultanément, nous devons nous souvenir que si V_1 est le potentiel dû à un point et V_2 celui qui est dû à l'autre, le potentiel dû aux deux sera $V = V_1 + V_2$. Donc, puisqu'à chaque intersection des surfaces équipotentielles nous connaissons V_1 et V_2, nous connaissons aussi la valeur de V. Si donc nous menons une surface qui passe par toutes les intersections pour lesquelles la valeur de V est la même, cette surface coïncidera avec la véritable surface équipotentielle en

toutes ces intersections; et si, dans les systèmes primitifs, on a tracé les surfaces suffisamment rapprochées, la nouvelle surface pourra être tracée avec tel degré de précision que l'on voudra. Les lignes équipotentielles dues à deux points dont les charges sont égales et contraires sont figurées à droite sur la *fig.* 6.

Cette méthode peut être appliquée au tracé d'un système quelconque de surfaces équipotentielles, lorsque le potentiel est la somme de deux autres pour lesquels on a déjà tracé les surfaces équipotentielles.

Les lignes de force dues à un seul centre de force sont des lignes droites rayonnant autour de ce centre. Si nous voulons représenter par ces lignes l'intensité aussi bien que la direction de la force en un point, nous devons les tracer de façon qu'elles interceptent sur les surfaces équipotentielles des parties sur lesquelles l'intégrale de surface de l'induction a une valeur déterminée (1). La meilleure manière de le faire est de supposer que notre figure plane soit la section d'une figure de l'espace engendrée par la rotation de la figure plane autour d'un axe passant par le centre de force. Toute ligne droite rayonnant à partir de ce point et faisant avec l'axe un angle θ décrira un cône, et l'intégrale de surface de l'induction qui s'exerce à travers la partie interceptée par ce cône sur une surface quelconque, du côté de la direction positive de l'axe, est

$$2\pi e(1-\cos\theta).$$

Si nous supposons, en outre, que la surface est limitée à son intersection avec deux plans passant par l'axe et inclinés l'un sur l'autre d'un angle dont l'arc est égal à la moitié du rayon, l'induction à travers la surface ainsi limitée est

$$e(1-\cos\theta).$$

Nous poserons

$$e(1-\cos\theta)=2\Phi,$$

d'où

$$\theta=\arccos\left(1-2\frac{\Phi}{e}\right).$$

Si maintenant nous donnons à Φ une série de valeurs $1, 2, 3, \ldots, e$, nous trouverons une série correspondante de valeurs de θ, et si e est un nombre entier, le nombre des lignes de force correspondantes, y compris l'axe, sera égal à e.

Nous avons ainsi une méthode pour tracer les lignes de force, de

(1) [*Voir* le commentaire relatif à la construction des lignes de force dans la Note II, à la fin du Chapitre. (C.)]

façon que la charge d'un centre soit indiquée par le nombre des lignes qui rayonnent de ce centre, et que l'induction à travers une surface limitée de la façon qui a été décrite ait pour mesure le nombre des lignes de force qui traversent cette surface. Les lignes droites pointillées, à gauche de la *fig.* 6, représentent les lignes de force dues à chacun des deux points électrisés dont les charges sont + 10 et — 10.

S'il y a deux centres de force sur l'axe de la figure, nous pouvons tracer les lignes de force pour chacun des axes correspondant aux valeurs Φ_1 et Φ_2; et, en menant des courbes par celles des intersections de ces lignes pour lesquelles la valeur de $\Phi_1 + \Phi_2$ est la même, nous pouvons trouver les lignes de force dues aux deux centres, et de même nous pouvons combiner deux systèmes quelconques de lignes de force, symétriquement situés de part et d'autre d'un même axe. Les courbes en trait plein, sur la gauche de la *fig.* 6, représentent les lignes de force dues à l'action simultanée des deux points électrisés.

Après que l'on a construit par cette méthode les surfaces équipotentielles et les lignes de force, on peut vérifier l'exactitude du dessin, en observant si les deux systèmes de lignes sont toujours orthogonaux et si la distance des surfaces équipotentielles consécutives est à la distance des lignes de force consécutives comme la demi-distance à l'axe est à l'unité de longueur adoptée dans le tracé.

Dans le cas d'un pareil système, de dimensions finies, la ligne de force, dont l'indice est Φ, a une asymptote qui passe par le centre électrique (§ 89 *d*) du système, et qui est inclinée sur l'axe d'un angle dont le cosinus est $1 - 2\frac{\Phi}{e}$, e étant la charge totale du système, pourvu que Φ soit plus petit que e. Les lignes de force dont l'indice est plus grand que e sont des courbes fermées; si e est nul, toutes les lignes de force sont fermées.

Les lignes de force correspondant à un champ de force uniforme parallèle à l'axe sont des parallèles à l'axe, dont les distances à l'axe sont les racines carrées d'une progression arithmétique.

La théorie des surfaces équipotentielles et des lignes de force dans le plan sera donnée quand nous en viendrons à la théorie des fonctions conjuguées (1).

---

(1) *Voir* un Mémoire *Sur le mouvement de l'électricité dans les surfaces conductrices,* par le professeur W.-U. Sarra (*Proc. Roy. Soc. Edinb.*, 1869-70, p. 79).

NOTE I,

Relative à la construction de la Planche III.

PAR M. A. CORNU.

Les données (120) de la *Pl. III* sont insuffisamment définies, puisque les paramètres qui déterminent le champ électrique uniforme ne sont pas indiqués.

En raison de l'importance de ce cas particulier (peut-être moins facile que le cas général), nous recommandons au lecteur l'étude suivante, qui consistera à retrouver graphiquement le paramètre déterminable : ce sera l'occasion de reconstituer dans ses détails la construction de cette Planche, dont la description est un peu trop sommaire dans le présent Chapitre.

Le premier problème à résoudre est celui-ci :

Étant donnée la Pl. III, qui représente des surfaces équipotentielles et les lignes de force d'un champ électrique primitivement uniforme, déformées par la présence d'un point A, *dont la charge est définie* (A = 10), *déterminer la constante caractéristique du champ avant l'introduction du point électrisé.*

Le champ primitif avait pour surfaces équipotentielles des plans parallèles

$$V_1 = V_0 + \alpha x,$$

V_0 et α étant deux constantes : le coefficient α est la caractéristique de ce champ uniforme, car la *force* exercée sur l'unité de masse électrique placée en un point quelconque est constante en direction et en grandeur. La direction est celle de l'axe des x; la grandeur est

$$\frac{dV}{dx} = \alpha,$$

V_0 est un paramètre arbitraire indépendant de la grandeur de cette force.

L'introduction du point chargé de la quantité A ajoute au potentiel, en chaque point (xy), la quantité

$$V_2 = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

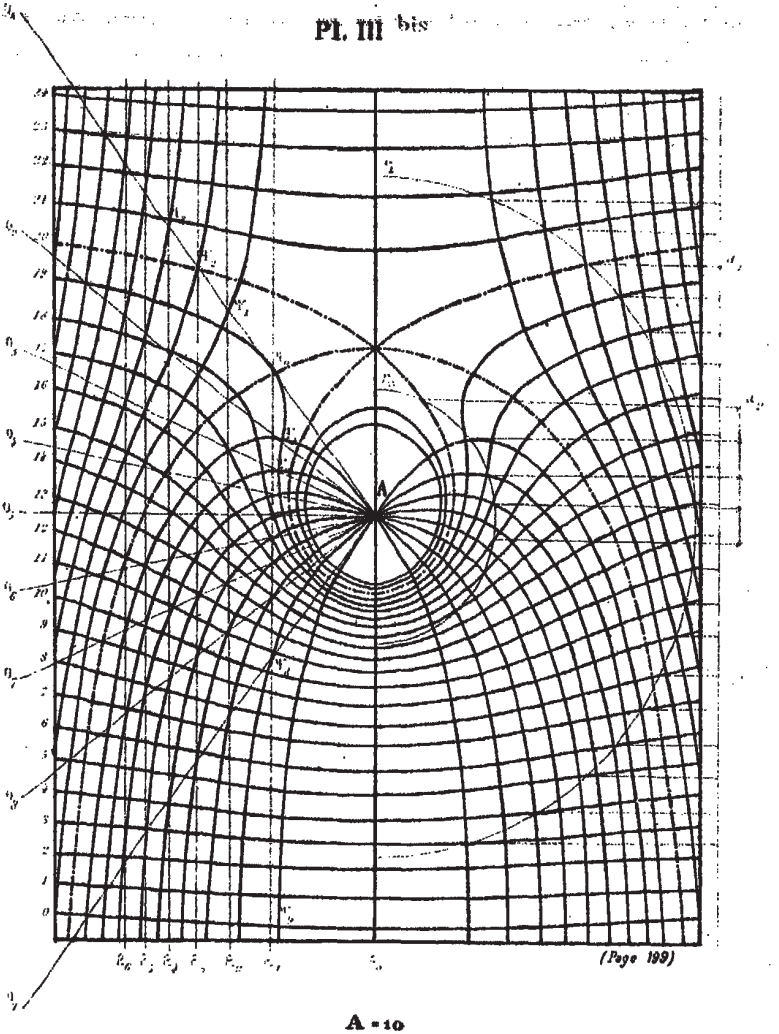
(l'axe des y étant une perpendiculaire quelconque à l'axe de révolution du champ et l'origine des coordonnées au point électrisé).

Le potentiel total sera donc

$$V = V_1 + V_2 = V_0 + \alpha x + \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

On voit que les surfaces équipotentielles (qui sont de révolution autour de l'axe x)

Pl. III bis



(Page 199)

A - 10

ont pour plans asymptotiques les plans

$$V = V_0 + \alpha x.$$

Première construction. — Il résulte de la valeur de V (qui représente l'équation de la méridienne de ces surfaces) que si l'on trace un cercle

$$\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}} = V_1 = \text{const.},$$

l'abscisse x du point d'intersection avec les courbes équipotentielles satisfera à la condition

$$V = V_0 + V_1 + \alpha x.$$

Par conséquent les variations des abscisses du point d'intersection seront proportionnelles aux variations du potentiel, d'où

$$V - V' = \alpha(x - x').$$

Si donc deux courbes équipotentielles correspondant aux valeurs V et V' sont coupées par un même cercle concentrique au point électrisé, les abscisses x, x' des points d'intersection donneront la constante α du champ

$$\alpha = \frac{V - V'}{x - x'}.$$

Mais les courbes équipotentielles de la *Pl. III* ne portent aucune indication donnant les valeurs de V. On ne peut donc pas déduire de cette construction seule la grandeur de α en valeur absolue; on peut seulement vérifier graphiquement que les courbes équipotentielles correspondent à des variations égales de potentiel. En effet, un cercle (*Pl. III bis*) coupe toutes les courbes qu'il rencontre en des points dont les abscisses sont équidistantes (*voir* l'échelle à droite); la distance constante qui les sépare est égale sensiblement à $0^{m},5$, en prenant le *centimètre* pour unité de longueur. On tire donc de cette construction les conditions

$$\alpha \times 0,5 = V_{n+1} - V_n,$$

n étant le numéro d'ordre d'origine arbitraire des courbes successives.

Seconde construction. — On peut arriver à déterminer le coefficient α en traitant le problème d'une autre manière : au lieu de considérer l'intersection de deux courbes V et V' par un même cercle, faisons l'inverse; considérons l'intersection de la même courbe équipotentielle V par deux cercles de rayon r_1 et r_2; on aura

$$V = V_0 + \alpha x_1 + \frac{A}{r_1} = V_0 + \alpha x_2 + \frac{A}{r_2},$$

d'où

$$\alpha(x_1 - x_2) = A\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

A est connu, r_1 et r_2 sont choisis, x_1 et x_2 sont mesurés sur la figure : α est donc déterminé.

La *Pl. III bis* permet de faire cette détermination graphique; on a tracé deux cercles de rayon arbitraire

$$r_1 = 5,12, \quad r_2 = 1,90,$$

l'unité de longueur étant le centimètre, et ces deux cercles coupent diverses courbes équipotentielles qui toutes donnent le même résultat avec une approximation en rapport avec la précision du dessin, précision assez limitée. L'intersection de ces deux cercles avec les courbes numérotées $n = 16, 17, 18, 19, 20$ ($n = 0$ étant la première à partir du bas) donne pour abscisses x_1, x_2 les points marqués (. ×) sur la droite de la *Pl. III bis*, ce qui conduit, pour $x_1 - x_2$, aux nombres suivants :

$$2^{c},00, \quad 2^{c},14, \quad 2^{c},16, \quad 2^{c},13, \quad 2^{c},16; \quad \text{moyenne } 2^{c},14.$$

On reconnaît d'ailleurs que les abscisses pour chaque cercle sont équidistantes d'environ 0,5 ; on en conclut la valeur

$$\alpha = \frac{10}{2,14}\left(\frac{1}{5,12} - \frac{1}{1,90}\right) = 1,5467,$$

avec une approximation qui ne peut guère dépasser $\frac{1}{10}$, puisque la grandeur à mesurer (sur une Planche reproduite plusieurs fois par la gravure et la typographie) n'est que de $0^{m},02$, l'erreur pouvant atteindre $\frac{1}{2}$ millimètre.

Quoi qu'il en soit, on conclut, pour la variation constante de potentiel de l'une à l'autre des courbes, la valeur approximative

$$V_{n+1} - V_n = 0,50\alpha = 0,77.$$

Vérification. — Le point double est celui où la force résultante est nulle (112)

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad V = V_0 + \alpha x + A(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}};$$

on en conclut

$$\alpha - Ax(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0, \quad Ay(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

dont la solution fournit le point cherché

$$y = 0, \quad x = \sqrt{\frac{A}{\alpha}}.$$

Substituant $A = 10$,

$$\alpha = 1,5467;$$

on en tire

$$x = 2,5427.$$

La mesure directe sur la *Pl. III bis* donne

$$x = 2,51.$$

Remarque. — Supposons que l'auteur ait choisi en nombre rond $x = 2,50$. Si l'on prend cette valeur comme point de départ, on trouve

$$\alpha = \frac{A}{x^3};$$

d'où l'on tire, pour $A = 10$,

$$\alpha = 1,600,$$

ce qui conduit à

$$V_{n+1} - V_n = 0,80,$$

c'est-à-dire le nombre rond voisin du chiffre 0,77 trouvé plus haut.

Construction des lignes équipotentielles. — En résumé, les courbes équipotentielles de la *Pl. III* peuvent avoir été construites conformément à la règle du § 123, de la manière suivante :

On a tracé vingt-cinq droites horizontales distantes de $0^m,05$; elles représentent les lignes équipotentielles du champ uniforme primitif et, par suite, les asymptotes des courbes équipotentielles résultantes (les deux extrêmes paraissent former les bords horizontaux du cadre de la figure). Sur la treizième ligne, ou celle du milieu, on a placé le point A supposé chargé de 10 unités d'électricité.

Pour simplifier, on a supposé que le point d'équilibre (112) était placé cinq lignes plus haut, à $2^c,5$ du point A.

Cette condition définit la constante du champ, puisque la force exercée sur l'unité d'électricité par le point A est $\frac{A}{x^2}$, et celle exercée par l'action du champ est α

$$\alpha = \frac{A}{x^2},$$

d'où

$$\alpha = 1,60.$$

Les lignes équipotentielles du champ

$$V_1 = V_0 + 1,60x$$

correspondent donc à des accroissements de $1,60 \times 0,5 = 0,8$ de potentiel

$$V_{n+1} - V_n = 0,8.$$

Comme les lignes équipotentielles résultantes sont le lieu des points dont la somme $V_1 + V_2$ est constante, il est naturel de choisir pour les rayons r des cercles

$$V_2 = \frac{A}{r},$$

donnant pour V_2 des valeurs croissant aussi de 0,8 en 0,8. De cette manière, chaque droite fournira directement un point d'une même ligne.

On a donc dû poser, pour simplifier,

$$V_2 = 0,8 \times p,$$

d'où

$$r = \frac{A}{V_2}, \quad r = \frac{10}{0,8}\frac{1}{p} = \frac{12,50}{p},$$

p étant un nombre entier positif, ce qui donne, en commençant à $p = 2$ (car la demi-hauteur du cadre est d'un peu plus de $0^m,06$) et allant jusqu'à $p = 13$, la série suivante des rayons :

p.....	2	3	4	5	6	7
r.....	6,25	4,17	3,13	2,50	2,08	1,79
p.....	8	9	10	11	12	13
r.....	1,56	1,39	1,25	1,14	1,04	0,96

On joint par un trait continu les points d'intersection, tels que $V_1 + V_2 = \text{const.}$ On doublerait le nombre des points (ce qui est utile dans plusieurs régions),

en intercalant une ligne dans chaque système, c'est-à-dire en adoptant pour la raison de la progression arithmétique de V_1 et de V_2 une valeur moitié moindre.

(Nous engageons le lecteur à exécuter cette épure, qui est la plus simple de toute la série, et cependant l'une des plus instructives.)

Graduation des lignes équipotentielles. — On conclura aisément de cette construction le nombre caractéristique de chaque ligne équipotentielle, à une constante près V_0, car cette constante reste indéterminée.

Pour simplifier, nous la supposerons nulle, ce qui revient à donner la caractéristique zéro à la ligne équipotentielle qui passe par le point double; elle avait été numérotée 20 précédemment.

La différence constante $V_{n+1} - V_n$ étant égale à 0,8, on calculera aisément la Table suivante, qui donne la valeur du potentiel V sur chaque ligne numérotée sur la figure, de 0 à 20. L'unité de potentiel est la même que l'unité de travail :

n	V.	n.	V.	n.	V.
0.....	16,0	9.....	8,8	18.....	1,6
1.....	15,2	10.....	8,0	19.....	0,8
2.....	14,4	11.....	7,2	20.....	0
3.....	13,6	12.....	6,4	21.....	—0,8
4.....	12,8	13.....	5,6	22.....	—1,6
5.....	12,0	14.....	4,8	23.....	—2,4
6.....	11,2	15.....	4,0	24.....	—3,2
7.....	10,4	16.....	8,2		
8.....	9,6	17.....	2,4		

Grandeur de la force en un point du champ. — Pour compléter cette construction, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que ce diagramme suffit à calculer la grandeur de la force en un point par la formule

$$R = -\frac{dV}{dv}$$

(*voir* p. 15), dV étant la variation de potentiel entre deux surfaces équipotentielles dont dv est la distance comptée sur une normale commune. Bien que cette relation ne convienne rigoureusement qu'à des surfaces infiniment voisines, on peut l'appliquer au cas où les surfaces tracées graphiquement sont seulement très voisines : l'erreur résultant de ce fait ne dépasse pas celle que l'incertitude du tracé graphique laisse exister.

Considérons, en particulier, les deux lignes numérotées 0 et 1 : la différence $dV = 0,8$ et leur intervalle $dv = 0,5$ sensiblement, d'où $\frac{dV}{dv} = 1,6$.

Ce nombre est exprimé en unité de force; elle a été adoptée pour calculer V qui est un travail; c'est en même temps l'unité de force qui a servi à définir A ou les 10 unités d'électricité dont le point est chargé.

On voit que cette unité est indéterminée et que la figure en est indépendante. Si l'on a adopté le gramme-force et le centimètre pour définir l'unité électrostatique, l'unité est le gramme-force; si l'on a adopté le système C. G. S., la force calculée ci-dessus est exprimée en *dynes*.

Cas où le paramètre des surfaces équipotentielles croîtrait par degrés égaux à l'unité. — Jusqu'ici nous avons considéré la *Pl. III* en elle-même, avec la

seule indication numérique qu'elle comporte, A = 10. Comme aucune graduation n'indique les valeurs du paramètre V des surfaces équipotentielles, nous en avons effectué la détermination indépendamment de toute hypothèse arbitraire autre que le choix du centimètre pour l'unité de longueur.

Il paraît résulter des premières lignes du § 123 que l'auteur, passant sous silence la question de l'unité de longueur, a adopté l'unité pour variation du paramètre V_n en passant d'une surface équipotentielle à une autre. On aurait donc

$$V_{n+1} - V_n = 1.$$

Comme on ne peut pas se donner à la fois l'unité de potentiel, l'unité d'électricité et l'unité de longueur, si nous adoptons la condition ci-dessus $V_{n+1} - V_n = 1$, il nous faut changer l'unité de longueur; soit u la grandeur de cette unité exprimée en centimètres, chaque mesure x de longueur exprimée primitivement en centimètres sera représentée par $\frac{x}{u}$, suivant la nouvelle unité; le potentiel $V = \frac{A}{x}$ deviendra $\frac{A\,u}{x}$, c'est-à-dire sera multiplié par u. La variation $V_{n+1} - V_n$, qui était égale à 0,8, deviendra $0{,}8 \times u = 1$, d'où

$$u = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25.$$

L'unité de longueur doit donc être de 1^c,25 pour que le dessin figure avec A = 10 des surfaces équipotentielles dont le paramètre varie d'une unité.

Dans ce cas, ce sont les numéros d'ordre des courbes qui représentent les valeurs des paramètres à une constante près V_0.

La constante $a = \frac{V - V'}{x - x'}$ devient $u\,\frac{V - V'}{x - x'} = 1{,}25 \times \frac{1}{0{,}5} = 2{,}50$.

Cette unité de longueur $u = 1{,}25$ paraît au premier abord singulière; mais elle est si rapprochée de la valeur d'un demi-pouce anglais $\frac{1}{2}\,2{,}52 = 1^c{,}26$, qu'on est fondé à penser que le dessin original a été construit en prenant le demi-pouce anglais comme unité. Le lecteur exprimera aisément les données adoptées dans cette hypothèse; les résultats sont simples, parce que le cinquième du pouce anglais équivaut sensiblement au demi-centimètre.

Lignes de force. — Il reste à examiner brièvement comment les lignes de force ont été tracées; on a suivi la règle du § 123, en joignant les points d'intersection des lignes de force rectilignes divergeant du point électrisé A et les lignes de force parallèles du champ uniforme, de telle manière que, sur chaque courbe, la somme des indices caractéristiques soit constante (*voir* la Note II, à la suite de celle-ci).

Il est certain d'abord que les lignes de force résultantes sont, au point A, tangentes aux lignes de force de ce point. La *Pl. III bis* montre qu'il y a neuf courbes qui se croisent en ce point, ce qui fait dix lignes de force, en comptant l'axe de révolution, conformément à la règle donnée (p. 196) « de manière que la charge d'un centre soit indiquée par le nombre de lignes qui rayonnent de ce centre ». On a donc employé le système de dix lignes de force rectilignes, représenté deux fois *fig.* 6, partie gauche.

Les angles θ que ces dix droites font avec l'axe de figure satisfont, comme on l'a vu, à l'équation

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{2\Phi}{e}\right),$$

$\frac{2\Phi}{e}$ étant égal à une série de nombres en progression arithmétique, telle que l'argument du cosinus passe de -1 à $+1$; $\frac{\Phi}{e}$ prend donc dix valeurs équidistantes, depuis zéro (qui sert d'origine) jusqu'à $\frac{\Phi}{e} = 1$, d'où

$$\frac{\Phi}{e} = 0,1,\ 0,2,\ 0,3,\ \ldots,\ 1,0.$$

On en conclut la Table suivante :

$\theta_0 = 0°0'$,	$\theta_6 = 101°32'$,
$\theta_1 = 36°52'$,	$\theta_7 = 113°35'$,
$\theta_2 = 53°8'$,	$\theta_8 = 126°52'$,
$\theta_3 = 66°25$,	$\theta_9 = 143°8'$,
$\theta_4 = 78°28'$,	$\theta_{10} = 180°0'$.
$\theta_5 = 90°$,	

Ce sont, en effet, les angles qu'on peut mesurer sur la figure après avoir tracé de sentiment les tangentes aux lignes de force issues du point A.

Quant aux lignes de force du champ uniforme, on peut les définir en considérant ce champ comme la limite du champ électrique d'un point électrisé qui s'éloigne jusqu'à l'infini, et dont la charge croît de manière que l'action sur l'unité d'électricité conserve la valeur choisie α.

Si l'on appelle q la charge du point électrisé et x la distance à un point fixe, on aura

$$\lim \frac{q}{x^2} = \alpha,$$

ou constante caractéristique du champ.

Les surfaces coniques de révolution qui, dans le cas du point à distance finie, découpent l'espace en régions dont l'*induction* est représentée par $4\pi(1, 2, 3, \ldots)$, se changent en cylindres parallèles à la direction de la force correspondant aussi à $4\pi(1, 2, 3, \ldots, n)$.

La mesure de cette induction divisée par 4π étant (123)

$$\tfrac{1}{2} q(1 - \cos\theta)$$

(*voir* la Note II qui suit), q étant la charge du point, devra être égale à $1, 2, 3, \ldots, n$; on écrira

$$\frac{1}{4}\frac{q}{x^2} x^2(1 - \cos\theta) = \frac{q}{x^2} x^2 \sin^2\frac{\theta}{2} = n.$$

Passant à la limite $\frac{q}{x^2} = \alpha$ et $x \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\rho}{2}$, ρ étant le rayon de la calotte sphérique devenue plane,

$$\alpha\frac{\rho^2}{4} = n,$$

d'où

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{n}.$$

Ici $a = 1^{c},60$; on aura donc, pour les distances à l'axe des lignes de force successives,

$$\rho_n = 1^{c},5811\sqrt{n},$$

d'où l'on déduit la Table suivante :

$\rho_1 = 1,58$,	$\rho_5 = 3,54$,	$\rho_9 = 4,74$,
$\rho_2 = 2,24$,	$\rho_6 = 3,87$,	$\rho_{10} = 5,00$,
$\rho_3 = 2,74$,	$\rho_7 = 4,18$,	$\rho_{11} = 5,25$,
$\rho_4 = 3,16$,	$\rho_8 = 4,47$,	$\rho_{12} = 5,48$.

La construction par points des lignes de force consiste, suivant la règle donnée (p. 197), à joindre par un trait continu les points pour lesquels la somme algébrique des indices de 0 et de ρ est constante.

Graduation des lignes de force. — Cette somme constante représente, comme on le verra démontré dans la Note II, la mesure de l'induction à travers la surface de révolution dont les lignes sont les méridiennes.

Il y a, au premier abord, indétermination dans le signe relatif à donner aux indices de 0 et de ρ. Mais l'indétermination se lève aisément par la considération du point neutre. En effet, si l'on considère les lignes de force du point A supposé chargé d'électricité positive, on doit les numéroter dans le sens positif $0_1, 0_2, \ldots, 0_9$, à partir de la verticale du point A.

Le champ uniforme peut être considéré comme la limite du champ d'un point électrisé, qui s'éloigne vers l'infini sur la verticale du côté du bas de la figure. Le point neutre étant du côté du haut, le point infiniment éloigné doit être considéré comme chargé négativement, puisque les forces issues des deux points s'annulent, quoique dirigées dans le même sens; d'où l'on conclut que le numérotage des lignes de force, dans le même sens que ci-dessus, doit correspondre à des indices négatifs $\rho_{-1}, \rho_{-2}, \rho_{-3}, \ldots$.

Le lecteur trouvera aisément que la ligne de force ponctuée qui passe par le point neutre formé par les points $0_1\rho_{-1}$, $0_2\rho_{-2}$, ..., doit avoir l'indice zéro; au-dessus les lignes de force ont les indices négatifs $-1, -2, -3, \ldots$; au-dessous les indices positifs $+1, 2, 3, 4, \ldots, 9$.

Ces dernières sont issues du point A, et sont tangentes aux lignes de force rectilignes de ce point.

D'autre part, les parallèles $\rho_{-1}, \rho_{-2}, \ldots$ sont les asymptotes de ces lignes.

Toutes les lignes de force sont indiquées *Pl. III bis* (partie de gauche) par les lettres $\ldots, \Psi_{-2}, \Psi_{-1}, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_4, \ldots, \Psi_8, \Psi_9$.

Équations des deux systèmes de lignes. — Les lignes équipotentielles de la figure ont évidemment pour équation

$$V = V_0 + ax + \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{const.};$$

les lignes de force en sont les trajectoires orthogonales : de la condition $dV = 0$, qui est une équation différentielle des lignes équipotentielles, on tire, en changeant dx en dy et dy en dx, l'équation différentielle des lignes de force

$$0 = a\,dy - A(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}(x\,dy - y\,dx),$$

qu'on intègre en prenant pour variables y et $u = \frac{x}{y}$.

$$0 = 2y\,dy + A(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du.$$

On en tire l'équation en termes finis

$$\frac{2y^2}{2} + A\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = C',$$

dont la discussion n'offre aucune difficulté.

Nous nous bornerons à remarquer que l'angle θ, sous lequel la courbe coupe l'axe des x à l'origine, est donné par

$$A\cos\theta = C,$$

expression à laquelle se réduit l'équation ci-dessus lorsqu'on y fait $x = o$ et $y = o$.

Remarque. — Cette équation peut s'obtenir directement d'après la construction générale $\Phi_1 + \Phi_2 = \text{const.}$, qui se traduit, pour deux points de charge e et e', par la condition

$$e(1-\cos\theta) + e'(1-\cos\theta') = \text{const.}$$

Dans le cas de la figure $e = A$, e' est de signe contraire et s'éloigne jusqu'à l'infini; la vraie valeur de $e'(1-\cos\theta')$ s'obtiendra, comme ci-dessus, en écrivant

$$\lim e'(1-\cos\theta') = \lim \frac{e'}{x^2}x^2\,2\sin^2\frac{\theta}{2} = -2\frac{y^2}{2},$$

y étant la limite de $x\sin\theta$.

Il vient alors, en substituant la valeur de $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$A\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - 2\frac{y^2}{2} = \text{const.},$$

qui reproduit le résultat ci-dessus.

NOTE II,

Relative au tracé des lignes de force dans le cas où le champ électrique est symétrique autour d'un axe de révolution;

PAR MM. A. CORNU ET A. POTIER.

Le lecteur peut se demander d'abord dans quel but l'auteur donne, dans le cas présent, une construction géométrique spéciale des lignes de force.

En effet, les surfaces équipotentielles correspondant à des variations égales de potentiel donnent une représentation complète du champ magnétique, puisque la force est en chaque point normale et en raison inverse de leur espacement. Le tracé d'un certain nombre de trajectoires orthogonales, même régulièrement distribuées, n'ajoute donc rien à la connaissance du champ.

On peut dire toutefois que, si le tracé d'un certain nombre de lignes de force n'est pas nécessaire pour caractériser les propriétés du champ, ces lignes orthogonales ont l'avantage d'en achever en quelque sorte la peinture en montrant une série de trajectoires que suivrait une molécule électrique supposée sans inertie sous l'influence de la force existant en chaque point du champ.

Il est alors naturel de choisir une loi pour la succession de ces trajectoires, afin de les distribuer d'une manière régulière sur la surface du réseau.

La loi de cette succession étant arbitraire, on pourrait la définir par la condition d'offrir à l'œil une répartition simple ou élégante dans une région donnée du champ. En voici deux exemples dans le cas de la *Pl. III* étudiée ci-dessus :

1° On pourrait demander que les lignes de force émanées du point A fussent également inclinées les unes sur les autres à leur point de croisement.

Ce mode de distribution aurait l'avantage de bien peindre l'ensemble des trajectoires d'une molécule électrique aboutissant au point A, mais elle aurait l'inconvénient de ne donner, par le tracé direct, aucune ligne de force au delà de la courbe ponctuée, qui passe par le point double : elle omettrait toutes les trajectoires des molécules électriques qui, bien qu'infléchies par la présence du point électrisé A, ne passeraient pas par ce point (1).

2° On pourrait imposer la condition que les asymptotes des lignes de force soient équidistantes. Dans le mode de distribution, le réseau représentatif du champ, à partir d'une certaine distance du point A, se réduirait à un système de droites équidistantes orthogonales, car les asymptotes des lignes équipoten-

(1) La construction, déduite de l'équation donnée p. 206, donnerait toutefois, pour des valeurs convenables de la constante C', les courbes situées au delà du point d'équilibre.

tielles et des lignes de force se réduiraient aux lignes correspondantes d'un champ uniforme qui sont des droites rectangulaires. On aurait ainsi une image assez simple de la déformation des lignes de force d'un champ uniforme causée par la présence d'un point électrisé.

On voit par ces deux exemples combien on pourrait varier la distribution des lignes de force sans cesser d'offrir une interprétation intéressante des lois arbitraires dont on aurait fait choix.

Loi de distribution des lignes de force. — La loi de distribution choisie par Maxwell n'a pas seulement pour but de déterminer un réseau facilitant l'intelligence intuitive de certaines particularités du champ : elle offre un intérêt beaucoup plus grand, qui ne peut être bien compris que si l'on est familiarisé avec le sens que Maxwell attribue au mot *induction* (75). On va essayer de la définir surtout au point de vue du lecteur moins accoutumé au langage de Faraday qu'à celui de Coulomb; comme cette définition est l'une des notions les plus importantes de l'Ouvrage, on ne saurait trop la préciser pour pouvoir l'appliquer ensuite aux diverses branches où nous la verrons reparaître.

Le point de départ sera pour nous le suivant.

Étant donné un point A chargé d'une masse électrique e, l'intensité R, c'est-à-dire la force que ce point exerce en un point de l'espace quelconque sur l'unité d'électricité, est, d'après la loi de Coulomb,

$$R = \frac{e}{r^2}.$$

Cette notion de la force due à un point électrisé, en un point de l'espace, est indépendante de la question de savoir s'il existe réellement ou non en ce point l'unité d'électricité.

Imaginons maintenant un élément de surface où dS entre d'une manière quelconque; calculons l'action du point A sur cet élément comme s'il existait sur cet élément autant d'unités d'électricité que d'unités de surface; on aura

$$dS \times R = \frac{e\,dS}{r^2}.$$

La composante normale à l'élément dS

$$R\cos\varepsilon\,dS = \frac{e\,dS\cos\varepsilon}{r^2} = e\,d\omega,$$

car on reconnaît dans $\frac{dS\cos\varepsilon}{r^2}$ l'expression $d\omega$ (§ 76) de la surface de la sphère de rayon 1 concentrique au point A, comprise dans le cône ayant pour base l'élément dS : c'est ce qu'on nomme souvent *angle solide sous-tendu*.

On remarquera l'importance de l'angle solide sous-tendu par le point agissant, puisque la composante normale sur l'élément de surface ayant l'unité pour densité électrique ne dépend ni des dimensions de l'élément superficiel, ni de son inclinaison, mais seulement de la charge du point électrisé et de l'angle sous lequel il voit cet élément.

C'est cette expression $R\cos\varepsilon\,dS$ que Maxwell prend d'une manière abstraite comme définition de l'*induction* à travers un élément de surface dS. Il y aurait peut-être à critiquer le choix de ce mot, qui est employé par les physiciens dans

un autre sens, ainsi qu'on l'a fait remarquer (p. 91) : le sens ordinaire est purement qualitatif; ainsi on dit les phénomènes d'induction, la charge par induction, etc. Maxwell donne à ce mot un sens quantitatif en lui donnant pour définition l'expression $\mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS$.

Les critiques qu'on pourrait adresser au choix de ce mot s'effacent à mesure que l'on se familiarise avec les conséquences de cette définition et qu'on l'applique au calcul du phénomène. On reconnaît bientôt que cette définition est destinée à préciser l'idée vague qu'on se fait de l'action à distance des corps électrisés sur la surface d'un conducteur et qu'elle pourra permettre de calculer, par exemple, la répartition de l'*électricité induite* sur cette surface, etc.

Dans un autre ordre d'idées, l'angle solide sous-tendu par une surface mesure la portion du rayonnement lumineux, le flux calorifique qui émane de la source lumineuse ou calorifique d'intensité *un* : ici ce *flux*, d'une nature particulière, est ce que Maxwell appelle l'*induction*.

De même que les rayonnements lumineux ou calorifiques s'ajoutent, de même aussi s'ajoutent les inductions dues à deux ou plusieurs masses électriques. En effet, les composantes normales $\mathrm{R}\cos\varepsilon$ se composent par addition algébrique, de sorte que la valeur de l'induction due à plusieurs masses électriques $e, e', e'', \ldots$ aura pour valeur

$$(\mathrm{R}\cos\varepsilon + \mathrm{R}'\cos\varepsilon' + \mathrm{R}''\cos\varepsilon'' + \ldots)\, dS = e\, d\omega + e'\, d\omega' + e''\, d\omega'' + \ldots,$$

c'est-à-dire la somme des produits de chaque masse électrique par l'angle sous lequel de chacun des points on voit l'élément de surface dS.

On aura donc, en appelant maintenant R l'intensité de la résultante de toutes les actions, c'est-à-dire l'intensité du champ électrique au point où se trouve l'élément de surface dS et ε l'angle que fait R avec la normale même du côté positif de la surface, l'expression qui mesure l'induction

$$\mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = \Sigma e\, d\omega,$$

le signe Σ s'appliquant à toutes les masses électriques du champ.

Si l'on fait la somme des inductions, relativement à tous les éléments dS d'une portion finie de surface, l'induction totale est donnée par l'intégrale

$$\iint \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = \Sigma e \iint d\omega$$

qui est égale, comme on le voit, à la somme des produits de chaque masse électrique par l'angle sous lequel elle voit cette portion de surface.

Si la surface est fermée, chaque angle solide a évidemment pour mesure 4π, surface de la sphère de rayon égale à l'unité. On a alors pour valeur de l'induction

$$\iint \mathrm{R}\cos\varepsilon\, dS = 4\pi\Sigma e,$$

théorème fondamental de l'électrostatique (§ 76).

Construction par points des lignes de force. — Nous pouvons maintenant revenir au point de départ et comprendre l'importance de la loi de répartition des lignes de force que l'auteur a choisie dans ses diagrammes, ainsi que le mode de construction qu'il en donne.

La condition adoptée consiste à découper sur toutes les surfaces équipotentielles

des aires sur lesquelles l'intégrale de surface $\int\int R\cos\varepsilon\, dS$, c'est-à-dire la valeur de l'induction croît comme la série des nombres entiers.

Si les surfaces équipotentielles étaient quelconques, cette condition pourrait n'avoir aucun rapport simple avec les lignes de force; mais, dans le cas des diagrammes où les surfaces équipotentielles sont de révolution, si l'on convient que les aires découpées sont limitées par des cercles ayant pour axes l'axe de révolution, on va démontrer que le lieu de tous ces cercles est une surface de révolution ayant une ligne de force pour méridienne.

D'où il résultera que la construction d'une série de cercles, à travers lesquels l'*induction* est la même, équivaut à la construction d'une série de points appartenant à une même ligne de force.

En effet, la surface équipotentielle étant de révolution, comme dans le cas des diagrammes où les masses électriques e, e', e'' sont situées sur une même droite, chaque ligne de force est nécessairement dans un plan passant par l'axe.

Si l'on se reporte à la définition du *tube d'induction* (surface lieu des lignes de force qui passent par le périmètre d'une courbe fermée), on sait que l'induction à travers une section quelconque de ce tube est la même.

Si donc on prend comme base du tube d'induction un cercle concentrique à l'axe de figure du champ, les lignes de force formeront nécessairement, par raison de symétrie, une surface de révolution. A travers toute section normale à l'axe, c'est-à-dire à travers toutes les sections circulaires du tube, l'*induction* sera la même qu'à travers le cercle de base.

Donc, inversement, le lieu de tous les cercles d'égale induction est une surface de révolution ayant pour méridienne une ligne de force.

La valeur de l'induction, étant égale à la somme des inductions relatives à chaque point, sera égale à la somme des produits de la masse électrique du point par l'angle sous lequel de ce point on voit le cercle.

Examinons l'expression d'un de ces produits : si θ est le demi-angle au sommet de ce cône de révolution, on aura, pour l'angle solide,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} d\theta \sin\theta = 2\pi(1-\cos\theta)$$

et par conséquent, pour l'induction, $2\pi e(1-\cos\theta)$.

En faisant $\theta = \pi$ on retrouve bien $4\pi e$, résultat donné plus haut.

Pour chaque masse électrique, on aura une expression semblable : écrivant que la somme des inductions est constante, on aura

$$2\pi e(1-\cos\theta) + 2\pi e'(1-\cos\theta') + \ldots = C.$$

Cette relation est l'équation des courbes méridiennes, c'est-à-dire des lignes de force, en coordonnées multipolaires.

La règle du § 123, pour la construction des lignes de force, dans le cas de deux masses, se comprend aisément. On trace autour de chaque point une série de droites inclinées d'angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \ldots$; les points d'intersection, tels que la somme des inductions soit constante, sont situés sur une même ligne de force. Pour reconnaître facilement les couples de droites à associer, l'auteur caractérise chacune de ces droites par un nombre Φ, qu'il définit en posant

$$2\pi e(1-\cos\theta) = 4\pi\Phi,$$

nombre nécessairement compris entre zéro et e.

C'est le quotient par 4π de l'*induction* de la masse e dans le cône d'ouverture 2θ.

Or 4π est l'induction exercée par l'unité d'électricité à travers une sphère entière; donc Φ est l'induction de la masse e exprimée en fonction de celle que produit, à travers une sphère, l'unité d'électricité.

La condition à laquelle doivent satisfaire ces couples de droites Φ_1, Φ_2, ..., Φ'_1, Φ'_2, ..., pour que l'induction à travers les cercles communs qu'elles définissent soit constante, est donc que

$$\Phi_i + \Phi'_i = \text{const.} = \Psi'.$$

Cette constante Ψ est la caractéristique de la ligne de force, lieu de tous ces points : multipliée par 4π, elle donne l'induction à travers les cercles qu'ils engendrent.

L'induction à travers une zone limitée par deux cercles Ψ'_1 et Ψ'_2 sera égale à $4\pi(\Psi'_2 - \Psi'_1)$, Ψ'_1 et Ψ'_2 étant les caractéristiques des lignes de force qui passent par les points générateurs de ces cercles.

Il est naturel de tracer les lignes de force qui limitent des zones d'égale induction : les caractéristiques Ψ' de ces lignes de force devront donc varier en progression arithmétique. Pour construire ces courbes commodément, il convient de tracer des droites $0, \ldots, 0' \ldots$ (*fig.* 6), pour lesquelles les valeurs Φ et Φ' soient elles-mêmes en progression arithmétique. La raison commune de ces progressions est arbitraire; mais, Ψ' ne pouvant pas dépasser la somme arithmétique $e + e'$ des valeurs arithmétiques de e et de e', on choisira cette raison de manière à avoir un nombre suffisant de courbes Ψ'.

Maxwell a pu, dans les diagrammes précédents, se contenter d'une raison égale à 1, parce qu'il a donné aux charges des valeurs assez considérables.

Dans ce cas, en chaque masse, vient aboutir un nombre des lignes de force égal au nombre d'unités qui composent cette masse (1).

Propriété du faisceau de lignes de force ainsi défini. — Cet ensemble de conventions consistant à caractériser chaque ligne de force par le paramètre Φ et à tracer les lignes correspondant à des variations de Φ par degrés égaux, ajoute aux lignes de force une notion quantitative qui n'est pas dans leur définition. Il en résulte que le faisceau des lignes de force, ainsi construit, donne à lui seul la répartition de l'intensité dans le champ électrisé comme le système des surfaces équipotentielles, c'est-à-dire qu'il donne aussi bien la grandeur que la direction de la force.

---

(1) Ces droites sont inclinées sur l'axe de révolution d'angles θ_1, θ_2, θ_3, ..., θ_n (n étant le dernier terme de la progression arithmétique et égal à e) donnés par la formule

$$e(1 - \cos\theta_i) = 2\Phi_i,$$

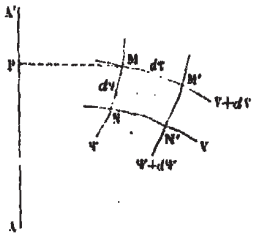
dans laquelle on donne à Φ_i les valeurs 1, 2, 3, ...

Dans la note I on a donné la série des angles θ pour $n = 10$.

Cette règle ne s'applique évidemment que dans le cas où les deux masses sont représentées toutes deux par des nombres entiers : supposons le cas le plus complexe qui puisse se présenter dans l'application : les nombres e' ne sont pas entiers et même sont inférieurs à l'unité; la règle du § 173 serait en défaut. Si, dans ce cas, on veut avoir une représentation satisfaisante des lignes de force du champ et où s'imposera, par exemple, de tracer N lignes de force ($N = 15$ ou 20), il suffira évidemment de prendre pour la raison commune des progressions Φ, Φ' la somme des valeurs arithmétiques de e et de e' divisés par N.

En effet, AA' étant l'axe de révolution (*fig.* 1), soient MN et M'N' deux éléments de lignes de force infiniment voisines Ψ et Ψ + *d*Ψ, l'induction à travers

Fig. 1.



la couronne de largeur MM' = *d*τ et de rayon MP = *y*, sur la surface équipotentielle MM', aura pour expression

$$R\, 2\pi y\, d\tau = 2\pi\, d\Psi,$$

d'où l'on conclut

$$R = \frac{2}{y}\,\frac{d\Psi}{d\tau}.$$

Si l'on trace les lignes de force correspondant à des *d*Ψ égaux, l'intensité R, en chaque point du champ, sera en raison inverse du produit de la distance *d*τ de deux courbes consécutives par la demi-distance $\frac{y}{2}$ à l'axe de révolution.

Cette expression de l'intensité est analogue à celle qui résulte de l'emploi des surfaces équipotentielles, mais elle est moins simple, à cause du facteur $\frac{2}{y}$.

Dans le cas des surfaces équipotentielles, en effet, on a

$$R = \frac{dV}{dv},$$

où *dv* est la distance M de deux surfaces équipotentielles NN', MM', correspondant à V et V + *d*V; si l'on trace les méridiennes équipotentielles correspondant à des *d*V égaux, l'intensité R est simplement en raison inverse de leur écartement *dv*.

Vérification du tracé des lignes de force. — Si l'on égale les deux expressions de R, il en résulte une condition nécessaire que doit remplir chaque maille d'un réseau formé par les quatre courbes V, V + *d*V, Ψ et Ψ + *d*Ψ, quels que soient *d*V et *d*Ψ, à savoir la relation

$$\frac{2}{y}\,\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{dV}{dv} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{y}{2}\,\frac{dV}{d\Psi}.$$

Si le tracé graphique présente des faisceaux de courbes assez serrées pour qu'on puisse traiter les côtés des rectangles curvilignes comme les infiniment petits *dv* et *d*τ, cette équation donnera une vérification du tracé.

Cette vérification sera rendue plus facile si l'on adopte, pour la raison de la progression des V, la même valeur numérique que pour celle des Ψ, ce qui don-

nera $dV = d\Psi_1$, et par suite

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\gamma}{2};$$

c'est précisément la vérification indiquée par Maxwell : on remarquera que l'unité de longueur figure explicitement dans l'énoncé de la p. 197, parce que l'équation n'est plus homogène.

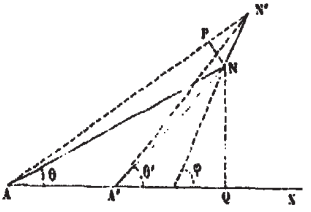
Remarque. — La loi de répartition des lignes de force, correspondant à des variations de Φ par degrés égaux à l'unité, correspond, comme on le verra plus loin, à un problème réel de distribution électrique.

Si l'on se figure un conducteur creux, enveloppant les masses électriques et limité intérieurement par une surface équipotentielle fermée, on sait que la charge totale de la surface interne est égale à la somme algébrique des charges des points intérieurs : les zones découpées sur cette surface par les surfaces de révolution, dont les méridiennes sont les lignes de force numérotées $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 2$, ..., ont des charges totales égales à 1, 2, 3, ... unité d'électricité.

Équation des lignes de force. — La construction des lignes de force, donnée ci-dessus, est déduite de la considération des tubes d'induction, et c'est ce qui en fait l'originalité; mais le lecteur peut demander, comme vérification, de retrouver directement la construction de ces courbes par la définition ordinaire, c'est-à-dire par la propriété d'être, en chaque point, tangente à la direction de la force résultante.

Soient (*fig.* 2) A, A', ... les positions sur la droite AX des masses $e, e', \ldots$; N le

Fig. 2.



point du champ où la résultante R est dirigée suivant NN'. Les forces sont dirigées suivant NA, NA', ... et ont pour valeur

$$(1) \qquad F = \frac{e}{r^2}, \quad F' = \frac{e'}{r'^2},$$

r, r' étant les distances du point N aux masses; θ, θ', ... étant les inclinaisons de ces directions sur AX, on aura évidemment

$$(2) \qquad r \sin\theta = r' \sin\theta' = \ldots = NQ.$$

Projetons les forces sur une perpendiculaire à NN', direction de la résultante, qui fait un angle φ avec AX, on aura évidemment une projection nulle, d'où la relation

$$F \sin(\varphi - \theta) + F' \sin(\varphi - \theta') + \ldots = 0.$$

Or, l'angle $(\varphi - \theta)$ dans chaque triangle infinitésimal NN'P, où NP est la perpendiculaire abaissée sur une direction infiniment voisine $\theta + d\theta$, se déduit de la relation

$$NN' \sin(\varphi - \theta) = r\, d\theta;$$

substituant, il vient

$$Fr\, d\theta + F'r'\, d\theta' + \ldots = 0.$$

Tirant de (1) les valeurs F, F', et de (2) celles de r, r', ..., il reste.

$$e \sin\theta\, d\theta + e' \sin\theta'\, d\theta' + \ldots = 0,$$

relation différentielle qui s'intègre directement et donne

$$(3) \qquad e\cos\theta + e'\cos\theta' + \ldots = C = \text{const.}$$

C'est l'équation des lignes de force ou des lignes orthogonales aux lignes équipotentielles

$$(4) \qquad \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'} + \ldots = V.$$

On retrouve donc bien la condition caractérisant les surfaces d'égale induction

$$e(1 - \cos\theta) + e'(1 - \cos\theta') + \ldots = 2(\Phi + \Phi' + \ldots).$$

L'identification des constantes donne

$$C = (e + e' + \ldots) - 2(\Phi + \Phi' + \ldots).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier :

1° Que les familles de courbes (3), (4) sont orthogonales;

2° Que chaque point chargé d'électricité est, au point de vue géométrique, un point singulier d'ordre e des courbes (3);

3° Que l'on a la relation $\frac{dC}{dz} = \frac{2}{\gamma}\frac{dV}{dy}$;

Enfin de rechercher quelles modifications subissent ces équations lorsqu'un des points s'éloigne à l'infini.

CHAPITRE VIII.

CAS SIMPLES DE DISTRIBUTION.

Deux plans parallèles.

124. Nous considérerons en premier lieu deux surfaces conductrices planes et parallèles, de grandeur infinie, écartées l'une de l'autre d'une distance c et maintenues aux potentiels A et B.

Il est clair que, dans ce cas, le potentiel V est une fonction de la distance z au plan A et que, dans un plan parallèle compris entre A et B, il est le même en tous les points, sauf dans le voisinage des limites des surfaces électrisées; mais, par hypothèse, ces limites sont à une distance infiniment grande du point considéré.

Par suite, l'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$V = C_1 + C_2 z;$$

et, puisque $V = A$ pour $z = 0$, et $V = B$ pour $z = c$,

$$V = A + (B - A)\frac{z}{c}.$$

Pour tous les points compris entre les plans, l'intensité résultante est normale aux plans, et sa grandeur est

$$R = \frac{A - B}{c}.$$

Dans la masse des conducteurs eux-mêmes, $R = 0$. Donc l'électricité est répandue sur le premier plan avec une densité superficielle σ, telle que

$$4\pi\sigma = R = \frac{A - B}{c}.$$

Sur l'autre surface, où le potentiel est B, la densité superficielle σ' est égale et de signe contraire à σ, en sorte que

$$4\pi\sigma' = -R = \frac{B - A}{c}.$$

Considérons maintenant, sur la première surface, une aire S prise de façon qu'aucune de ses parties ne soit voisine des limites de la surface.

La quantité d'électricité répandue sur cette surface est $S\sigma = e_1$, et, d'après le n° 79, la force agissant sur chaque unité d'électricité étant $\frac{1}{2}R$, la force totale qui agit sur l'aire S et qui l'attire vers l'autre plan est

$$F = \tfrac{1}{2} RS\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 S = \frac{S}{8\pi} \frac{(B-A)^2}{c^2}.$$

Ainsi l'attraction est exprimée en fonction de l'aire S, de la différence de potentiel des deux surfaces $(A - B)$ et de leur distance c. L'attraction, exprimée en fonction de la charge e_1 qui est la surface S, est

$$F = \frac{2\pi}{S} e_1^2.$$

L'énergie électrique, due à cette distribution sur l'aire S et à la distribution sur l'aire correspondante S', déterminée en projetant S sur la surface B par un système de lignes de force, lesquelles sont, dans le cas présent, des normales aux plans, est

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}(e_1 A + e_2 B) \\ &= \frac{1}{2} \frac{S}{4\pi} \frac{(A-B)^2}{c} = \frac{R^2}{8\pi} Sc = \frac{2\pi}{S} e_1^2 c = Fc. \end{aligned}$$

La première de ces expressions est l'expression générale de l'énergie électrique (§ 84).

La seconde donne l'énergie en fonction de l'aire, de la distance et de la différence des potentiels.

La troisième la donne en fonction de la force résultante R, du volume Sc compris entre les aires S et S', et montre que l'énergie par unité de volume est p, où $8\pi p = R^2$.

L'attraction des plans est pS; en d'autres termes, il y a une tension électrique (ou pression négative) égale à p sur chaque unité de surface.

La quatrième expression donne l'énergie en fonction de la charge.

La cinquième montre que l'énergie électrique est égale au travail qu'accomplirait la force électrique si les deux surfaces étaient amenées au contact, en se déplaçant parallèlement à elles-mêmes et en gardant leurs charges telles quelles.

Pour exprimer la charge en fonction de la différence de potentiels, nous avons

$$e_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{c} (A - B) = q (A - B).$$

Le coefficient q représente la charge due à une différence de potentiels égale à l'unité. Ce coefficient est appelé la capacité de la surface S, due à la position relativement à la surface opposée.

Supposons maintenant que le milieu qui sépare les deux surfaces ne soit plus de l'air, mais quelque autre diélectrique, dont le pouvoir inducteur spécifique est K; la charge due à une différence de potentiels donnée est K fois plus grande que si le diélectrique est de l'air, ou

$$e_1 = \frac{KS}{4\pi c}(A - B).$$

L'énergie totale sera

$$W = \frac{KS}{8\pi c}(A - B)^2 = \frac{2\pi}{KS} e_1^2 c.$$

La force agissant entre les surfaces sera

$$F = pS = \frac{KS}{8\pi}\frac{(A - B)^2}{c^2} = \frac{2\pi}{KS} e_1^2;$$

donc la force qui agit entre deux surfaces maintenues à des potentiels donnés varie proportionnellement au pouvoir inducteur spécifique K du diélectrique; mais la force qui agit entre deux surfaces chargées de quantités données d'électricité varie en raison inverse de K.

Deux surfaces sphériques concentriques.

125. Soient deux surfaces sphériques concentriques, de rayons a et b, b étant le plus grand, qui sont maintenues à des potentiels A et B; il est clair que le potentiel V est une fonction de la distance au centre. Dans ce cas, l'équation de Laplace devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

dont la solution est

$$V = C_1 + C_2 r^{-1};$$

les conditions sont que $V = A$ pour $r = a$, et que $V = B$ pour $r = b$, ce qui donne pour l'espace compris entre les surfaces sphériques

$$V = \frac{Aa - Bb}{a - b} + \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-1},$$

$$R = -\frac{dV}{dr} = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-2}.$$

Si σ_1 et σ_2 sont les densités superficielles sur les surfaces opposées d'une

sphère de rayon a et d'une cavité sphérique de rayon b,

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2}\frac{B-A}{a^{-1}-b^{-1}}.$$

Si e_1 et e_2 sont les charges totales d'électricité sur chacune de ces deux surfaces,

$$e_1 = 4\pi a^2\sigma_1 = \frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}} = -e_2.$$

La capacité de la sphère intérieure est donc $\frac{ab}{b-a}$.

Si la surface extérieure de la sphère enveloppante est également sphérique et de rayon c, et s'il n'y a point d'autres conducteurs dans le voisinage, la charge sur sa surface extérieure est

$$e_3 = Bc;$$

donc la charge totale est sur la sphère intérieure

$$e_1 = \frac{ab}{b-a}(A-B)$$

et sur la sphère extérieure

$$e_2 + e_3 = \frac{ab}{b-a}(B-A) + Bc.$$

Si l'on fait $b = \infty$, on a le cas d'une sphère dans l'espace infini. La capacité électrique d'une pareille sphère est a, c'est-à-dire qu'elle est numériquement égale au rayon.

La tension électrique sur l'unité de surface de la sphère intérieure est

$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{b^2}{a^2}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

La résultante de cette tension sur un hémisphère est $\pi a^2 p = F$; elle est normale à la base de cet hémisphère, et, si elle est contrebalancée par une tension superficielle appliquée le long du cercle qui limite l'hémisphère, la tension sur l'unité de longueur étant T, on a

$$F = 2\pi a T;$$

d'où

$$F = \frac{b^2}{8}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2} = \frac{e_1^2}{8a^2},$$

$$T = \frac{b^2}{16\pi a}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

Si une bulle de savon sphérique est électrisée au potentiel A, son rayon étant a, sa charge sera Aa, et la densité superficielle sera

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{A}{a}.$$

L'intensité résultante est $4\pi\sigma$ sur la surface, et zéro immédiatement en dehors de cette surface, à l'intérieur de la bulle, en sorte que, d'après le n° 79, la force électrique agissant sur l'unité de surface est égale à $2\pi\sigma^2$ et dirigée vers le dehors : donc l'électrisation diminuera la pression de l'air à l'intérieur de la bulle de $2\pi\sigma^2$ ou

$$\frac{1}{8\pi}\frac{A^2}{a^2}.$$

Mais on peut montrer que, si T_0 est la tension qui s'exerce dans la couche liquide le long d'une ligne ayant l'unité de longueur, la pression qu'il est nécessaire d'exercer depuis l'intérieur pour empêcher la bulle de se resserrer est $\frac{2T_0}{a}$. Donc la force électrique sera juste suffisante pour maintenir la bulle en équilibre lorsque la pression de l'air est la même au dedans et au dehors, si

$$A^2 = 16\pi a T_0.$$

Deux surfaces cylindriques infinies ayant même axe.

126. Soit a le rayon de la surface extérieure d'un cylindre conducteur; soit b le rayon de la surface intérieure d'un cylindre creux, ayant même axe que le premier. Soient A et B leurs potentiels respectifs. Puisque, dans ce cas, le potentiel V est une fonction de la distance r à l'axe, l'équation de Laplace devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

d'où

$$V = C_1 + C_2 \log V.$$

Puisque $V = A$ pour $r = a$, et $V = B$ pour $r = b$,

$$V = \frac{A \log \frac{b}{r} + B \log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}}.$$

Si σ_1 et σ_2 sont les densités superficielles sur les surfaces intérieure et

extérieure,

$$4\pi\sigma_1 = \frac{A - B}{a \log \frac{b}{a}}, \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{B - A}{b \log \frac{b}{a}}.$$

Si e_1 et e_2 sont les charges sur les portions des deux cylindres qui sont comprises entre deux sections transversales à l'axe, distantes l'une de l'autre d'une longueur l,

$$e_1 = 2\pi a l \sigma_1 = \frac{1}{2} \frac{A - B}{\log \frac{b}{a}} l = -e_2.$$

La capacité d'une longueur l du cylindre intérieur est donc

$$\frac{1}{2} \frac{l}{\log \frac{b}{a}}.$$

Si, au lieu d'air, l'espace compris entre les deux cylindres est occupé par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique K, la capacité du cylindre intérieur est

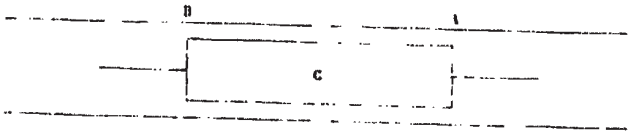
$$\frac{1}{2} \frac{lK}{\log \frac{b}{a}}.$$

L'énergie due à l'électricité distribuée sur la partie du cylindre que nous avons considérée est

$$\frac{1}{4} \frac{lK(A - B)^2}{\log \frac{b}{a}}.$$

127. Soient A et B (*fig.* 5) deux conducteurs cylindriques creux, de longueur indéfinie, ayant pour axe commun l'axe des x, situés l'un du

Fig. 5.



côté positif, l'autre du côté négatif de l'origine, et séparés par un intervalle étroit près de l'origine des coordonnées.

Soit C un cylindre creux, de longueur $2l$, placé de façon que son point milieu soit à une distance x du côté positif de l'origine, et s'engageant dans les deux cylindres creux.

Soient A le potentiel du cylindre creux positif, B celui du cylindre creux négatif, C celui du cylindre intérieur; et soient α et β les capacités de l'unité de longueur de C mis en présence de A ou de B.

La densité superficielle en des points fixes des cylindres situés soit près de l'origine, soit à de petites distances des extrémités du cylindre intérieur, ne dépendra pas de la valeur de x, pourvu qu'une longueur considérable du cylindre intérieur pénètre dans chacun des cylindres creux. Près des bouts des cylindres creux et près des extrémités du cylindre intérieur, il y aura des distributions que nous ne sommes pas encore en mesure de calculer; mais la distribution près de l'origine ne sera pas changée par le mouvement du cylindre intérieur, tant qu'aucune des extrémités de ce cylindre n'arrivera dans le voisinage de l'origine.

L'électricité distribuée sur les bouts du cylindre intérieur se déplacera avec lui, en sorte que le seul effet du mouvement sera d'augmenter ou de diminuer la longueur des parties du cylindre intérieur sur lesquelles la distribution est la même que sur un cylindre indéfini.

Donc l'énergie totale du système sera, en tant qu'elle dépend de x,

$$Q = \tfrac{1}{2}\alpha(l-x)(C-A)^2 + \tfrac{1}{2}\beta(l-x)(C-B)^2 + \text{des quantités indépendantes de } x,$$

et la force résultante parallèle à l'axe du cylindre sera

$$X = \frac{\partial Q}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\alpha(C-A)^2 - \tfrac{1}{2}\beta(C-B)^2;$$

si les cylindres A et B ont les mêmes sections,

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad X = \tfrac{1}{2}\alpha(B-A)[C - \tfrac{1}{2}(A+B)].$$

On voit donc qu'il existe une force constante agissant sur le cylindre intérieur et tendant à le tirer à l'intérieur de celui des deux cylindres creux dont le potentiel diffère le plus du sien.

Si C a une valeur numérique considérable et que A + B soit comparativement petit, la force est à peu près

$$X = \tfrac{1}{2}\alpha(B-A)C,$$

de sorte que la différence des potentiels des deux cylindres pourra être mesurée, si l'on peut mesurer X, et que la précision d'une mesure pourra être accrue, en augmentant C, le potentiel du cylindre intérieur.

Ce principe, sous une forme modifiée, est utilisé dans l'électromètre de Thomson, n° 219.

La même disposition de trois cylindres peut servir à mesurer la capacité. On relie B et C : si le potentiel de A est nul, si celui de B et C est V, la quantité d'électricité sur A sera

$$E_3 = [q_{13} + \alpha(l + x)]V.$$

Si donc on déplace C vers la droite, jusqu'à ce que x devienne $x + \xi$, la capacité du cylindre C s'accroît d'une quantité déterminée

$$\alpha\xi,$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2\log\frac{b}{a}}$$

a et b étant les rayons des surfaces cylindriques en regard.

CHAPITRE IX.

SPHÉRIQUES HARMONIQUES (1).

128. La théorie mathématique des sphériques harmoniques a fait le sujet de plusieurs Traités spéciaux. Le *Handbuch der Kugelfunctionen* du Dr E. Heine, qui est le travail le plus complet sur la matière, a atteint maintenant (1878) sa deuxième édition en deux Volumes; le Dr Neumann a publié ses *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, Teubner, 1878). L'exposé de cette question, dans la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, a été bien amélioré dans la seconde édition (1879). Enfin le *Traité élémentaire des fonctions de Laplace, de Lamé et de Bessel*, par M. Todhunter, et le *Traité élémentaire des sphériques harmoniques et des questions connexes*, par M. Ferrers, me dispensent de m'étendre, dans un ouvrage d'électricité, sur les développements mathématiques de cette question.

J'ai conservé toutefois la détermination d'un harmonique sphérique en fonction de ses pôles (2).

Des points singuliers où le potentiel devient infini.

129 *a*. Si une charge A_0 d'électricité est uniformément répartie sur la surface d'une sphère, dont le centre a pour coordonnées (a, b, c), le potentiel en un point quelconque (x, y, z), extérieur à la sphère, est, d'après le § 125,

$$V = \frac{A_0}{r}, \tag{1}$$

où

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{2}$$

Comme l'expression de V est indépendante du rayon de la sphère, cette expression reste la même, si nous supposons le rayon infiniment petit. Cette expression s'interpréterait alors physiquement en disant

(1) [Les Chapitres IX et X traitant du calcul des fonctions qui permettent de résoudre analytiquement certains cas particuliers de distribution électrique peuvent être laissés de côté dans une première lecture de l'Ouvrage. (C.)]

(2) [*Voir* la Note à la fin du Chapitre. (P.)]

que la charge A_0 est répandue sur la surface d'une sphère infiniment petite qui se confond sensiblement avec un point mathématique. Or nous avons déjà montré (§ 55, 81) qu'il y a une limite de la densité superficielle de l'électricité : il est donc physiquement impossible de placer une charge finie d'électricité sur une sphère ayant moins d'un certain rayon.

Toutefois, comme l'expression (1) représente une distribution possible du potentiel dans l'espace qui environne une sphère électrisée, nous pourrons, dans des études mathématiques, la considérer comme due à une charge A_0 concentrée en un point mathématique (a, b, c), que nous appellerons *point infini d'ordre zéro*.

Il y a d'autres sortes de points singuliers que nous allons définir; mais auparavant nous devons définir certaines expressions qui nous seront utiles lorsque nous aurons à considérer des directions dans l'espace, et les points qui leur correspondent sur une sphère.

129 *b*. On appelle *axe* une direction quelconque déterminée dans l'espace. Nous pouvons la supposer définie au moyen d'une marque faite sur la surface d'une sphère, au point où cette surface est rencontrée par un rayon mené parallèlement à l'axe en partant du centre. Ce point est appelé le *pôle de l'axe;* un axe n'a donc qu'un seul pôle, et non deux.

Si μ est le cosinus de l'angle compris entre l'axe h et un vecteur quelconque r, et si

$$p = \mu r,$$

p est la composante de r suivant la direction de h.

On distingue les différents axes par des indices différents, et, m et n étant les indices qui désignent deux axes, le cosinus de l'angle de ces axes est désigné par λ_{mn}.

La différentiation par rapport à un axe h, dont les cosinus directeurs sont L, M, N, se représente par

$$\frac{d}{dh} = \mathrm{L}\frac{d}{dx} + \mathrm{M}\frac{d}{dy} + \mathrm{N}\frac{d}{dz}.$$

D'après ces définitions il est évident que

$$\frac{dr}{dh_m} = \frac{p_m}{r} = \mu_m,$$

$$\frac{dp_n}{dh_m} = \lambda_{mn} = \frac{dp_m}{dh_n},$$

$$\frac{d\mu_m}{dh_n} = \frac{\lambda_{mn} - \mu_m \mu_n}{r}.$$

Si maintenant nous supposons que le potentiel au point (x, y, z), dû à un point singulier d'ordre quelconque placé à l'origine, soit

$$Af(x, y, z),$$

le potentiel en xyz, dû à un pareil point placé au bout de l'axe h, sera

$$Af[(x - Lh), (y - Mh), (z - Nh)],$$

et si un point semblable à tous égards, sauf en ce que le signe A est renversé, est placé à l'origine, le potentiel dû à ce couple de points sera

$$V = Af[(x - Lh), (y - Mh), (z - Nh)] - Af(x, y, z)$$
$$= -Ah\frac{d}{dh}f(x, y, z) + \text{des termes renfermant } h^2.$$

Si maintenant nous faisons décroître h et augmenter A indéfiniment, leur produit continuant de rester fini et égal à A', la valeur limite du potentiel pour ce couple de points sera

$$V' = -A'\frac{d}{dh}f(x, y, z). \tag{8}$$

Si $f(x, y, z)$ satisfait à l'équation de Laplace, l'équation étant linéaire, V', différence de deux fonctions dont chacune satisfait à l'équation, devra y satisfaire aussi.

129 c. Or le potentiel dû à un point infini d'ordre zéro

$$V_0 = A_0\frac{1}{r} \tag{9}$$

satisfait à l'équation de Laplace : donc toute fonction, déduite de celle-ci par un nombre quelconque de différentiations successives par rapport à divers axes, devra aussi satisfaire à cette équation.

On peut former un point du premier ordre, en prenant deux points d'ordre zéro, ayant des charges égales et contraires $-A_0$ et A_0, dont la première serait placée à l'origine, et la seconde à l'extrémité de l'axe h_1. Faisant alors indéfiniment décroître la valeur de h_1 et croître la valeur de A_0, de telle façon que le produit A_0h_1 reste toujours égal à A_1, le résultat final de l'opération, au moment où les deux points coïncident, est un point du premier ordre, dont le moment est A_1 et l'axe h_1; un point du premier ordre est donc un point double : son potentiel est

$$V_1 = -h_1\frac{d}{dh_1}V_0 = A_1\frac{\mu_1}{r^2}. \tag{10}$$

En plaçant à l'origine un point du premier ordre dont le moment soit $-A_1$, et à l'extrémité de l'axe h_2 un autre point du premier ordre dont le moment soit A_1; puis, faisant diminuer h_2 et augmenter A_1, de façon que

$$A_1 h_2 = \tfrac{1}{2} A_2, \tag{11}$$

nous obtenons un point du second ordre dont le potentiel est

$$V_2 = -\frac{1}{2} h_2 \frac{d}{dh_2} V_1 = A_2 \frac{1}{2} \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}. \tag{12}$$

Nous pouvons dire qu'un point du second ordre est un point quadruple, puisque nous l'obtenons en faisant s'approcher l'un de l'autre quatre points d'ordre zéro. Il a deux axes h_1 et h_2 et un moment A_2 : la direction de ces axes et la grandeur du moment définissent complètement la nature du point.

En différentiant par rapport à n axes successivement, nous obtenons le potentiel dû à un point d'ordre n. C'est le produit de trois facteurs, une constante, une certaine combinaison de cosinus et $r^{-(n+1)}$. Pour des raisons qui deviendront évidentes à mesure que nous avancerons, il est commode de donner à la constante une valeur numérique telle que le coefficient du moment soit $r^{-(n+1)}$ lorsque tous les axes coïncident avec le vecteur. Nous diviserons donc par n, lorque nous différentierons par rapport à h_n.

De la sorte, nous obtenons une valeur numérique déterminée, pour un potentiel particulier, à laquelle nous réservons le nom d'*harmonique solide* de degré $-(n+1)$, à savoir

$$V_n = (-1)^n \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d}{dh_1} \frac{d}{dh_2} \cdots \frac{d}{dh_n} \frac{1}{r}. \tag{13}$$

Si cette quantité est multipliée par une constante, elle n'en reste pas moins le potentiel dû à un certain point d'ordre n.

129 *d*. Le résultat de l'opération (13) est de la forme

$$V = Y_n r^{-(n+1)}, \tag{14}$$

où Y_n est une fonction des n cosinus $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ des angles compris entre r et les n axes, et des $\frac{1}{2}n(n-1)$ cosinus λ_{12} des angles compris entre chaque couple d'axes.

Si nous considérons les directions de r et des n axes comme déterminés par des points pris sur une surface sphérique, nous pouvons regarder Y_n comme une quantité variant d'un point à l'autre de cette surface, et qui serait une fonction des $\frac{1}{2}n(n+1)$ distances comprises

entre les n pôles des axes et le pôle du vecteur. Nous appellerons donc Y_n l'harmonique de surface d'ordre n.

130 *a*. Il nous faut maintenant faire voir qu'à tout harmonique de surface d'ordre n correspond non seulement un harmonique solide d'ordre $-(n+1)$, mais encore un autre de degré n, en sorte que

$$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1}, \tag{15}$$

satisfait à l'équation de Laplace.

En effet,

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = (2n+1) r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{\partial V_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = (2n+1)\left[(2n-1)x^2 + r^2\right] r^{2n-3} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{\partial V_n}{\partial x} + r^{2n+1} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2};$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} &= (2n+1)(2n+2) r^{2n-1} V_n \\ &\quad + 2(2n+1) r^{2n-1}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z}\right) \\ &\quad + r^{2n+1}\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Or, puisque V_n est une fonction homogène de x, y, z, de degré négatif égal à $(n+1)$,

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = -(n+1) V_n; \tag{17}$$

par suite, les deux premiers termes du second membre de l'équation (16) se détruisent, et, puisque V_n satisfait à l'équation de Laplace, le troisième terme est nul, de sorte que H_n satisfait aussi à l'équation de Laplace et, par suite, est un harmonique solide de degré n.

C'est là un cas particulier du théorème plus général de l'inversion électrique, lequel affirme que, si $F(x, y, z)$ est une fonction de x, y, z satisfaisant à l'équation de Laplace, il existe aussi une autre fonction

$$\frac{a}{r} F\left(\frac{a^2 x}{r^2}, \frac{a^2 y}{r^2}, \frac{a^2 z}{r^2}\right),$$

satisfaisant aussi à l'équation de Laplace (*voir* au §162).

130 *b*. L'harmonique de surface Y_n contient $2n$ variables arbi-

traires, car il est défini par la position de ses n pôles sur la sphère, chacun de ces pôles étant lui-même défini par deux coordonnées.

Donc les harmoniques solides H_n et V_n contiennent aussi $2n$ variables arbitraires, et chacune de ces quantités multipliées par une constante arbitraire satisfera encore à l'équation de Laplace.

Pour démontrer que AH_n est la fonction rationnelle homogène de degré n la plus générale qui satisfasse à l'équation de Laplace, observons que K, la fonction rationnelle et homogène de degré n la plus générale, contient $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termes. Mais $\nabla^2 K$ est une fonction homogène de degré $(n-2)$ et contient par suite $\frac{1}{2}(n-1)n$ termes, et la condition $\nabla^2 K = 0$ exige que chacun de ces termes s'annule. Il y a donc, entre les coefficients des $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ termes de la fonction K $\frac{1}{2}(n-1), n$ conditions, ce qui laisse $2n+1$ constantes indépendantes dans la forme la plus générale de la fonction homogène de degré n qui satisfait à l'équation de Laplace. Or H_n, multiplié par une constante arbitraire, satisfait à la condition en question et renferme $2n+1$ constantes arbitraires. Cette fonction est donc de la forme la plus générale.

131 *a*. Nous sommes maintenant en mesure de combiner une distribution de potentiel, telle que ni le potentiel lui-même ni ses dérivées premières ne deviennent infinis en aucun point.

La fonction $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$ satisfait à la condition de s'annuler à l'infini, mais devient infinie à l'origine.

La fonction $H_n = Y_n r^n$ est finie et continue à distance finie de l'origine, mais ne s'annule pas à une distance infinie.

Mais, si nous prenons $a^n Y_n r^{-(n+1)}$ pour potentiel de tous les points extérieurs à une sphère de rayon a, ayant pour centre l'origine, et $a^{-(n+1)} Y_n r^n$ pour potentiel de tous les points intérieurs à la sphère; et si, sur la sphère même, nous supposons l'électricité distribuée avec une densité superficielle σ, telle que

$$\frac{1}{4\pi a^2} = (2n+1) Y_n, \tag{18}$$

toutes les conditions seront satisfaites par le potentiel dû à une charge ainsi répartie en forme de couche.

En effet, partout le potentiel est fini et continu; il s'annule à l'infini; ses dérivées premières sont finies et continues, sauf sur la surface chargée, où elles satisfont à l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial V'}{\partial r'} + 4\pi\sigma = 0; \tag{19}$$

enfin, l'équation de Laplace est satisfaite en tous les points intérieurs ou extérieurs à la sphère.

C'est donc là une distribution du potentiel qui satisfait aux conditions, et, d'après le § 100 *a*, c'est la seule distribution qui leur satisfasse.

131 *b*. Le potentiel dû à une sphère de rayon a dont la densité superficielle est donnée par l'équation

$$4\pi a^2 \sigma = (2n+1)Y_n \tag{20}$$

est, pour tous les points extérieurs à la sphère, identique à celui qui est dû au point singulier d'ordre n correspondant.

Supposons maintenant un système électrique que nous appellerons E, extérieur à la sphère, soit Ψ le potentiel dû à ce système, et cherchons la valeur de $\Sigma(\Psi e)$ pour le point singulier. C'est la partie de l'énergie électrique qui dépend de l'action du système extérieur sur le point singulier.

Si A_0 est la charge d'un seul point d'ordre zéro, l'énergie potentielle en question est

$$W_0 = A_0 \Psi. \tag{21}$$

S'il y a deux pareils points, l'un négatif à l'origine, l'autre positif, de même valeur numérique à l'extrémité de l'axe h_1, l'énergie potentielle sera

$$-A_0\Psi + A_0\left(\Psi + h_1\frac{\partial\Psi}{\partial h_1} + \frac{1}{2}h_1^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial h_1^2} + \dots\right),$$

et si A_0 augmente et si h_1 diminue indéfiniment, de façon que $A_0 h_1 = A_1$, la valeur de l'énergie potentielle, pour un point du premier ordre, sera

$$W_1 = A_1\frac{\partial\Psi}{\partial h_1}. \tag{22}$$

De même, pour un point d'ordre n, l'énergie potentielle sera

$$W_n = \frac{1}{1.2\dots n}A_n\frac{d^n\Psi}{dh_1\dots dh_n} \quad (1). \tag{23}$$

131 *c*. Si nous supposons le système extérieur formé de parties dont chacune est désignée par dE, et le point singulier formé de parties dont chacune est désignée par de, alors

$$\Psi = \Sigma\left(\frac{1}{r}\,d\mathrm{E}\right). \tag{24}$$

(1) Pour ce qui suit, nous trouverons plus commode de désigner par $n!$ le produit des n nombres entiers positifs $1.2.3\dots n$.

Mais, si V_n est le potentiel dû au point singulier,

$$V_n = \Sigma\left(\frac{1}{r}\,de\right), \tag{25}$$

et l'énergie potentielle due à l'action de E sur e est

$$W = \Sigma(\Psi\,de) = \Sigma\Sigma\left(\frac{1}{r}\,dE\,de\right) = \Sigma V_n\,dE, \tag{26}$$

la dernière expression étant celle de l'énergie potentielle due à l'action de e sur E.

De même, si $\sigma\,ds$ est un élément d'électricité de la couche, le potentiel de la couche sur le système extérieur E est V_n, et l'on a

$$W = \Sigma(V_n\,dE) = \Sigma\Sigma\left(\frac{1}{r}\,dE\sigma\,ds\right) = \Sigma\Psi\sigma\,ds, \tag{27}$$

le dernier terme renfermant une sommation qui doit s'étendre à toute la surface de la sphère. En l'égalant à la première expression de W, nous avons

$$\int\int\Psi\sigma\,ds = \Sigma(\Psi\,de) = \frac{1}{n!}\,A_n\,\frac{d^n\Psi}{dh_1\ldots dh_n}. \tag{28}$$

Si nous nous souvenons que

$$\int\sigma a^2 = (2n+1)Y_n,$$

et que $A_n = a^n$, cette relation devient

$$\int\int\Psi Y_n\,ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)}\,a^{n+2}\,\frac{d^n\Psi}{dh_1\ldots dh_n}. \tag{29}$$

En vertu de cette équation, l'opération qui consiste à prendre l'intégrale de surface de $\Psi Y_n\,ds$ pour chacun des éléments de la surface de la sphère de rayon a se réduit à différentier Ψ par rapport aux n axes de l'harmonique, et à prendre la valeur de ce coefficient différentiel pour le centre de la sphère, pourvu, toutefois, que Ψ satisfasse à l'équation de Laplace pour tous les points intérieurs à la sphère, et que Y_n soit un harmonique de surface d'ordre n.

132. Supposons maintenant que Ψ soit un harmonique solide de degré m positif, de la forme

$$\Psi = a^{-m}Y_m r^m, \tag{30}$$

sur la surface sphérique, $r = a$ et $\Psi = Y_m$, en sorte que l'équation (29)

devient, dans ce cas,

$$(31)\qquad \iint Y_m Y_n\, ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)}\, a^{n-m+2}\, \frac{d^n(Y_m r^m)}{dh_1 \dots dh_n},$$

la valeur du coefficient différentiel étant prise pour le centre de la sphère.

Si n est plus petit que m, le résultat de la différentiation est une fonction homogène de x, y, z, du degré $m-n$, dont la valeur au centre de la sphère est zéro. Si n est égal à m, le résultat de la différentiation est une constante, dont nous déterminerons la valeur au § 134 *b*. Si la différentiation est poussée plus loin, le résultat est zéro; donc l'intégrale de surface $\iint Y_m Y_n\, ds$ s'annule toutes les fois que m et n sont différents.

Tous les intermédiaires par lesquels nous sommes arrivés à ce résultat sont purement mathématiques; nous avons bien employé des termes ayant une signification physique, tels que *énergie électrique;* mais chacun de ces termes visait non pas un phénomène physique à étudier, mais une expression mathématique déterminée. Un mathématicien a le droit de se servir de ces fonctions aussi bien que de toutes autres qu'il peut trouver utiles; et le physicien, qui doit suivre un calcul mathématique, le comprendra d'autant mieux que tous les intermédiaires de ce calcul seront susceptibles d'une interprétation physique.

133. Nous allons maintenant déterminer la forme de l'harmonique de surface Y_n, en fonction de la position d'un point P de la sphère, par rapport aux n pôles de l'harmonique.

Nous avons

$$(32)\qquad \begin{cases} Y_1 = 1, \quad Y_0 = \mu_1, \quad Y_2 = \frac{3}{2}\mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}\lambda_{12}, \\ Y_3 = \frac{5}{2}\mu_1\mu_2\mu_3 - \frac{1}{2}(\mu_1\lambda_{23} + \mu_2\lambda_{31} + \mu_3\lambda_{12}). \end{cases}$$

Chaque terme de Y_n est donc formé de produits de cosinus, les uns de la forme μ, à un seul indice, se rapportant aux angles compris entre le point P et les pôles et les autres de la forme λ, à deux indices, étant les cosinus des angles compris entre les pôles.

Puisque chaque axe est introduit par une des n différentiations, l'indice de chaque axe doit se présenter une fois, et une seule, parmi les indices des cosinus de chaque terme.

Si donc dans un terme il y a s cosinus à deux indices, il y aura dans ce terme $n-2s$ cosinus à un seul indice.

Écrivons, sous la forme abrégée

$$\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s),$$

la somme de tous les produits dans lesquels il y a s cosinus à double indice.

Dans chacun de ces produits apparaît chacun des indices, et aucun d'eux n'est répété.

Si nous voulons exprimer qu'un indice déterminé m ne paraît que dans les μ ou que dans les λ, nous le mettons en indice au μ ou au λ. Ainsi l'équation

$$\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s) = \Sigma(\mu_m^{n-2s}\lambda^s) + \Sigma(\mu^{n-2s}\lambda_m^s) \tag{33}$$

exprime que tout l'ensemble des produits peut être partagé en deux groupes : dans l'un, l'indice m paraît parmi les cosinus qui définissent le point variable P, et dans l'autre, parmi les cosinus des angles compris entre les pôles.

Supposons maintenant que, pour une valeur particulière de n,

$$Y_n = A_{n,0}\Sigma(\mu^n) + A_{n,1}\Sigma(\mu^{n-2}\lambda^1) + \ldots + A_{n,s}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s) + \ldots, \tag{34}$$

les A étant les coefficients numériques. Nous pouvons écrire cette série sous la forme abrégée

$$Y_n = S[A_{n,s}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s)], \tag{35}$$

où S indique une sommation dans laquelle sont comprises toutes les valeurs de s de zéro à $\frac{1}{2}n$, ces deux valeurs comprises.

Pour obtenir l'harmonique solide de degré négatif $(n+1)$ et d'ordre n qui lui correspond, nous multiplions par $r^{-(n+1)}$, et nous avons

$$V_n = S[A_{n,s}r^{2s-2n-1}\Sigma(p^{n-2s}\lambda^s)], \tag{36}$$

en posant $r\mu = p$, comme dans l'équation (3).

Si nous différentions V_n par rapport à un nouvel axe h_m, nous avons $-(n+1)V_{n+1}$ et, par suite,

$$\left\{\begin{array}{l}(n+1)V_{n+1} = S[A_{n,s}(2n+1-2s)r^{2s-2n-3}\Sigma(p_m^{n-2s+1}\lambda^s) \\ \qquad\qquad - A_{n,s}r^{2s-2n-1}\Sigma(p^{n-2s-1}\lambda_m^{s+1})].\end{array}\right. \tag{37}$$

Pour obtenir les termes renfermant s cosinus à double indice, nous n'avons qu'à diminuer s d'une unité dans le dernier terme, et nous trouvons

$$\left\{\begin{array}{l}(n+1)V_{n+1} = S\{r^{2n-2s-3}[A_{n,s}(2n-2s+1)\Sigma(p_m^{n-2s+1}\lambda^s) \\ \qquad\qquad - A_{n,s-1}\Sigma(p^{n-2s+1}\lambda_m^s)]\}.\end{array}\right. \tag{38}$$

Or les deux groupes de produits ne se distinguent l'un de l'autre qu'en ce que les indices m ne se rencontrent que parmi les ρ dans un groupe, et parmi les λ dans l'autre. Leurs coefficients doivent donc être les mêmes; et puisque nous devons arriver au même résultat en mettant $n+1$ au lieu de n dans l'expression de Y_n, et en multipliant par $n+1$, nous obtenons l'équation suivante :

$$(39) \qquad (n+1)A_{n+1,s} = (2n-2s+1)A_{n,s} = -A_{n,s-1}.$$

Si nous faisons $s=0$, nous avons

$$(40) \qquad (n+1)A_{n+1} = (2n-1)A_n;$$

et, puisque $A_{1,0}=1$,

$$(41) \qquad A_{n,0} = \frac{2n!}{2^n(n!)^2}.$$

De là nous tirons l'expression générale du coefficient

$$(42) \qquad A_{n,s} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!(n-s)!};$$

et, finalement, l'expression trigonométrique de l'harmonique de surface

$$(43) \qquad Y_n = S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!(n-s)!} \Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s)\right].$$

Cette expression donne la valeur de l'harmonique de surface en un point P de la surface sphérique, en fonction des cosinus des distances de P aux différents pôles et des distances des pôles entre eux.

Il est aisé de voir que si l'un des pôles est transporté au point diamétralement opposé sur la surface sphérique, la valeur de l'harmonique change de signe; car tout cosinus où paraît l'indice de ce pôle change de signe, et, dans chaque terme de l'harmonique, l'indice du pôle paraît une fois, et une seule.

Par suite, si deux ou un nombre pair quelconque de pôles sont transportés chacun au point diamétralement opposé, la valeur de l'harmonique ne change pas.

Le professeur Sylvester a d'ailleurs démontré (*Phil. Mag.*, oct. 1876) que, étant donné un harmonique, le problème qui consiste à trouver les n lignes coïncidant avec ses axes, a une et une seule solution, quoique l'on puisse (ainsi que nous venons de le voir) inverser par groupe de deux les directions que l'on considère comme positives sur les différents axes.

134. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la valeur de l'intégrale de surface $\iint Y_m Y_n \, ds$, pour deux harmoniques de surface de même ordre, les directions des axes de ces harmoniques étant en général différentes.

A cet effet, formons l'harmonique solide $Y_m r^m$ et différentions-le par rapport à chacun des n axes de Y_n.

Tous les termes de $Y_m r^m$, qui sont de la forme $r^m \mu^{m-2s} \lambda^s$, peuvent s'écrire

$$r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda^s_{mm}.$$

Différentiant ces termes n fois par rapport à chacun des n axes de Y_n successivement, nous trouvons qu'en différentiant r^{2s}, par rapport à s d'entre ces axes, nous introduisons s des facteurs p_n, ainsi que le facteur numérique

$$2s(2s-2)\dots 2 \quad \text{ou} \quad 2^s s!.$$

Si l'on continue de différentier, par rapport aux s axes suivants, les p_n se transforment en λ_{nn} sans introduction d'aucun facteur numérique; et si l'on continue de différentier, par rapport aux $n-2s$ axes restants, les p_m se transforment en λ_{mn}, en sorte que le résultat est

$$2^s s! \lambda^s_{nn} \quad \lambda^s_{mm} \quad \lambda^{m-2s}_{mn}.$$

Nous avons donc, par l'équation (31),

$$(44) \qquad \iint Y_m Y_n \, ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} a^{n-m+2} \frac{d^n (Y_m r^m)}{dh_1 \dots dh_n}$$

et, par l'équation (43),

$$(45) \qquad Y_m r^m = S\left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m! m-s!} \Sigma(r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda^s_{nn})\right].$$

D'où nous tirons, en effectuant les différentiations et en nous souvenant que $m = n$,

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint Y_m Y_n \, ds \\ &= \frac{4\pi a^2}{(2n+1)(n!)^2} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)! s!}{2^{n-2s}(n-s)!} \Sigma(\lambda^s_{mm} \lambda^s_{nn} \lambda^{n-2s}_{mn})\right]. \end{aligned} \right.$$

135 a. L'expression (46), qui donne l'intégrale de surface du produit de deux harmoniques de surface, prend une forme remarquable si l'on suppose que tous les axes de l'un des harmoniques Y_m coïncident les uns avec les autres, en sorte que Y_m devienne ce que nous appellerons

plus tard un *harmonique zonal* d'ordre m, désigné par le symbole P_m.

Dans ce cas, tous les cosinus de la forme λ_{mn} peuvent s'écrire $\mu_m \mu_n$, μ_n désignant le cosinus de l'angle compris entre l'axe unique de P_m et l'un quelconque des axes de Y_n. Les cosinus de la forme λ_{mm} deviendront tous égaux à l'unité, de sorte qu'à la place de $\Sigma^s \lambda_{mm}$ nous devons mettre le nombre des combinaisons de s symboles, pourvus chacun de deux indices différents de n, aucun des indices ne pouvant être répété; d'où

$$\Sigma \lambda_{mm}^s = \frac{n!}{2^s s!(n-s)!}.$$

Le nombre des permutations des $n - 2s$ indices qui restent sur ceux des m axes de P_m est $(n - 2s)!$; d'où

$$\Sigma(\lambda_{mn}^{n-2s}) = (n-2s)!\,\mu^{n-2s}.$$

L'équation (46) devient donc, lorsque tous les axes de Y_m coïncident,

$$(49) \qquad \iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n-1)n!} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}(n-s)!} \Sigma(\mu^{n-2s}\lambda_s)\right],$$

ou, d'après l'équation (43),

$$(50) \qquad = \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_{n(m)}$$

$Y_{n(m)}$ représentant la valeur de Y_n au pôle de P_m.

On peut arriver au même résultat par la méthode suivante qui est plus rapide.

Prenons un système de coordonnées rectangulaires tel que l'axe des z coïncide avec l'axe de P_m; et développons $Y_n r^n$ en fonction homogène de degré n des x, y, z.

Au pôle de P_m, $x = y = 0$, et $z = r$, de sorte que, si Cz^n est le terme qui ne contient ni y ni x, C est la valeur de Y_n au pôle de P_m.

Dans ce cas, l'équation (31) devient

$$\iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} \frac{1}{n!} \frac{d^m}{dz^m}(Y_n r^n).$$

Si m est égal à n, le résultat de la différentiation est $n!C$ pour Cz^n et zéro pour tous les autres termes; donc

$$\iint Y_n P_m \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} C,$$

C étant la valeur de Y_n au pôle de P_m.

135 *b*. Ce résultat est très important dans la théorie des sphériques harmoniques; car il nous montre comment on peut former une série de sphériques harmoniques qui représente une quantité ayant une certaine valeur arbitrairement fixée, mais finie et continue en tous les points d'une surface sphérique.

En effet, soient F la valeur de la quantité et ds l'élément de surface en un point Q de la surface sphérique; si nous multiplions F ds par P_n, l'harmonique zonal, dont le pôle est le point P de la même surface, et si nous prenons l'intégrale de ce produit pour toute la surface, le résultat, ne dépendant que de la position du point P, pourra être considéré comme une fonction de la position de ce point.

Mais, en P, la valeur de l'harmonique zonal dont le pôle est Q est égale à la valeur en Q de l'harmonique zonal du même ordre ayant son pôle en P. Nous pouvons donc admettre que, pour chaque élément ds de la surface, on ait formé un harmonique zonal ayant son pôle en Q, et ayant un coefficient F ds.

Nous aurons ainsi un système d'harmoniques zonaux superposés les uns aux autres, et ayant leurs pôles en chacun des points de la sphère où F a une valeur. Et, puisque chacun d'eux est un multiple d'un harmonique de surface d'ordre n, leur somme sera un multiple d'un harmonique de surface, qui n'est pas forcément zonal, d'ordre n.

L'intégrale de surface $\int\int \mathrm{FP}_n\,ds$, considérée comme fonction du point P, est donc un multiple d'un harmonique de surface Y_n; par suite,

$$\frac{2n+1}{4\pi a^2}\int\int \mathrm{FP}_n\,ds,$$

est précisément l'harmonique de surface d'ordre n qui fait partie de la série d'harmoniques qui exprime F, si F peut être exprimé de cette façon.

Car, si F peut être exprimé sous la forme

$$\mathrm{F} = A_0 Y_0 + A_1 Y_1 + \ldots + A_n Y_n + \ldots$$

en le multipliant par $P\,ds$ et en prenant l'intégrale de surface pour toute la sphère, tous les termes qui renferment des produits d'harmoniques d'ordres différents s'annulent, et il reste

$$\int\int \mathrm{FP}_n\,ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} A_n Y_n.$$

Donc la seule forme sous laquelle le développement de F en harmoniques sphériques soit possible est

$$(51)\qquad \mathrm{F} = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\int\int \mathrm{FP}_0\,ds + \ldots + (2n+1)\int\int \mathrm{FP}_n\,ds + \ldots\right].$$

Harmoniques conjugués.

136. Nous avons vu que l'intégrale de surface du produit de deux harmoniques sphériques d'ordres différents est toujours nulle. Mais, lors même que les deux harmoniques sont de même ordre, l'intégrale de surface de leur produit peut être nulle. On dit alors que les deux harmoniques sont conjugués. La condition pour que deux harmoniques de même ordre soient conjugués s'exprime au moyen de l'équation (46), en égalant ses deux membres à zéro.

Si l'un des harmoniques est zonal, la condition pour que l'autre harmonique lui soit conjugué est qu'il ait une valeur nulle au pôle de l'harmonique zonal.

Si nous commençons par nous donner un harmonique d'ordre n, il faudra, pour qu'un deuxième harmonique lui soit conjugué, que ses $2n$ variables satisfassent à une condition.

Si un troisième harmonique doit être conjugué des deux premiers, les $2n$ variables doivent satisfaire à deux conditions. Si nous continuons de former des harmoniques dont chacun soit conjugué de tous ceux qui le précèdent, le nombre des conditions à satisfaire par chacun d'eux sera égal au nombre des harmoniques déjà existants; de sorte que le $(2n+1)^{\text{ième}}$ harmonique devra satisfaire à $2n$ conditions au moyen de $2n$ variables, et par suite il sera complètement déterminé.

Tout multiple AY_n d'un harmonique de surface d'ordre n peut s'exprimer sous forme d'une somme de multiples d'une série quelconque de $(2n+1)$ harmoniques conjugués du même ordre. En effet, les coefficients des $(2n+1)$ harmoniques conjugués forment une série de quantités dont on peut disposer, et dont le nombre est égal à celui des $2n$ variables de Y_n et du coefficient A.

Pour trouver le coefficient d'un quelconque de ces harmoniques conjugués, Y_n^7 par exemple, supposons que

$$AY_n = A_0 Y_n^0 + \ldots + A_\sigma Y_n^\sigma + \ldots.$$

Multiplions par $Y_n^7 ds$ et prenons l'intégrale de surface pour toute l'étendue de la sphère. Tous les termes qui renferment les produits d'harmoniques conjugués s'annulent, laissant

$$A \iint Y_n Y_n^7 ds = A_\sigma \iint (Y_n^7)^2 ds, \tag{52}$$

équation qui détermine A_σ.

Donc, si nous supposons donnée une série de $2n+1$ harmoniques

conjugués, tout autre harmonique d'ordre n pourra s'exprimer en fonction de ceux-là, et cela d'une seule manière. Donc aucun autre harmonique ne pourra être conjugué de tous ceux-là à la fois.

137. Nous avons vu que, si l'on donne un système complet de $2n+1$ harmoniques d'ordre n, tous conjugués les uns des autres, tout autre harmonique de même ordre peut être exprimé en fonction de ceux-ci. Dans un pareil système de $(2n+1)$ harmoniques, il y a $2n(2n+1)$ variables liées entre elles par $n(2n+1)$ équations : on peut donc considérer comme arbitraires $n(2n+1)$ d'entre les variables.

Nous pourrions, ainsi que l'ont proposé Thomson et Tait, choisir un système d'harmoniques conjugués dans lequel les n pôles seraient distribués de façon que j d'entre eux se confondent avec le pôle de l'axe des x, k avec le pôle de l'axe des y, et $l(=n-j-k)$ avec le pôle de l'axe des z. Étant données les $(n+1)$ distributions pour lesquelles $l=0$ et les n distributions pour lesquelles $l=1$, tous les autres harmoniques peuvent être exprimés en fonction de ceux-ci.

Le système qui a été adopté jusqu'à présent par tous les mathématiciens, y compris Thomson et Tait, consiste à réunir $(n-\sigma)$ pôles en un point que l'on appelle pôle positif de la sphère, et les σ pôles restants à intervalles égaux le long de l'équateur si leur nombre est impair, et sur la moitié de l'équateur si leur nombre est pair.

Dans ce cas, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-\sigma}$ sont tous égaux à $\cos\theta$; nous les représenterons par μ. Si de plus nous représentons $\sin\theta$ par ν, $\mu_{n-\sigma+1}$, $\mu_{n-\sigma+2}, \ldots, \mu_n$ sont de la forme $\nu\cos(\Phi-\beta)$, β étant l'azimut d'un des pôles équatoriaux.

De même, la valeur de λ_{pq} est égale à l'unité si p et q sont tous deux plus petits que $n-\sigma$, égale à zéro si l'un des deux indices p ou q est plus grand que $n-\sigma$, et l'autre plus petit; enfin égale à $\cos\frac{r\pi}{\sigma}$ si tous deux sont plus grands, r étant un nombre entier plus petit que σ.

138. Si tous les pôles coïncident avec le pôle de la sphère, $\sigma=0$, et l'harmonique est appelé *harmonique zonal*. Comme l'harmonique zonal a une grande importance, nous réserverons pour lui la notation P_n.

Nous pouvons tirer sa valeur, soit de l'expression trigonométrique (43), soit plus directement par différentiation de la manière

suivante :

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{52}$$

$$\left\{\begin{aligned} P_n &= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} + \ldots\right] \\ &= \Sigma\left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p!(n-p)!(n-2p)!}\mu^{n-2p}\right]. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

où il faut donner à p toutes les valeurs entières comprises entre zéro et le plus grand entier qui ne dépasse pas $\frac{1}{2}n$.

Quelquefois il est commode d'exprimer P_n sous la forme de fonction homogène de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$, ou, suivant notre notation, de μ et de ν,

$$\left\{\begin{aligned} P_n &= \mu^n - \frac{n(n-1)}{2.2}\mu^{n-2}\nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\mu^{n-4}\nu^4 - \ldots \\ &= \Sigma\left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p}(p!)^2(n-2p)!}\mu^{n-2p}\nu^{2p}\right]. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

On démontre dans les ouvrages mathématiques qui traitent de ce sujet que $P_n(\mu)$ est le coefficient de h^n dans le développement de $(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}$.

L'intégrale de surface du carré de l'harmonique zonal, ou

$$\iint (P_n)^2\, ds = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2\, d\mu = \frac{4\pi a^2}{2n+1}; \tag{55}$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(\mu)]^2\, d\mu = \frac{2}{2n+1}. \tag{56}$$

139. Lorsque l'on considère un harmonique zonal simplement comme une fonction de μ, sans référence expresse à aucune sphère particulière, on peut l'appeler un *polynôme de Legendre*.

Si nous considérons l'harmonique zonal comme existant sur une surface sphérique, dont les points sont déterminés par les coordonnées θ et φ, et si nous supposons que le pôle de l'harmonique zonal soit au point (θ', φ'), la valeur de l'harmonique zonal au point (θ, φ) est une fonction des quatre angles θ', φ', θ et φ, et, comme c'est une fonction de μ, cosinus de l'arc qui joint les points (θ, φ) et (θ', φ'), elle ne sera pas altérée si l'on échange les plans de θ et θ', et de φ et φ'. L'har-

monique zonal ainsi exprimé a été appelé *coefficient de Laplace*. Thomson et Tait l'appellent *l'harmonique biaxe*.

Toute fonction homogène de x, y, z qui satisfait à l'équation de Laplace peut être appelée un *harmonique solide*; et l'on peut appeler *harmonique de surface* la valeur que prend un harmonique solide à la surface d'une sphère dont le centre est à l'origine. Dans cet Ouvrage, nous avons défini l'harmonique de surface au moyen de ses n pôles, de sorte qu'il n'a que $2n$ variables. L'harmonique de surface plus général qui a $2n+1$ variables n'est autre que l'harmonique de surface plus particulier multiplié par une constante arbitraire. Quand il est exprimé en fonction de θ et de φ, l'harmonique de surface le plus général est appelé *fonction de Laplace*.

140 *a*. Pour obtenir les autres harmoniques du système symétrique, nous devons différentier par rapport à σ axes situés dans le plan des xy, et inclinés les uns sur les autres d'angles égaux à $\frac{\pi}{\sigma}$. C'est ce que l'on fait très aisément, en employant le système de coordonnées imaginaires donné par Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, Vol. I, p. 148 (ou p. 185 de la deuxième édition).

Si nous posons

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy, \tag{57}$$

en désignant par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, l'opération qui consiste à différentier par rapport aux σ axes peut s'écrire

$$i\left(\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} - \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right) = \mathrm{D}^{(\sigma)}s \tag{58}$$

si un des axes coïncide avec l'axe des y, et

$$\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma} + \frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma} = \mathrm{D}^{(\sigma)}c \tag{59}$$

si l'axe des y est bissecteur de l'angle compris entre deux des axes.

Nous trouverons commode de représenter ces opérations par les symboles abrégés d'opérations $\mathrm{D}^{(\sigma)}s$ et $\mathrm{D}^{(\sigma)}c$. Mais ce sont en fait des opérations réelles que l'on peut représenter de la manière suivante, sans recourir à l'emploi symbolique des imaginaires,

$$2^{\sigma-1}\mathrm{D}^{(\sigma)}s = \sigma\frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial x^{\sigma-1}}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3}\frac{\partial^{\sigma-3}}{\partial x^{\sigma-3}}\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \ldots, \tag{60}$$

$$2^{\sigma-1}\mathrm{D}^{(\sigma)}c = \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \ldots. \tag{61}$$

Nous poserons aussi

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\,\mathrm{D}^{(\sigma)}s=\mathrm{D}_n^{(\sigma)}s \quad\text{et}\quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\,\mathrm{D}^{(\sigma)}c=\mathrm{D}_n^{(\sigma)}c. \tag{62}$$

De la sorte $\mathrm{D}_n^{(\sigma)}s$ et $\mathrm{D}_n^{(\sigma)}c$ représentent les opérations de la différentiation par rapport à n axes, dont $(n-\sigma)$ coïncident avec l'axe des z, et dont les σ restants font les uns avec les autres des angles égaux à $\frac{\pi}{\sigma}$ dans le plan des xy; le symbole $\mathrm{D}_n^{(\sigma)}s$, servant quand l'axe des y coïncide avec l'un des axes, et le symbole $\mathrm{D}_n^{(\sigma)}c$, quand l'axe des y est bissecteur de l'angle compris entre deux des axes.

Les deux harmoniques de surface tesséraux d'ordre n et de type σ peuvent alors s'écrire

$$\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}s=(-1)^n\,\frac{1}{n!}\,r^{n+1}\,\mathrm{D}_n^{(\sigma)}s\,\frac{1}{r}, \tag{63}$$

$$\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}c=(-1)^n\,\frac{1}{n!}\,r^{n+1}\,\mathrm{D}_n^{(\sigma)}c\,\frac{1}{r}. \tag{64}$$

Posant

$$\mu=\cos\theta,\quad \nu=\sin\theta,\quad \rho^2=x^2+y^2,$$

de sorte que

$$z=\mu r,\quad \rho=\nu r,\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,$$

nous avons

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}s\,\frac{1}{r}=(-1)^\sigma\,\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}.\sigma!}\,i(\eta_i^\sigma-\xi^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \tag{65}$$

$$\mathrm{D}^{(\sigma)}c\,\frac{1}{r}=(-1)^\sigma\,\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}.\sigma!}\,(\xi^\sigma+\eta_i^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}}, \tag{66}$$

où nous pouvons poser

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{i}{2}\,(\xi^\sigma-\eta_i^\sigma)=\rho^\sigma\sin\sigma\varphi,\\&\frac{1}{2}\,(\xi^\sigma+\eta_i^\sigma)=\rho^\sigma\cos\sigma\varphi.\end{aligned}\right. \tag{67}$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à différentier par rapport à z, ce que nous pouvons faire de façon à obtenir le résultat, soit comme fonction de r et de z, soit comme fonction homogène de z et de ρ divisée par une puissance de r,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}}&=(-1)^{n-\sigma}\,\frac{(2n)!\,2^\sigma\sigma!}{2^n n!\,(2\sigma)!}\,\frac{1}{r^{2n+1}}\\&\quad\times\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\,z^{n-\sigma-2}\rho^2+\dots\right],\end{aligned}\right. \tag{68}$$

ou

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}} &= (-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\\ &\quad\times\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{1(\sigma+1)}z^{n-\sigma-2}\rho^2+\dots\right].\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned}\Theta_n^{(\sigma)} &= \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-\sigma-2}\right.\\ &\quad\left.+\dots\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4}-\dots\right]\end{aligned}\right.$$

et

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{S}_n^{(\sigma)} &= \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\mu^{n-\sigma-2}\nu^2\right.\\ &\quad\left.+\dots\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4.8(\sigma+1)(\sigma+2)}\mu^{n-\sigma-4}\nu^4-\dots\right],\end{aligned}\right.$$

on aura

$$(72)\qquad \Theta_n^{(\sigma)} = \frac{2^{n-\sigma}n!(n+\sigma)!}{(2n)!\sigma!}\mathfrak{S}_n^{\sigma}.$$

Ces deux fonctions ne diffèrent donc que par un facteur constant.

Nous pouvons maintenant écrire les expressions des deux harmoniques tesséraux d'ordre n et de type σ en fonction de Θ ou de $\mathfrak{S}$,

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}s &= \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi\\ &= \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\sigma!}\mathfrak{S}_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi,\end{aligned}\right.$$

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned}\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}c &= \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\varphi\\ &= \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\sigma!}\mathfrak{S}_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\varphi.\end{aligned}\right.$$

Il faut nous souvenir que si $\sigma=0$, $\sin\sigma\varphi=0$ et $\cos\sigma\varphi=1$.

Pour toutes les valeurs de σ comprises de 1 à n inclusivement, il y a un couple d'harmoniques; mais, lorsque $\sigma=0$, $\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}s=0$ et $\mathrm{Y}_n^{(\sigma)}c=2\mathrm{P}_n$, l'harmonique zonal. Le nombre total des harmoniques d'ordre n est donc $2n+1$, ainsi que cela doit être.

140 *b*. La valeur numérique de Y, que l'on a adoptée dans cet Ouvrage, est celle que nous obtenons en différentiant r^{-1} par rapport aux n axes, et divisant le résultat par $n!$. C'est le produit de quatre

facteurs, le sinus ou le cosinus de $s\varphi$, ν^s, une fonction de μ (ou de μ et de ν), enfin un coefficient numérique.

Le produit du second et du troisième facteur, c'est-à-dire la partie qui dépend de θ, a été exprimée en fonction de trois symboles différents, qui ne se distinguent l'un de l'autre que par leurs facteurs numériques. Lorsqu'il est exprimé sous la forme du produit de ν^s par une série de puissances décroissantes de μ commençant à μ^{n-s}, c'est la fonction que nous désignerons avec Thomson et Tait par Θ.

La fonction que Heine (*Handbuch der Kugelfunctionem*, § 47) désigne par $\mathrm{P}_s^{(n)}$ et appelle *eine zugeordnete Function erster Art*, ou, suivant la traduction de Todhunter, une fonction associée de première espèce, est liée à $\Theta_n^{(s)}$ par l'équation

$$\Theta_n^{(s)} = (-1)^s \mathrm{P}_s^{(n)}. \tag{75}$$

La série des puissances décroissantes de μ commençant à μ^{n-s} est désignée par Heine au moyen du symbole $\mathfrak{P}_s^{(n)}$, et par Todhunter au moyen du symbole $\varpi(n, s)$.

Cette série peut aussi s'exprimer sous deux autres formes

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}_s^{(n)} = \varpi(s, n) &= \frac{(n-s)!}{(2n)!}\frac{\partial^{n+s}}{\partial\mu^{n+s}}(\mu^2-1)^n \\ &= \frac{2^n(n-s)!\,n!}{(2n)!}\frac{\partial^s}{\partial\mu^s}\mathrm{P}_n. \end{aligned}\right. \tag{76}$$

C'est cette dernière forme, sous laquelle on obtient la série quand on différentie l'harmonique zonal par rapport à μ, qui paraît avoir donné l'idée du symbole adopté par Ferrers, et défini par lui de la manière suivante :

$$\mathrm{T}_n^{(s)} = \nu^s \frac{\partial^s}{\partial\mu^s}\mathrm{P}_n = \frac{(2n)!}{2^n(n-s)!\,n!}\Theta_n^{(s)}. \tag{77}$$

Lorsqu'on met cette même quantité sous forme de fonction homogène de μ et de ν, et qu'on la divise par le coefficient de $\mu^{n-s}\nu^s$, on a ce que nous avons déjà désigné par $\mathfrak{S}_n^{(s)}$.

140 c. Les harmoniques du système symétrique ont été classés par Thomson et Tait, d'après la forme des courbes sphériques suivant lesquelles ils s'annulent.

La valeur de l'harmonique zonal en un point quelconque de la sphère est une fonction du cosinus de la distance polaire; en égalant cette fonction à zéro, on obtient une équation de degré n, dont toutes les

racines sont comprises entre $+1$ et -1, et correspondent par suite à n parallèles en latitude sur la sphère.

Les zones comprises entre ces parallèles sont alternativement positives et négatives, et le cercle qui entoure le pôle est toujours positif.

L'harmonique zonal peut donc servir à exprimer une fonction qui s'annule suivant certaines parallèles en latitude de la sphère, ou suivant certaines surfaces coniques dans l'espace.

Les autres harmoniques du système symétrique se présentent par groupes de deux, l'un renfermant le cosinus et l'autre le sinus de $\sigma\varphi$. Ils s'annulent donc suivant σ cercles méridiens, et suivant $n-\sigma$ parallèles de la sphère, de sorte que la surface de la sphère est divisée en $2\sigma(n-\sigma-1)$ quadrilatères ou tessères, et quarante-six triangles aux pôles. Ils sont donc utiles dans les recherches relatives à des quadrilatères ou tessères découpés sur la sphère par des méridiens et des parallèles.

On les appelle *harmoniques tesséraux*, sauf ceux du dernier groupe, lesquels ne s'annulent que sur n cercles méridiens, découpant la surface sphérique en n secteurs. On les appelle, par suite, *harmoniques sectoriaux*.

141. Il nous faut maintenant trouver l'intégrale de surface du carré d'un harmonique tesséral quelconque pour toute l'étendue de la surface de la sphère. Nous pouvons y arriver par la méthode du n° 134. Nous transformons l'harmonique de surface $Y_n^{(\sigma)}$ en un harmonique solide de degré positif, en multipliant par r^n, nous différentions cet harmonique solide, par rapport aux n axes de l'harmonique lui-même, nous faisons alors $x=y=z=0$, et nous multiplions le résultat par

$$\frac{4\pi a^2}{n!(2n+1)}.$$

Dans notre notation, ces opérations sont représentées par la formule

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{n!(2n+1)}\, D_n^{(\sigma)}[r^n Y_n^{(\sigma)}]. \tag{78}$$

Si l'on met l'harmonique solide sous forme de fonction homogène de z, ξ et η, soit

$$\left.\begin{aligned} r^n Y_n^{(\sigma)} s &= \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\sigma!}\, i(\eta^\sigma - \xi^\sigma) \\ &\quad \times\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\, z^{n-\sigma-2}\xi\eta + \dots\right], \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

on trouve que, les différentiations par rapport à z étant effectuées, tous les termes de la série disparaissent sauf le premier, et que le facteur $(n-\sigma)!$ est introduit.

En continuant de différentier par rapport à ξ et η, nous nous débarrassons aussi de ces variables et nous introduisons le facteur $\sigma!$, de sorte que le résultat final est

$$\iint (\mathrm{Y}_n^{(\sigma)} s)^2 \, ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!}. \tag{80}$$

Nous désignerons le second membre de cette équation par le symbole abrégé $[n, \sigma]$.

Cette expression est exacte pour toutes les valeurs de σ de 1 à n inclusivement, mais il n'y a pas d'harmonique en $\sin \sigma\varphi$ pour $\sigma = 0$.

On peut faire voir de la même manière que

$$\iint (\mathrm{Y}_n^{(\sigma)} c)^2 \, ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n! n!}, \tag{81}$$

pour toutes les valeurs de σ de 1 à n inclusivement.

Lorsque $\sigma = 0$, l'harmonique devient l'harmonique zonal, et

$$\iint (\mathrm{Y}_n^{(0)} c)^2 \, ds = \iint (\mathrm{P}_n)^2 \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}, \tag{82}$$

résultat que l'on pouvait tirer directement de l'équation (50) en y faisant $\mathrm{Y}_n = \mathrm{P}_m$, et en se souvenant que la valeur de l'harmonique zonal à son pôle est égale à l'unité.

142 *a*. Nous pouvons maintenant appliquer la méthode du § 136 à la détermination du coefficient d'un harmonique tesséral donné quelconque dans le développement d'une fonction quelconque de la position d'un point sur une sphère. Soit, en effet, F la fonction, et soit A_n^{σ} le coefficient de $\mathrm{Y}_n^{(\sigma)} s$ dans le développement de cette fonction en série d'harmoniques de surface du système symétrique :

$$\iint \mathrm{F} \mathrm{Y}_n^{(\sigma)} \, ds = \mathrm{A}_n^{(\sigma)} \iint (\mathrm{Y}_n^{(\sigma)} s)^2 \, ds = \mathrm{A}_n^{(\sigma)} (n, \sigma), \tag{83}$$

où $[n, \sigma]$ est une abréviation pour la valeur de l'intégrale de surface donnée par l'équation (80).

142 *b*. Soit Ψ une fonction quelconque satisfaisant à l'équation de Laplace et ne présentant point de valeurs singulières dans un rayon a autour d'un point O que nous pouvons prendre pour origine des coordonnées. Il est toujours possible de développer une telle fonction en une

série d'harmoniques solides de degré positif ayant leur origine au point O.

Une façon de faire ce développement consiste à décrire autour du point O, comme centre, une sphère de rayon inférieur à a, et de développer la valeur du potentiel à la surface de cette sphère en une série d'harmoniques de surface. Multiplions chacun de ces harmoniques par une puissance de $\left(\frac{r}{a}\right)$ égale à l'ordre de l'harmonique de surface, nous obtenons les harmoniques solides dont la fonction donnée est la somme.

Mais une méthode plus simple et qui n'implique pas d'intégration consiste à différentier par rapport aux axes des harmoniques du système symétrique.

Supposons, par exemple, que, dans l'expression de Ψ, il y ait un terme de la forme $A_n^{(\sigma)} c Y_n^{(\sigma)} c r^n$.

Si nous effectuons sur Ψ et sur son développement l'opération

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial x_1^\sigma}+\frac{\partial^\sigma}{\partial y_1^\sigma}\right),$$

et si nous faisons ensuite x, y et z égaux à zéro après la différentiation, tous les termes du développement s'annulent, à l'exception de celui qui contient $A_n^{(\sigma)} c$.

En exprimant l'opération effectuée sur Ψ en fonction de symbole de différentiation par rapport aux axes réels, nous obtenons l'équation

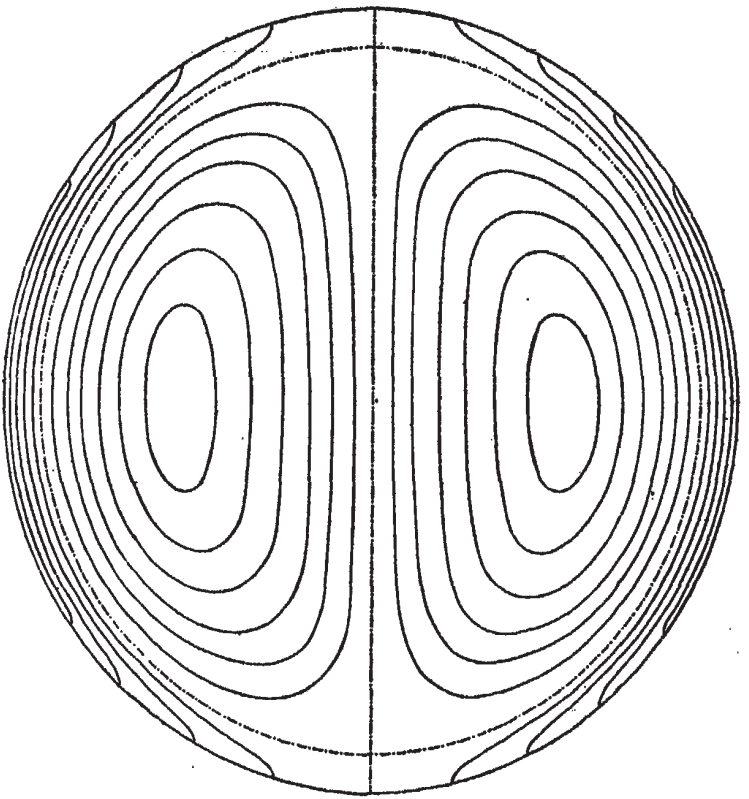
$$\left\{\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left[\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\cdots\right]\Psi\right.$$
$$\left.=A_n^{(\sigma)} c\,\frac{(n-\sigma)!(n-\sigma)!}{2^\sigma n!}\right. \qquad (84)$$

au moyen de laquelle nous pouvons déterminer le coefficient d'un harmonique quelconque de la série en fonction des coefficients différentiels de Ψ par rapport à x, y et z, pris à l'origine.

143. De l'équation (50) il résulte qu'il est toujours possible d'exprimer un harmonique quelconque par la somme d'un système d'harmoniques zonaux de même ordre dont les pôles sont distribués sur la surface de la sphère; mais il ne semble pas facile de simplifier ce système. Toutefois, pour faire saisir à l'œil quelques-uns des caractères des harmoniques sphériques, j'ai calculé les harmoniques zonaux de troisième et de quatrième ordre, et j'ai dessiné, par la méthode déjà décrite pour l'addition des fonctions, les lignes équipotentielles de la sphère pour les harmoniques qui sont la somme de deux harmoniques zonaux.

La *Pl. VI* représente la différence de deux harmoniques zonaux du

Pl. VI.



Harmonique sphérique du troisième ordre.

$n = 3, \quad \sigma = 1.$

troisième ordre, dont les axes sont inclinés de 120° dans le plan du papier. Cette différence est un harmonique de second type, pour lequel σ est égal à 1, et l'axe est perpendiculaire au papier.

Dans la *Pl. VII*, l'harmonique est aussi du troisième ordre, mais les axes des harmoniques zonaux dont il est la somme, sont inclinés l'un sur l'autre de 90°, en sorte que le résultat n'appartient à aucun type du système symétrique. Une des lignes nodales est un grand cercle, mais les deux autres que la première rencontre ne sont pas des cercles.

La *Pl. VIII* représente la différence de deux harmoniques zonaux du quatrième ordre, dont les axes sont rectangulaires. Le résultat est un harmonique tesséral pour lequel $n = 4$ et $\sigma = 2$.

La *Pl. IX* représente la somme de ces mêmes harmoniques zonaux. Le résultat donne quelque idée d'un des types de l'harmonique général du quatrième ordre. Dans ce type, la ligne nodale sur la sphère est formée de six ovales ne se recoupant pas. A l'intérieur de ces ovales, l'harmonique est positif; et dans la partie de la surface sphérique qui est extérieure à ces ovales et qui présente six passages ou régions de connexion, l'harmonique est négatif.

Toutes ces figures sont d'ailleurs des projections orthogonales des figures de la surface sphérique.

J'ai aussi dessiné (*Pl. V*) une section plane passant par l'axe de la sphère, pour montrer les surfaces équipotentielles et les lignes de force dues à une surface sphérique sur laquelle la charge est répartie suivant les valeurs d'un harmonique sphérique du premier ordre.

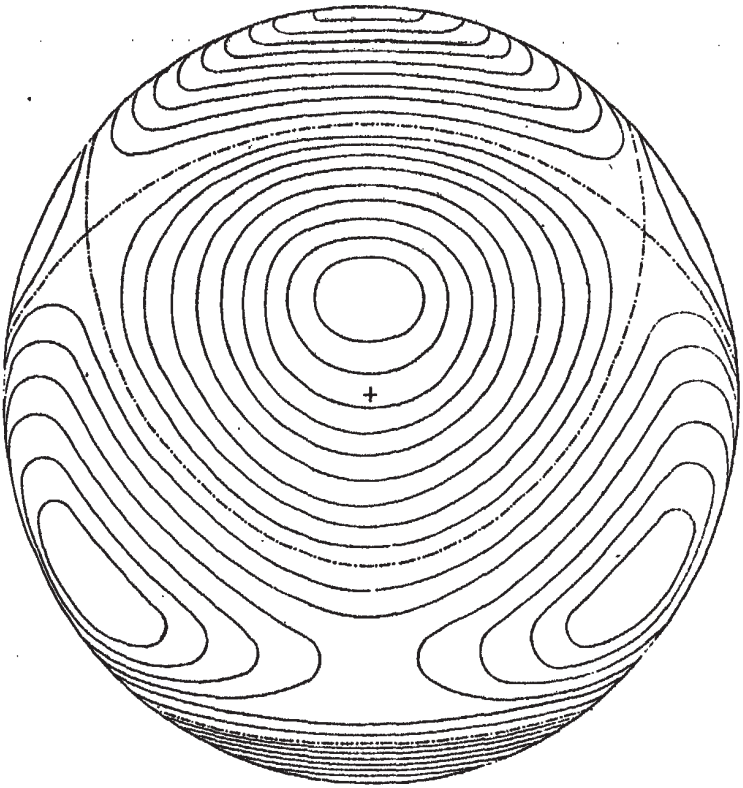
A l'intérieur de la sphère, les surfaces équipotentielles sont des plans équidistants, et les lignes de force, des lignes droites parallèles à l'axe, dont les distances à l'axe sont comme les racines carrées des nombres naturels. Quant aux lignes extérieures, elles représenteraient celles qui seraient dues au magnétisme terrestre, si ce magnétisme était distribué suivant la loi la plus simple.

144 *a*. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la distribution de l'électricité sur un conducteur sphérique soumis à l'action de forces électriques de potentiel donné.

Au moyen des méthodes indiquées plus haut, on développe le potentiel Ψ dû aux forces données en une série d'harmoniques solides de degré positif ayant leur origine au centre de la sphère.

Soit $A_n r^n Y_n$ l'un de ces harmoniques : comme le potentiel est uniforme sur toute la surface conductrice, il doit y avoir un terme $-A_n r^n Y_n$ dû à la distribution de l'électricité sur la surface de la

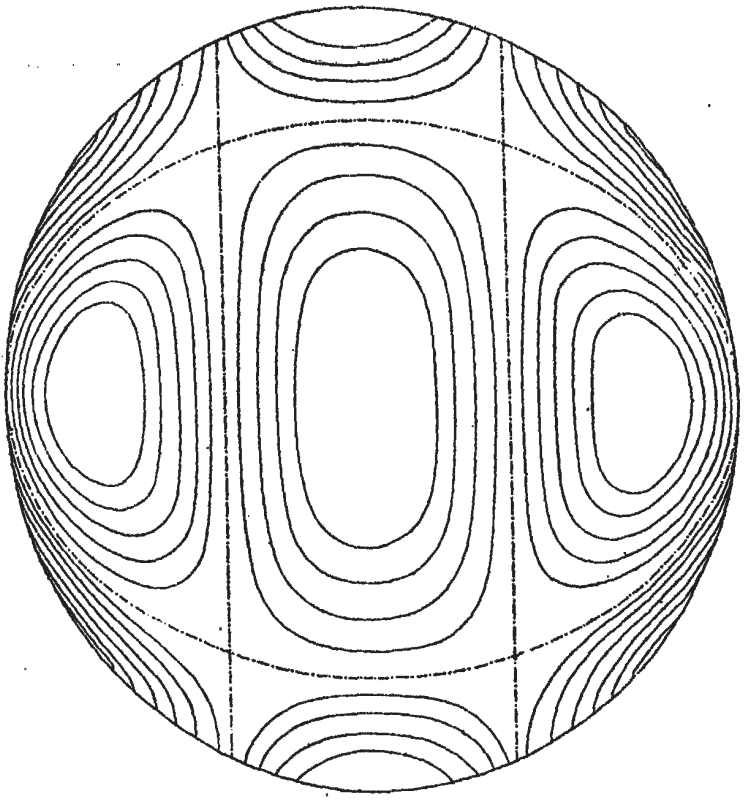
Pl. VII.



Harmonique sphérique du troisième ordre.

$n = 3$.

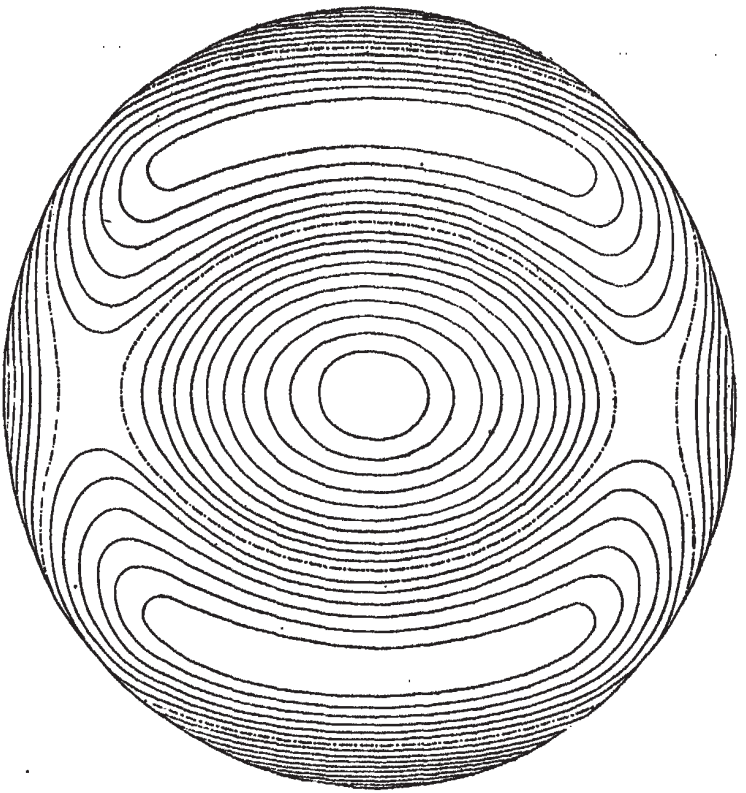
Pl. VIII.



Harmonique sphérique du quatrième ordre.

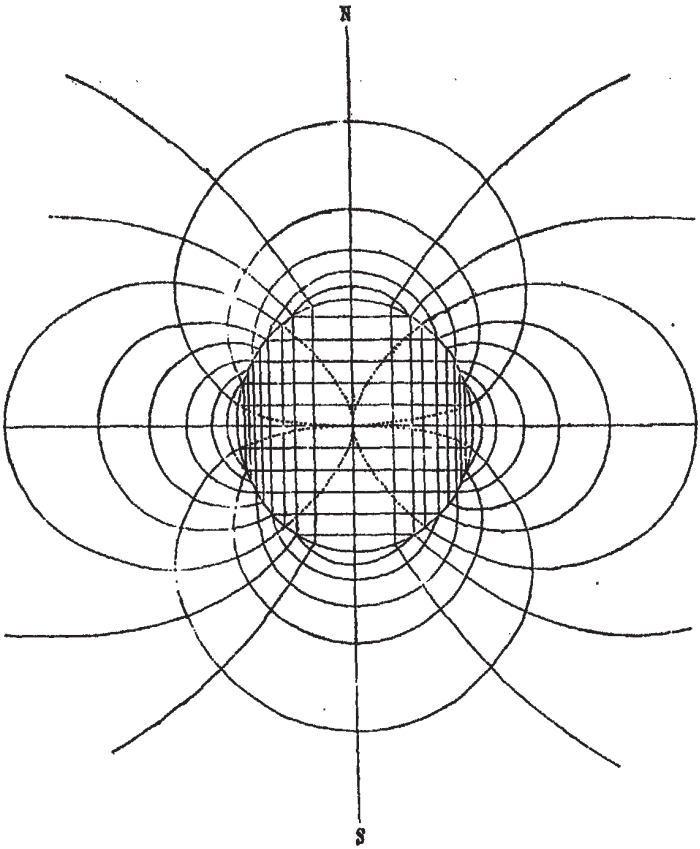
$n = \frac{1}{2}$, $\sigma = 2$.

Pl. IX.



Harmonique sphérique du quatrième ordre.

Pl. V.



Lignes de force et surfaces équipotentielles dans une section diamétrale d'une surface sphérique, pour laquelle la densité superficielle est un harmonique du premier degré.

sphère ; et, par suite, dans le développement de $4\pi\sigma$, il doit y avoir un terme

$$4\pi\sigma_n = (2n+1)a^{n-1}A_nY_n.$$

Nous pouvons déterminer de cette manière les coefficients des harmoniques de tous les ordres, sauf celui de l'ordre zéro, dans l'expression de la densité superficielle. Le coefficient correspondant à l'harmonique d'ordre zéro, dépend de la charge e de la sphère, et il est donné par $4\pi\sigma_0 = a^{-2}e$.

Le potentiel de la sphère est

$$V = \Psi_0 = \frac{e}{a}.$$

144 *b*. Supposons maintenant que la sphère soit placée dans le voisinage de conducteurs mis à la terre, et que la fonction de Green G ait été déterminée en fonction des coordonnées x, y, z et x', y', z' de deux points situés dans la région où la sphère se trouve placée.

Si la densité superficielle de la sphère est exprimée par une série de sphériques harmoniques, les phénomènes électriques qui se produisent au dehors en raison de cette charge de la sphère seront identiques à ceux que produiraient une série fictive de points singuliers tous placés au centre de la sphère, le premier de ces points étant un point simple possédant une charge égale à celle de la sphère, et les autres des points multiples de divers ordres correspondant aux harmoniques au moyen desquels a été exprimée la densité superficielle.

Désignons la fonction de Green par $G_{pp'}$, où p désigne le point dont les coordonnées sont x, y, z, et p' le point dont les coordonnées sont x', y', z'.

Soit A_0 la charge placée au point p' : alors, considérant x', y', z' comme constantes, $G_{pp'}$ devient une fonction de x, y, z, et le potentiel dû à l'électricité induite par A_0 sur les corps environnants est

$$\Psi = A_0 G_{pp'}. \tag{1}$$

Si, au lieu de placer en p' la charge A_0, nous la distribuons uniformément sur une sphère de rayon a ayant son centre en p', la valeur de Ψ restera la même pour les points extérieurs à la sphère.

Si la charge n'est pas uniformément distribuée sur la surface de la sphère, exprimons, comme nous le pouvons toujours, la densité superficielle par une série d'harmoniques sphériques, telle que

$$4\pi a^2\sigma = A_0 + 3A_1Y_1 + \ldots + (2n+1)A_nY_n. \tag{2}$$

Le potentiel dû à un quelconque des termes de cette distribution

$$4\pi a^2\sigma_n = (2n+1)A_nY_n, \tag{3}$$

par exemple, sera $\frac{r^n}{a^{n+1}}A_nY_n$ pour les points intérieurs à la sphère, et $\frac{a^n}{r^{n+1}}A_nY_n$ pour les points extérieurs.

Or, d'après les équations (13, 14) du § 129, cette dernière expression est égale à

$$(-1)^n A_n \frac{a^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n}\frac{1}{r},$$

c'est-à-dire que le potentiel en un point extérieur à la sphère dû à une certaine charge de cette sphère est égal au potentiel dû à un certain point multiple dont les axes sont $h_1, h_2, \dots, h_n$ et dont le moment est $A_n a^n$.

Donc la distribution de l'électricité sur les conducteurs environnants, et le potentiel dû à cette distribution, sont identiques à ceux qui seraient dus à un pareil point multiple.

Par suite, au point $p\ (x, y, z)$, le potentiel dû aux charges induites sur les corps environnants est

$$\Psi_n = A_n \frac{a_n}{n!}\frac{\partial'^n}{\partial' h_1 \dots \partial' h_n} G, \tag{4}$$

l'accent qui affecte les ∂ indiquant que les différentiations sont effectuées par rapport aux x', y', z'. Après quoi on fait ces coordonnées égales à celles du centre de la sphère.

Il est commode de supposer Y_n résolu en ses $2n+1$ éléments du système symétrique. Soit $A_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}$ l'un de ces éléments; alors

$$\frac{\partial'^n}{\partial' h_1 \dots \partial' h_n} = D'^{(\sigma)}_n. \tag{5}$$

Il n'est pas nécessaire, dans le cas actuel, d'ajouter l'indice s ou c, qui indique si c'est le sinus ou le cosinus $n\varphi$ qui se présente dans l'harmonique.

Nous pouvons maintenant écrire l'expression complète de Ψ

$$\Psi = A_0 G + \Sigma\Sigma\left(A_n^{(\sigma)}\frac{a^n}{n!}D'^{(\sigma)}_n G\right). \tag{6}$$

Mais, à l'intérieur de la sphère, le potentiel est constant, c'est-à-dire que

$$\Psi + \frac{A_0}{a} + \Sigma\Sigma\left[\frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}}A_{n_1}^{(\sigma_1)}Y_{n_1}^{(\sigma_1)}\right] = \text{const.} \tag{7}$$

Effectuons sur cette expression l'opération $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$, où les différentiations doivent être faites par rapport à x, y, z, et où les valeurs de n_1 et σ_1 sont indépendantes de celles de n et σ. Tous les termes de (7) disparaissent, sauf celui qui fait partie de $Y_{n_1}^{(\sigma_1)}$, et nous trouvons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &-2\,\frac{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}{2^{2\sigma_1}n_1!}\,\frac{1}{a^{n_1+1}}\,A_{n_1}^{(\sigma_1)}\\ &\quad=A_0 D_{n_1}^{(\sigma_1)}G+\Sigma\Sigma\left(A_n^\sigma\,\frac{a^n}{n!}\,D_{n_1}^{(\sigma_1)}D'^{(\sigma)}_{n}G\right).\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi une série d'équations : le premier membre de chacune d'elles renferme un des coefficients que nous voulons déterminer. Le premier terme du second membre renferme A_0 la charge de la sphère, et nous pouvons le considérer comme le terme principal.

Négligeant provisoirement les autres termes, nous avons, comme première approximation,

$$(9)\qquad A_{n_1}^{(\sigma_1)}=-\frac{1}{2}\,\frac{2^{2\sigma}n_1!}{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}\,A_0 a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G.$$

Et, si l'on désigne par b la plus courte distance du centre de la sphère au plus voisin des conducteurs environnants,

$$a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G<\left(\frac{a}{b}\right)^{n_1+1}.$$

Si donc b est grand relativement au rayon a de la sphère, les coefficients des autres harmoniques sphériques sont très petits relativement à A_0. Donc, les termes qui suivent le premier dans le second membre de l'équation (8) seront du même ordre de grandeur que $\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+n_1+1}$.

On peut donc les négliger dans une première approximation; puis, à la seconde approximation, introduire dans ces termes les valeurs des coefficients obtenues à la première approximation, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait atteint le degré d'approximation voulu.

Distribution de l'électricité sur un conducteur à peu près sphérique.

145 *a*. Soit

$$(1)\qquad r=a(1+F)$$

l'équation de la surface du conducteur, F étant fonction de la direction de r, c'est-à-dire de θ et de φ; et nous supposerons dans cette étude que son carré puisse être négligé.

Développons F en une série d'harmoniques de surface

$$F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n. \tag{2}$$

De ces termes, le premier dépend de l'excès du rayon moyen sur a. Si donc nous admettons que a soit le rayon moyen, c'est-à-dire que a soit à peu près le rayon d'une sphère dont le volume est égal à celui du conducteur donné, le coefficient f_0 disparaît.

Le second terme, en f_1, dépend de la distance de l'origine au centre de masse du conducteur que l'on suppose de densité uniforme. Si donc nous prenons ce centre pour origine, ce deuxième terme disparaît également.

Nous supposerons d'abord que le conducteur a une charge A_0, sans qu'aucune force électrique extérieure agisse sur lui. Le potentiel à l'extérieur du conducteur doit donc être de la forme

$$V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y'_1 \frac{1}{r^2} + \ldots + A_n Y'_n \frac{1}{r^{n+1}}; \tag{3}$$

on ne suppose pas, d'ailleurs, que dans ce développement les harmoniques de surface appartiennent au même type que dans le développement de F.

A la surface du conducteur, le potentiel est celui du conducteur, c'est-à-dire la quantité constante α.

Donc, si l'on développe les puissances de r en fonction de a et de F, et si l'on néglige le carré et les puissances supérieures de F, on a

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= A_0 \frac{1}{a}(1 - F) + A_1 \frac{1}{a^2} Y'_1 (1 - 2F) + \ldots \\ &\quad + A_n \frac{1}{a^{n+1}} Y'_n [1 - (n+1)F]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Puisque les coefficients $A_1, \ldots$ sont évidemment très petits en comparaison de A_0, on peut au début négliger les produits de ces coefficients par F.

Si maintenant dans le premier terme on remplace F par son développement en harmoniques sphériques, et si l'on égale à zéro les termes qui renferment des harmoniques de même ordre, on trouve

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a}, \tag{5}$$

$$A_1 Y'_1 = A_0 a f_1 Y_1 = 0, \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_n Y'_n = A_0 a^n f_n Y_n. \tag{7}$$

De ces équations il résulte que les Y′ doivent être du même type que les Y, et par suite leur être identiques; et que

$$A_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_n = A_0 a^n f_n.$$

Pour déterminer la densité en un point de la surface, nous avons l'équation

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial r}\cos\varepsilon, \tag{8}$$

où ν est la normale, et ε l'angle de la normale avec le rayon. Puisque, dans cette étude, on suppose très petits F et ses dérivées premières par rapport à θ et à φ, on peut prendre $\cos\varepsilon = 1$, de sorte que

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial r} = A_0\frac{1}{r^2} + \ldots + (n+1)A_n Y_n \frac{1}{r^{n+2}}. \tag{9}$$

Développant les puissances de r en fonction de a et de F, et négligeant les produits de A_n par F, on trouve

$$4\pi\sigma = A_0\frac{1}{a^n}(1-2F) + \ldots + (n+1)A_n\frac{1}{a^{n+2}}Y_n. \tag{10}$$

Développant F en harmoniques sphériques et donnant à A_n sa valeur précédemment trouvée, on obtient

$$4\pi\sigma = A_0\frac{1}{a^2}[1 + f_2 Y_2 + 2f_3 Y_3 + \ldots + (n-1)f_n Y_n]. \tag{11}$$

Donc, si la surface donnée diffère de la surface d'une sphère par une couche mince dont l'épaisseur varie comme les valeurs d'un harmonique sphérique d'ordre n, le rapport de la différence des densités superficielles en deux points à leur somme sera égal à $(n-1)$ fois le rapport de la différence à la somme des rayons en ces deux points.

145 *b*. Soit un conducteur à peu près sphérique et soumis à l'action de forces extérieures, dont le potentiel est U : développons ce potentiel en une série d'harmoniques sphériques de degré positif, ayant leur origine au centre du volume du conducteur :

$$U = B_0 + B_1 r Y'_1 + B_2 r^2 Y'_2 + \ldots + B_n r^n Y'_n, \tag{12}$$

l'accent de l'Y signifiant que ces harmoniques ne sont pas nécessairement de même type que ceux qui figurent dans le développement de F.

Si le conducteur était exactement sphérique, le potentiel dû à sa

charge superficielle sur un point extérieur serait

$$(13) \qquad V = A_0 \frac{1}{r} - B_1 \frac{a^3}{r^3} Y'_1 - \ldots - B_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} Y'_n.$$

Représentons par $V + W$ le potentiel dû à la charge superficielle actuelle, où

$$(14) \qquad W = C_0 \frac{1}{r} + C_1 \frac{1}{r^2} Y''_1 + \ldots + C_m \frac{1}{r^{m+1}} Y''_m + \ldots,$$

les harmoniques affectés d'un double accent étant différents de ceux qui se rencontrent soit dans F, soit dans U, et les coefficients C étant petits, puisque F est lui-même petit.

La condition à remplir est que, pour $r = a(1 + F)$,

$$U + V + W = \text{const.} = A_0 \frac{1}{a} + B_0,$$

potentiel du conducteur.

Développons les puissances de r en fonction de a et F, en conservant la première puissance de F lorsqu'elle est multipliée par A ou B, et la négligeant quand elle est multipliée par la petite quantité C; nous trouvons

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} F\left[- A_0 \frac{1}{a} + 3 B_1 a^3 Y'_1 + 5 B_2 a^5 Y'_2 + \ldots + (2n+1) B_n a^{2n+1} Y'_n \right] \\ \qquad + C_0 \frac{1}{r} + C_1 \frac{1}{r^2} Y''_1 + \ldots + C_m \frac{1}{r^{m+1}} Y''_m = 0. \end{array} \right.$$

Pour déterminer les coefficients C, il faut effectuer la multiplication indiquée dans le premier terme, et exprimer le résultat par une série d'harmoniques sphériques. Cette série, avec ses signes changés, représentera W à la surface du conducteur.

Le produit de deux harmoniques sphériques d'ordres n et m est une fonction rationnelle de degré $m + n$ de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$; il peut donc être être développé en une série d'harmoniques sphériques d'ordre ne dépassant pas $m + n$. Si donc F peut être développé en une série d'harmoniques sphériques dont l'ordre ne dépasse pas m, et si le potentiel dû aux forces extérieures peut être développé en harmoniques sphériques dont l'ordre ne dépasse pas n, le potentiel dû à la charge superficielle ne comprendra pas d'harmoniques sphériques d'ordre supérieur à $m + n$.

Cette densité superficielle peut être déduite du potentiel par l'équa-

tion

$$4\pi\sigma + \frac{\partial}{\partial r}(U + V + W) = 0. \tag{16}$$

145 c. ***Conducteur à peu près sphérique renfermé dans un vase à peu près sphérique et à peu près concentrique.***

Soit

$$r = a(1 + F) \tag{17}$$

l'équation de la surface du conducteur, où

$$F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}. \tag{18}$$

Soit

$$r = b(1 + G) \tag{19}$$

l'équation de la surface intérieure du vase où

$$G = g_1 Y_1 + g_2 Y_2 + \ldots + g_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}, \tag{20}$$

les f et les g étant petits en comparaison de l'unité, et $Y_n^{(\sigma)}$ étant l'harmonique de surface d'ordre n et de type σ.

Soient α le potentiel du potentiel du conducteur, β celui du vase; et développons en série d'harmoniques sphériques le potentiel d'un point quelconque compris entre le conducteur et le vase

$$\left\{\begin{aligned} \Psi = {} & h_0 + h_1 Y_1 r + h_2 Y_2 r^2 + \ldots + h_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} r^n \\ & + k_0 \frac{1}{r} + k_1 Y_1 \frac{1}{r^2} + \ldots + k_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)} \frac{1}{r^{n+1}}; \end{aligned}\right. \tag{21}$$

il faut déterminer les constantes de la forme h et de la forme k, de telle sorte que, pour

$$r = a(1 + F), \ \Psi \text{ soit égal à } \alpha,$$

et que, pour

$$r = b(1 + G), \ \Psi \text{ soit égal à } \beta.$$

Il est clair, d'après notre étude précédente, que tous les h et tous les k, sauf h_0 et k_0, sont de très petites quantités, dont les produits par F peuvent être négligés. Nous pouvons donc poser

$$\alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a}(1 - F) + \ldots + \left(h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}}\right) Y_n^{(\sigma)}, \tag{22}$$

$$\beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b}(1 - G) + \ldots + \left(h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}}\right) Y_n^{(\sigma)}; \tag{23}$$

nous avons donc

$$\alpha = h_0 + k_0 \frac{1}{a}, \tag{24}$$

$$\beta = h_0 + k_0 \frac{1}{b}, \tag{25}$$

$$k_0 \frac{1}{a} f_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} a^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{a^{n+1}}, \tag{26}$$

$$k_0 \frac{1}{b} g_n^{(\sigma)} = h_n^{(\sigma)} b^n + k_n^{(\sigma)} \frac{1}{b^{n+1}}, \tag{27}$$

d'où nous tirons, pour la charge du conducteur intérieur,

$$k_0 = (\alpha - \beta) \frac{ab}{b - a} \tag{28}$$

et, pour les coefficients des harmoniques d'ordre n,

$$h_n = k_0 \frac{b^n g_n - a^n f_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}, \tag{29}$$

$$k_n = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n - a^{n+1} g_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}, \tag{30}$$

où il faut bien se rappeler que f_n, g_n, h_n et k_n sont les coefficients des termes de même type et de même ordre.

La densité superficielle sur le conducteur intérieur est donnée par l'équation

$$4\pi\tau a^2 = k_0(1 + \ldots + A_n Y_n^{(\sigma)}),$$

où

$$A_n = \frac{f_n[na^{2n+1} - (n+1)b^{2n+1}] - g_n(2n+1)a^{n+1}b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \tag{31}$$

146. Comme exemple de l'emploi des harmoniques zonaux, recherchons les conditions de l'équilibre électrique sur deux conducteurs sphériques.

Soient a et b les rayons des sphères; c la distance des centres. Pour abréger, nous poserons $a = cx$, $b = cy$, en sorte que x et y sont des quantités numériques plus petites que l'unité.

Prenons, pour axe des harmoniques zonaux, la ligne qui joint les centres des sphères; pour pôle de ces harmoniques sur chaque sphère, le point de cette sphère le plus proche de l'autre sphère.

Soit r la distance d'un point quelconque au centre de la première

sphère et soit s la distance du même point au centre de la seconde sphère.

Supposons que la densité superficielle σ_1 de la première sphère soit donnée par l'équation

$$(1) \qquad 4\pi\sigma_1 a^2 = A + A_1 P_1 + 3 A_2 P_2 + \ldots + (2m+1) A_m P_m,$$

en sorte que A est la charge totale de la sphère, et que $A_1, A_2, \ldots$ sont les coefficients des harmoniques zonaux $P_1, P_2, \ldots$.

Le potentiel, dû à une telle distribution de la charge, peut être représenté :

Pour les points intérieurs à la sphère, par

$$(2) \qquad U' = \frac{1}{a}\left(A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m}\right)$$

et, pour les points extérieurs, par

$$(3) \qquad U = \frac{1}{r}\left(A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \ldots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m}\right).$$

De même, si la densité superficielle de la seconde sphère est donnée par l'équation

$$(4) \qquad 4\pi\sigma_2 b^2 = B + B_1 P_1 + \ldots + (2n+1) B_n P_n,$$

le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère peut être représenté par des équations de la forme

$$(5) \qquad V' = \frac{1}{b}\left(B + B_1 P_1 \frac{s}{b} + B_2 P_2 \frac{s^2}{b^2} + \ldots + B_n P_n \frac{s^n}{b^n}\right),$$

$$(6) \qquad V = \frac{1}{s}\left(B + B_1 P_1 \frac{b}{s} + B_2 P_2 \frac{b^2}{s^2} + \ldots + B_n P_n \frac{b^n}{s^n}\right),$$

les harmoniques généraux étant ici relatifs à la seconde sphère.

Les charges respectives des sphères sont A et B.

Le potentiel en tout point intérieur à la première sphère est constant, et égal à α, potentiel de cette sphère, de sorte que pour tout point intérieur à la première sphère

$$(7) \qquad U' + V = \alpha.$$

De même, si β est le potentiel de la seconde sphère, pour des points intérieurs à cette sphère,

$$(8) \qquad U + V' = \beta.$$

Pour les points extérieurs aux deux sphères, le potentiel est Ψ et l'on a

$$U + V = \Psi. \tag{9}$$

Sur l'axe, entre les centres des sphères,

$$r + s = c; \tag{10}$$

d'où, en différentiant par rapport à r et faisant $r = 0$ après la différentiation, et nous souvenant que chacun des harmoniques zonaux devient égal à l'unité à son pôle, nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} &A_1 \frac{1}{a^2} - \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \\ &A_2 \frac{2!}{a^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ &A_m \frac{m!}{a^{m+1}} + (-1)^m \frac{\partial^m V}{\partial s^m} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où l'on doit faire $s = c$ après la différentiation.

Si nous effectuons les différentiations, et si nous posons

$$\frac{a}{c} = x, \quad \frac{b}{c} = y,$$

ces équations deviennent

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= A_1 + Bx^2 + 2B_1 x^2 y + 3B_2 x^2 y^2 + \dots + (n+1) B_n x^2 y^n, \\ 0 &= A_2 + Bx^3 + 3B_1 x^3 y + 6B_2 x^3 y^2 + \dots + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) B_n x^3 y^n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 &= A_m + Bx^{m+1} + (m+1) B_1 x^{m+1} y \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) B_2 x^{m+1} y^2 + \dots + \frac{(m+n)!}{m!\,n!} B_n x^{m+1} y^n. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Les mêmes opérations effectuées pour la seconde sphère donnent

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= B_1 + Ay^2 + 2A_1 xy^2 + 3A_2 x^2 y^2 + \dots + (m+1) A_m x^m y^2, \\ 0 &= B_2 + Ay^3 + 3A_1 xy^3 + 6A_2 x^2 y^3 + \dots + \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) A_m x^m y^3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 &= B_n + Ay^{n+1} + (n+1) A_1 xy^{n+1} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) A_2 x^2 y^{n+1} + \dots + \frac{(m+n)!}{m!\,n!} A_m x^m y^{n+1}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Pour déterminer les potentiels de deux sphères, nous avons les équa-

tions (7) et (8) que, maintenant, nous pouvons écrire

$$(14) \qquad cz = A\frac{1}{x} + B + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots + B_n y^n,$$

$$(15) \qquad c\zeta = B\frac{1}{y} + A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m.$$

Si donc nous bornons notre attention aux coefficients de A_1 à A_m et de B_1 à B_n, nous avons $m+n$ équations pour déterminer ces quantités en fonction des charges A et B des deux sphères; en introduisant ensuite dans (14) et (15) les valeurs de ces coefficients, nous pouvons exprimer les potentiels des sphères en fonction de leurs charges.

Ces opérations peuvent être exprimées sous forme de déterminants; mais, pour le calcul, il est plus commode de procéder comme il suit :

Substituant, dans les équations (12), les valeurs de $B_1, \ldots, B_n$ tirées des équations (13), nous trouvons

$$(17) \quad \begin{cases} A_1 = -Bx^2 + A\,x^2y^2[2.1 + 3.1y^2 + 4.\,1y^4 + 5.1y^6 + 6.1y^8] \\ \qquad + A_1x^3y^3[2.2 + 3.3y^2 + 4.\,4y^4 + 5.5y^6] \\ \qquad + A_2x^4y^4[2.3 + 3.6y^2 + 4.10y^4] \\ \qquad + A_3x^5y^5[2.4 + 3.10y^2] \\ \qquad + A_4x^6y^6[2.5], \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} A_2 = -Bx^3 + A\,x^3y^3[3.1 + 6.1y^2 + 10.1y^4 + 15.1y^6] \\ \qquad + A_1x^4y^4[3.2 + 6.3y^2 + 10.4y^4] \\ \qquad + A_2x^5y^5[3.3 + 6.6y^2] \\ \qquad + A_3x^6y^6[3.4], \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} A_3 = -Bx^4 + A\,x^4y^4[4.1 + 10.1y^2 + 20.1y^4] \\ \qquad + A_1x^5y^5[4.2 + 10.3y^2] \\ \qquad + A_2x^6y^6[4.3], \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} A_4 = -Bx^5 + A\,x^5y^5[5 + 15y^2] \\ \qquad + A_1x^6y^6[5.2]. \end{cases}$$

En substituant dans les seconds membres de ces équations les valeurs approchées de $A_1, \ldots$ et répétant cette opération pour obtenir de plus grandes approximations, nous pouvons pousser l'approximation du coefficient jusqu'où nous voudrons dans les puissances ascendantes et les produits de x et y.

Si nous posons

$$A_n = p_n A - q_n B,$$
$$B_n = -r_n A + s_n B;$$

nous trouvons

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
p_1 = {} & x^2 y^3 [\ 2 + 3y^2 + 4y^4 + 5y^6 + 6y^8 + 7y^{10} \\
& \qquad + 8y^{12} + 9y^{14} + \ldots] \\
& + x^5 y^6 [\ 8 + 30y^2 + 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \ldots] \\
& + x^7 y^6 [\ 18 + 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \ldots] \\
& + x^9 y^6 [\ 32 + 200y^2 + 780y^4 + \ldots] \\
& + x^{11} y^6 [\ 50 + 375y^2 + \ldots] \\
& + x^{13} y^6 [\ 72 + \ldots] \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& + x^8 y^9 [\ 32 + 192y^2] \\
& + x^{10} y^9 [144 + \ldots] \\
& \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
q_1 = {} & x^2 \\
& + x^5 y^3 [\ 4 + 9y^2 + 16y^4 + 25y^6 + 36y^8 + 49y^{10} + 64y^{12} + \ldots] \\
& + x^7 y^3 [\ 6 + 18y^2 + 40y^4 + 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} + \ldots] \\
& + x^9 y^3 [\ 8 + 30y^2 + 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \ldots] \\
& + x^{11} y^3 [\ 10 + 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \ldots] \\
& + x^{13} y^3 [\ 12 + 63y^2 + 224y^4 + \ldots] \\
& + x^{15} y^3 [\ 14 + 84y^2 + \ldots] \\
& + x^{17} y^3 [\ 16 + \ldots] \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& + x^8 y^6 [\ 16 + 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \ldots] \\
& + x^{10} y^6 [\ 60 + 342y^2 + 1222y^4 + \ldots] \\
& + x^{12} y^6 [150 + 1050y^2 + \ldots] \\
& + x^{14} y^6 [308 + \ldots] \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& + x^{11} y^9 [\ 64 + \ldots]
\end{aligned}
$$

Pour les opérations ultérieures, il sera plus commode d'écrire ces coefficients en fonction de a, b et c, et d'ordonner les termes suivant les puissances de c. On rend ainsi plus facile la différentiation par rapport à c. Nous trouvons ainsi

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
p_1 = {} & 2a^2b^3c^{-5} + 3a^2b^5c^{-7} + 4a^2b^7c^{-9} + (5a^2b^9 + 8a^5b^6)c^{-11} \\
& + (6a^2b^{11} + 30a^5b^{-8} + 18a^7b^6)c^{-13} \\
& + (7a^2b^{13} + 75a^5b^{10} + 90a^7b^8 + 32a^9b^6)c^{-15} \\
& + (8a^2b^{15} + 154a^5b^{12} + 288a^7b^{10} + 32a^8b^9 \\
& \qquad + 200a^9b^8 + 50a^{11}b^6)c^{-17} \\
& + (9a^2b^{17} + 280a^5b^{14} + 735a^7b^{12} + 192a^8b^{11} + 780a^9b^{10} \\
& \qquad + 144a^{10}b^9 + 375a^{11}b^8 + 72a^{13}b^6)c^{-19},
\end{aligned}
$$

$$
(23)\quad \left\{\begin{aligned}
q_1 = {} & a^2c^{-2} + 4a^5b^3c^{-8} + (6a^7b^3 + 9a^6b^5)c^{-10} \\
& + (8a^9b^3 + 18a^7b^5 + 16a^5b^7)c^{-12} \\
& + (10a^{11}b^3 + 30a^9b^5 + 16a^8b^6 + 40a^7b^7 + 25a^5b^9)c^{-14} \\
& + (12a^{13}b^3 + 45a^{11}b^5 + 60a^{10}b^6 + 80a^9b^7 + 72a^8b^8 \\
& \qquad + 75a^7b^9 + 36a^5b^{11})c^{-16} \\
& + (14a^{15}b^3 + 63a^{13}b^5 + 180a^{12}b^6 + 140a^{11}b^7 + 342a^{10}b^8 \\
& \qquad + 175a^9b^9 + 209a^8b^{10} + 126a^7b^{11} + 49a^6b^{12})c^{-18} \\
& + (16a^{17}b^3 + 84a^{15}b^5 + 308a^{14}b^6 + 224a^{13}b^7 + 1050a^{12}b^8 \\
& \qquad + 414a^{11}b^9 + 1222a^{10}b^{10} + 336a^9b^{11} + 488a^8b^{12} \\
& \qquad + 196a^7b^{13} + 64a^5b^{15})c^{-20},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(24)\quad \left\{\begin{aligned}
p_2 = {} & 3a^3b^3c^{-6} + 6a^3b^5c^{-8} + 10a^3b^7c^{-10} + (12a^6b^6 + 15a^3b^9)c^{-12} \\
& + (27a^8b^6 + 54a^6b^8 + 21a^3b^{11})c^{-14} \\
& + (48a^{10}b^6 + 162a^8b^8 + 158a^6b^{10} + 28a^3b^{13})c^{-16} \\
& + (75a^{12}b^6 + 360a^{10}b^8 + 48a^9b^9 + 606a^8b^{10} \\
& \qquad + 372a^6b^{12} + 36a^3b^{15})c^{-18},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(25)\quad \left\{\begin{aligned}
q_2 = {} & a^3c^{-3} + 6a^6b^3c^{-9} + (9a^8b^3 + 18a^6b^5)c^{-11} \\
& + (12a^{10}b^3 + 36a^8b^5 + 40a^6b^7)c^{-13} \\
& + (15a^{12}b^3 + 60a^{10}b^5 + 24a^9b^6 + 100a^8b^7 + 75a^6b^9)c^{-15} \\
& + (18a^{14}b^3 + 90a^{12}b^5 + 90a^{11}b^6 + 200a^{10}b^7 \\
& \qquad + 126a^9b^8 + 225a^8b^9 + 126a^6b^{11})c^{-17} \\
& + (21a^{16}b^3 + 126a^{14}b^5 + 225a^{13}b^6 + 350a^{12}b^7 + 594a^{11}b^8 \\
& \qquad + 525a^{10}b^9 + 418a^9b^{10} + 441a^8b^{11} + 196a^6b^{13})c^{-19},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(26)\quad \left\{\begin{aligned}
p_3 = {} & 4a^4b^3c^{-7} + 10a^4b^5c^{-9} + 20a^4b^7c^{-11} + (16a^7b^6 + 35a^4b^9)c^{-13} \\
& + (36a^9b^6 + 84a^7b^8 + 56a^4b^{11})c^{-15} \\
& + (64a^{11}b^6 + 252a^9b^8 + 282a^7b^{10} + 84a^4b^{13})c^{-17},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(27)\quad \left\{\begin{aligned}
q_3 = {} & a^4c^{-4} + 8a^7b^3c^{-10} + (12a^9b^3 + 30a^7b^5)c^{-12} \\
& + (16a^{11}b^3 + 60a^9b^5 + 80a^7b^7)c^{-14} \\
& + (20a^{13}b^3 + 100a^{11}b^5 + 32a^{10}b^6 + 200a^9b^7 + 175a^7b^9)c^{-16} \\
& + (24a^{15}b^3 + 150a^{13}b^5 + 120a^{12}b^6 + 400a^{11}b^7 + 192a^{10}b^8 \\
& \qquad + 525a^9b^9 + 336a^7b^{11})c^{-18},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(28)\quad \left\{\begin{aligned}
p_4 = {} & 5a^5b^3c^{-8} + 15a^5b^5c^{-10} + 35a^5b^7c^{-12} + (20a^8b^6 + 70a^5b^9)c^{-14} \\
& + (45a^{10}b^6 + 120a^8b^8 + 126a^5b^{11})c^{-16},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(29)\quad \left\{\begin{aligned}
q_4 = {} & a^5c^{-5} + 10a^8b^3c^{-11} + (15a^{10}b^3 + 45a^8b^5)c^{-13} \\
& + (20a^{12}b^3 + 90a^{10}b^5 + 140a^8b^7)c^{-15} \\
& + (25a^{14}b^3 + 150a^{12}b^5 + 40a^{11}b^6 + 350a^{10}b^7 + 350a^8b^9)c^{-17},
\end{aligned}\right.
$$

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} p_5 = 6a^6b^3c^{-9} + 21a^8b^5c^{-11} + 56a^8b^7c^{-13} \\ \qquad + (24a^9b^7 + 126a^8b^9)c^{-15}, \end{array}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} q_5 = a^6c^{-6} + 12a^9b^3c^{-12} + (18a^{11}b^3 + 63a^9b^5)c^{-14} \\ \qquad + (2\tfrac{1}{2}a^{12}b^3 + 126a^{11}b^5 + 224a^9b^7)c^{-16}, \end{array}\right.$$

$$(32)\quad p_4 = 7a^7b^3c^{-10} + 28a^7b^5c^{-12} + 84a^7b^7c^{-14},$$

$$(33)\quad q_4 = a^7c^{-7} + 14a^{10}b^3c^{-13} + (21a^{12}b^3 + 84a^{10}b^5)c^{-15},$$

$$(34)\quad p_7 = 8a^8b^3c^{-11} + 36a^8b^5c^{-13},$$

$$(35)\quad q_7 = a^8c^{-8} + 16a^{11}b^3c^{-14},$$

$$(36)\quad p_8 = 9a^9b^3c^{-12},$$

$$(37)\quad q_8 = a^9c^{-9}.$$

Les valeurs de r et de s peuvent se déduire en échangeant a et b dans les p et les q.

Si, maintenant, nous calculons le potentiel des deux sphères en fonction de ces coefficients sous la forme

$$(38)\qquad \alpha = l\mathrm{A} + m\mathrm{B},$$

$$(39)\qquad \beta = m\mathrm{A} + n\mathrm{B},$$

l, m, n sont les coefficients de potentiel (*voir* § 87) et l'on a

$$(40)\qquad m = c^{-1} + p_1ac^{-2} + p_2a^2c^{-3} + \ldots.$$

$$(41)\qquad n = b^{-1} - q_1ac^{-2} - q_2a^2c^{-3} - \ldots.$$

ou bien, en développant en fonction de a, b et c,

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} m = c^{-1} + 2a^2b^2c^{-7} + 3a^4b^4(a^2+b^2)c^{-9} \\ \quad + a^4b^2(4\tfrac{1}{2}a^4 + 6a^2b^2 + 4b^4)c^{-11} \\ \quad + a^4b^4(5a^4 + 10a^2b^2 + 8a^4b^4 + 10a^2b^4 + 5b^6)c^{-13} \\ \quad + a^4b^2(6a^8 + 15a^6b^2 + 30a^4b^4 + 20a^2b^6 \\ \qquad\qquad + 30a^4b^6 + 15a^2b^8 + 6b^8)c^{-15} \\ \quad + a^4b^2(7a^{10} + 21a^8b^2 + 75a^6b^4 + 35a^4b^6 \\ \qquad + 14\tfrac{1}{2}a^6b^6 + 35a^4b^8 + 75a^2b^7 \\ \qquad\qquad + 21a^2b^8 + 7b^{10})c^{-17} \\ \quad + a^4b^2(8a^{12} + 28a^{10}b^2 + 154a^8b^4 + 56a^6b^6 \\ \qquad + 446a^6b^6 + 102a^6b^6 + 44\tfrac{1}{2}a^4b^7 \\ \qquad + 56a^4b^8 + 154a^2b^9 + 28a^2b^{10} + 8b^{12})c^{-19} \\ \quad + a^4b^2(9a^{14} + 36a^{12}b^2 + 280a^{10}b^4 + 84a^{10}b^6 \\ \qquad + 1107a^8b^6 + 318a^8b^6 + 1668a^6b^7 \\ \qquad + 318a^6b^8 + 1107a^4b^9 + 84a^4b^{10} \\ \qquad + 280a^2b^{11} + 36a^2b^{12} + 9b^{14})c^{-21}, \end{array}\right.$$

$$
(43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
n = {} & b^{-1} - a^2c^{-1} - a^3c^{-2} - a^7c^{-5} - (a^7 + \tfrac{1}{4}b^7)a^5c^{-10} \\
& -(a^8 + 12a^5b^3 + 9b^8)a^6c^{-12} \\
& -(a^7 + 25a^4b^3 + 36a^2b^5 + 16b^7)a^6c^{-14} \\
& -(a^9 + 44a^6b^3 + 96a^4b^5 + 16a^2b^6 \\
& \qquad + 80a^2b^7 + 25b^9)a^6c^{-16} \\
& -(a^{11} + 78a^8b^3 + 210a^6b^5 + 84a^4b^6 \\
& \quad + 260a^4b^7 + 72a^2b^8 + 150a^2b^9 + 36b^{11})a^6c^{-18} \\
& -(a^{13} + 104a^{10}b^3 + 406a^8b^5 + 272a^7b^6 \\
& \quad + 680a^6b^7 + 468a^5b^8 + 575a^4b^9 \\
& \quad + 209a^3b^{10} + 252a^2b^{11} + 49b^{13})a^6c^{-20} \\
& -(a^{15} + 147a^{12}b^3 + 720a^{10}b^5 + 693a^9b^6 \\
& \quad + 1548a^8b^7 + 1836a^7b^8 + 1814a^6b^9 \\
& \quad + 1640a^5b^{10} + 1113a^4b^{11} + 488a^3b^{12} \\
& \qquad + 392a^2b^{13} + 64b^{15})a^6c^{-22}.
\end{aligned}
\right.
$$

La valeur de l peut se déduire de celle de n en échangeant entre eux a et b.

L'énergie potentielle du système est, d'après le § 87,

$$(44)\qquad W = \tfrac{1}{2}lA^2 + mAB + \tfrac{1}{2}nB^2,$$

et la répulsion qui s'exerce entre les deux sphères est, d'après le § 93 *a*,

$$(45)\qquad -\frac{\partial W}{\partial c} = \tfrac{1}{2}A^2\frac{\partial l}{\partial c} + AB\frac{\partial m}{\partial c} + \tfrac{1}{2}B^2\frac{\partial n}{\partial c}.$$

La densité superficielle, en un point quelconque de chacune des deux sphères, est donnée par les équations (1) et (4) en fonction des coefficients A_n et B_n.

NOTE

SUR LES SPHÉRIQUES HARMONIQUES;

PAR M. POTIER.

Le lecteur déjà familier avec la théorie des coefficients de Laplace, ou des fonctions harmoniques sphériques, n'aura aucune peine à suivre le Chapitre IX, mais s'il rencontre ces fonctions pour la première fois, on peut craindre qu'il ne croie leurs propriétés liées à l'existence des points singuliers où le potentiel devient infini, conception abstraite qui n'est justifiée que par la concision plus grande qu'elle permet de donner au calcul; à cette difficulté s'ajoute celle provenant de l'emploi de coordonnées imaginaires, et la superposition de ces deux abstractions ne compense pas, pour une première exposition du sujet, la simplification de calculs qui en résulte. Il semble, au contraire, qu'il y ait avantage à se rapprocher du mode d'exposition de Laplace, qui, bien qu'un peu laborieux comme calcul, fait comprendre, dès le début, comment s'introduisent les fonctions, comment elles permettent de développer une fonction arbitraire des coordonnées géographiques sur la sphère, ce qui justifie amplement les calculs qui conduisent à leur expression développée; une fois ces premières notions (d'ailleurs suffisantes pour les applications) acquises, la lecture du Chapitre IX devient plus attachante, parce que l'esprit saisit mieux l'élégance des méthodes qui le mènent à un but déjà atteint plus péniblement.

1. Laplace a introduit dans l'analyse les fonctions Y, et le Livre III de la *Mécanique céleste* contient, au point de vue des applications à la Physique mathématique, tout ce qu'il est nécessaire de savoir sur ces fonctions.

Leur origine est la suivante : Si des masses distribuées autour d'un point O, qui sera pris comme origine, attirent un point M dont les coordonnées sont x, y, z, en coordonnées cartésiennes, ou r, θ, φ en coordonnées polaires (θ sera la colatitude), le potentiel des masses attirantes au point M pourra se développer en série ordonnée suivant les puissances négatives de r, si le point M est plus éloigné de l'origine qu'aucune des masses attirantes; en effet, la distance ρ du point M à une masse dont les coordonnées sont x', y', z', ou r', θ', φ' a pour valeur

$$\rho = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varepsilon)^{\frac{1}{2}},$$

en posant

$$\cos\varepsilon = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi);$$

si r' est plus petit que r, on écrira

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\varepsilon\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et cette expression se développera en série convergente suivant les puissances de $\frac{r'}{r}$; il en sera de même pour toutes les masses attirantes, et le potentiel V sera développé ainsi

$$V = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2} + \ldots + \frac{U_n}{r^{n+1}} + \ldots;$$

les numérateurs sont des fonctions algébriques entières des sinus et des cosinus de θ et de φ et ne contiennent pas r. Ce sont ces fonctions qu'on désigne sous le nom de fonctions *harmoniques sphériques de surface*, d'ordre 0, 1, 2, 3, ..., n.

Chacune des fonctions homogènes de degré $-(n+1)$ qui constitue V, doit satisfaire isolément à l'équation $\nabla^2 = 0$; équation qui, transformée en coordonnées polaires, devient

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu}\nu^2 \frac{\partial V}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0,$$

si l'on convient, pour abréger l'écriture, de poser $\cos\theta = \mu$, $\sin\theta = \nu$.

En exprimant que $U_n r^{-(n+1)}$ satisfait à cette équation, il vient

$$n(n+1)U_n + \frac{\partial}{\partial \mu}\nu^2 \frac{\partial U_n}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \qquad (2)$$

condition à laquelle doit satisfaire toute fonction U_n.

2. Nous désignerons par Y_n une fonction satisfaisant à cette équation, et entière en μ, ν, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$; on aura alors

$$\nabla^2 r^p Y_n = r^{p-2}\left[p(p+1)Y_n + \frac{\partial}{\partial \mu}\nu^2 \frac{\partial Y_n}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varphi^2}\right].$$

et cette expression sera nulle si $p(p+1) = n(n+1)$, c'est-à-dire si $p = n$, ou si $p = -(n+1)$; les fonctions $Y_n r^n$, $Y_n r^{-(n+1)}$ satisfont donc à la condition $\nabla^2 = 0$. De là résultent les propriétés remarquables de ces fonctions.

Considérons, en effet, une sphère de rayon a, et les deux expressions $\frac{Y_n a^n}{r^{n+1}}$, $\frac{Y_n r^n}{a^{n+1}}$; elles sont égales sur tous les points de la sphère, satisfont à la condition $\nabla^2 = 0$; la première est finie à l'extérieur de la sphère, la seconde à l'intérieur : donc, en vertu du théorème de Green, la fonction dont la valeur est

$$V_e = \frac{Y_n a^n}{r^{n+1}} \text{ à l'extérieur}$$

et

$$V_i = \frac{Y_n r^n}{a^{n+1}} \text{ à l'intérieur}$$

est le potentiel dû à une distribution d'électricité à la surface de la sphère, dont

la densité en un point $(\theta'\varphi')$ est donnée par

$$4\pi\delta = \left(-\frac{\partial V_e}{\partial \nu} - \frac{\partial V_i}{\partial \nu_i}\right)_a,$$

si $d\nu$ et $d\nu_i$ sont les normales extérieures et intérieures, en attribuant aux dérivées les valeurs qu'elles ont au point a, θ', φ'; or on a

$$\frac{dV_e}{d\nu} = \frac{\partial V_e}{\partial r} = -(n+1)\,Y_n \frac{a^n}{r^{n+2}}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \nu_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = -n\,Y_n \frac{r^{n-1}}{a^{n-1}},$$

sur la sphère $r = a$, et, si l'on désigne par Y'_n la valeur de Y_n au point $\theta'\varphi'$, on aura

$$4\pi a^2\delta = (2n+1)\,Y'_n,$$

et réciproquement une distribution à la surface de la sphère, dans laquelle la densité serait $\frac{(2n+1)\,Y_n}{4\pi a^2}$, produira à l'extérieur le potentiel $\frac{Y_n a^n}{r^{n+1}}$, à l'intérieur le potentiel $\frac{Y_n r^n}{a^{n-1}}$.

Toute fonction Y_n satisfaisant à (2), entière en μ, ν, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ est donc une fonction U_n.

3. Considérons maintenant une distribution *arbitraire* $f(\theta', \varphi')$ à la surface de la sphère du rayon a, elle produit un potentiel qui pourra être développé à l'extérieur suivant la série

$$V_e = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_1 a}{r^2} + \ldots + \frac{Y_n a^n}{r^{n+1}}$$

et à l'intérieur suivant la série

$$V_i = \frac{Y_0}{a} + \frac{Y_1 r}{a^2} + \ldots + \frac{Y_n r^n}{a^{n+1}}.$$

Connaissant les potentiels intérieurs et extérieurs, un raisonnement calqué sur le précédent donne

$$4\pi a^2 f(\theta'\varphi') = Y'_0 + 3Y'_1 + \ldots + (2n+1)\,Y'_n + \ldots. \tag{3}$$

Donc une fonction quelconque (uniforme et finie) des coordonnées géographiques sur la sphère pourra toujours être développée en une somme d'harmoniques.

Ce développement de f n'est possible que d'une seule manière; car, si l'on avait

$$4\pi a^2 f = Y'_0 + 3Y'_1 + \ldots + (2n+1)\,Y'_n + \ldots,$$

$Y', Y'_1, \ldots$ étant d'autres fonctions harmoniques, il faudrait que le potentiel dû à f fût, en un point quelconque,

$$\frac{Y_0}{r} + \frac{Y_1 a}{r^2} + \ldots,$$

qui ne peut être identique à V que si $Y_1 = Y'_1$, $Y_2 = Y'_2, \ldots$.

4. Ayant ainsi montré l'intérêt qui s'attache à l'étude des fonctions Y_i il faut examiner comment elles sont constituées. Soit toujours f la densité en un point θ', φ' de la surface de la sphère, le potentiel dû à la charge $f\,dS$ d'un élément

de cette surface, au point r, θ, φ, est

$$\frac{\int dS}{\rho}$$

où

$$\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)].$$

On a donc

$$\rho^{-1} = r^{-1}\left\{1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}[\mu\mu' + w'\cos(\varphi' - \varphi)]\right\}^{-\frac{1}{2}};$$

en développant cette série, Laplace montre que le coefficient de $\frac{a^n}{r^{n+1}}$ est de la forme

$$\Omega_n = A_n^0 + A_n^1\cos(\varphi' - \varphi) + \ldots + A_n^n\cos n(\varphi' - \varphi)$$

et que le coefficient A_n^σ de $\cos\sigma(\varphi' - \varphi)$ est lui-même de la forme

$$C_n^\sigma \Theta_n^\sigma(\mu)\Theta_n^\sigma(\mu').$$

C'est le produit d'une constante numérique par une fonction de μ, et la même fonction de μ'. On le démontrera plus bas quand on aura montré l'usage de ces fonctions.

Le potentiel de l'élément est donc

$$f\,dS\left[\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{r^{n+1}}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=n} C_n^\sigma \Theta_n^\sigma(\mu)\Theta_n^\sigma(\mu')\cos\sigma(\varphi' - \varphi)\right],$$

et le potentiel dû à la distribution f sur toute la sphère sera, au point (r, μ, φ),

$$V = \frac{1}{r}\iint f\,dS + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a^n}{r^{n+1}}\sum_{\sigma=0}^{\sigma=n} C_n^\sigma \Theta_n^\sigma(\mu)$$
$$\times\left[\cos\sigma\varphi\iint f\,dS\,\Theta_n^\sigma(\mu')\cos\sigma\varphi' + \sin\sigma\varphi\iint f\Theta_n^\sigma(\mu')\sin\sigma\varphi'\,dS\right],$$

c'est cette expression qu'on a représentée par $\frac{Y_0}{r} + \frac{Y_1 a}{r^2} + \ldots + \frac{Y_n a^n}{r^{n+1}}$.

La fonction Y_n est donc nécessairement, en représentant par M, M_1, N, N_1 des constantes,

$$M_0\Theta_0^n(\mu) + M_1\Theta_1^n(\mu)\cos\varphi + M_2\Theta_2^n(\mu)\cos 2\varphi + \ldots + M_n\Theta_n^n(\mu)\cos n\varphi$$
$$+ N_1\Theta_1^n(\mu)\sin\varphi + \ldots\ldots\ldots\ldots + N_n\Theta_n^n(\mu)\sin n\varphi.$$

L'expression générale comprend $2n+1$ constantes arbitraires, et l'on a en même temps la valeur de f, en vertu de l'équation (3),

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi a^2 f = \iint f\,dS + \sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\sum_{\sigma=0}^{\sigma=n} C_n^\sigma\left[\iint dS\,f\Theta_n^\sigma(\mu')\cos\sigma\varphi'\right] \\ \times\Theta_n^\sigma(\mu)\cos\sigma\varphi, \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty}(2n+1)\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} C_n^\sigma\left[\iint dS\,f\Theta_n^\sigma(\mu')\sin\sigma\varphi'\right] \\ \times\Theta_n^\sigma(\mu)\sin\sigma\varphi. \end{aligned}\right.$$

Ainsi f a été développé en une série, dont le terme général est

$$M\Theta_\sigma^n \cos\sigma\varphi + N\theta_\sigma^n \sin\sigma\varphi);$$

le coefficient de chaque terme s'obtient en intégrant dans toute l'étendue de la sphère de rayon a le produit de $f dS C_\sigma^n \Theta_\sigma^n(\mu')$ par $\cos\sigma\varphi$ ou $\sin\sigma\varphi$, proposition analogue à celle qui conduit à la célèbre série de Fourier.

Les fonctions Ω_n sont par définition des harmoniques sphériques d'ordre n et satisfont à l'équation (2); il en est de même des fonctions $\Theta_n^\sigma \cos\sigma\varphi$ et $\Theta_n^\sigma \sin\sigma\varphi$, individuellement; il suffit, pour s'en assurer, de remplacer Ω par son développement dans l'équation (2) et d'exprimer qu'elle est vérifiée, quelle que soit la valeur de φ.

On est donc arrivé à trouver $(2n+1)$ harmoniques, d'ordre n, indépendantes, telles que toute harmonique de même ordre en est une combinaison linéaire, et l'on a réalisé le développement d'une fonction arbitraire, en séries d'harmoniques d'ordre n croissant.

Maxwell nomme σ le type des harmoniques $\Theta_n^\sigma \cos\sigma\varphi$, $\Theta_n^\sigma \sin\sigma\varphi$. On remarquera que a^2 disparaît en réalité dans le développement ci-dessus; car l'élément $dS = a^2 d\mu\, d\theta$. On peut donc diviser les deux membres par a^2, à condition de remplacer l'intégration sur la surface de la sphère par

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\mu.$$

5. Le développement de f met en évidence une propriété des fonctions Θ. Puisque f est arbitraire, on peut prendre $f = Y_n$; et, puisque le développement de f en harmoniques n'est possible que d'une seule manière, tous les termes du second membre, qui ne sont pas des harmoniques d'ordre n, doivent s'annuler; on a donc

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_n \Theta_\sigma^m \cos\sigma\varphi \text{ (ou } \sin\sigma\varphi) = 0,$$

dès que m et n sont différents, ou comme un Y_m quelconque est une fonction linéaire des Θ^m,

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_n Y_m = 0, \tag{5}$$

relation que Laplace déduit de l'équation différentielle (2); on voit, en effet, que, si l'on écrit successivement que Y_m, Y_n satisfont à cette équation, il viendra

$$[n(n+1) - m(m+1)]\, Y_m Y_n = \frac{\partial}{\partial\mu}\nu^2\left(Y_m \frac{\partial Y_n}{\partial\mu} - Y_n \frac{\partial Y_m}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(Y_m \frac{\partial Y_n}{\partial\varphi} - Y_n \frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\right);$$

d'où résulte l'équation (5), puisque ν s'annule aux deux limites, et que les fonctions Y ont la même valeur pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

Si l'on particularise davantage, et qu'on pose $f = \Theta_\sigma^m \cos\sigma\varphi$, il viendra

$$\tfrac{1}{2}\pi\Theta_\sigma^m \cos\sigma\varphi = (2n+1)\, C_s^n \Theta_\sigma^m \cos\sigma\varphi \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi\, [\Theta_\sigma^m]^2 \cos^2\sigma\varphi,$$

tous les autres termes disparaissant en effectuant l'intégration par rapport à φ, et observant que $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\sigma\varphi = \pi$, il reste

$$\frac{1}{2n+1} = C_n^\sigma \int_{-1}^{+1} [\Theta_n^\sigma]^2 d\mu,$$

à moins que l'on n'ait $\sigma = 0$, alors $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, et il vient

$$\frac{2}{2n+1} = C_0^n \int_{-1}^{+1} [\Theta_0^n]^2 d\mu.$$

6. Il y a donc lieu d'étudier le développement de

$$\rho^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\cos\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}},$$

qui donne

$$\rho^{-1} = \frac{1}{r} + \frac{Q_1 a}{r^2} + \ldots + Q_n \frac{a^n}{r^{n+1}},$$

où Q_n est un polynôme entier en $\cos\varepsilon$; substituant ensuite à $\cos\varepsilon$ sa valeur $\mu\mu' + \nu\nu'\cos(\varphi' - \varphi)$, il est aisé de voir que le terme en $\cos\sigma(\varphi' - \varphi)$ dans ce polynôme ne peut provenir que des termes de Q_n qui renferment $\cos\varepsilon$ à la puissance σ ou à une puissance plus élevée, et comme $\nu\nu'$ accompagne toujours $\cos(\varphi' - \varphi)$, le coefficient $-A_n^\sigma$ contient en facteur le produit $(\nu\nu')^\sigma$; on peut donc poser

$$A_n^\sigma = (\nu\nu')^\sigma R,$$

R étant un polynôme entier en μ de degré $(n - \sigma)$; on posera donc

$$A_n^\sigma = \gamma\nu^\sigma(\mu^{n-\sigma} + B\mu^{n-\sigma-1} + \ldots),$$

et l'on exprimera que cette expression satisfait à l'équation différentielle (2); on en déduit, pour le polynôme entre parenthèses,

$$\Theta_n^\sigma = \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2.2n-1}\mu^{n-\sigma-2} + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4} \ldots\right].$$

D'ailleurs A_n est symétrique en μ et μ'; il est donc nécessairement

$$C_n^\sigma \Theta_n^\sigma(\mu)\Theta_n^\sigma(\mu'),$$

en désignant par C_n^σ une constante numérique.

Pour déterminer cette constante, il faut faire $\mu = \mu' = 0$, $\nu = \nu' = 1$; A_n^σ doit se réduire alors au coefficient de $\cos\sigma(\varphi - \varphi')$ dans le terme de $a^n r^{n-1}$ du développement de $\rho^{-1} = r^{-1}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\cos(\varphi - \varphi')\right]^{-\frac{1}{2}}$; or la parenthèse est le pro-

duit des deux facteurs

$$\left(1-\frac{a}{r}e^{(\varphi-\varphi')i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{a}{r}e^{(\varphi-\varphi')i}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2j-1}{2}}{1.2.3\ldots j}\left(\frac{a}{r}e^{(\varphi-\varphi')i}\right)^{j}+\ldots,$$

$$\left(1-\frac{a}{r}e^{-(\varphi-\varphi')i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{a}{r}e^{-(\varphi-\varphi')i}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2j-1}{j}\left(\frac{a}{r}e^{-(\varphi-\varphi')i}\right)^{j}+\ldots;$$

en multipliant ces deux séries entre elles et par r^{-1}, on trouve, pour le coefficient de $a^n r^{-(n+1)}$,

$$2\times\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n.1.2.3\ldots n}\cos n(\varphi'-\varphi)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{2^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1)}\cos(n-2)(\varphi'-\varphi)+\ldots,$$

et pour le coefficient de $\cos\sigma(\varphi'-\varphi)$, quand $n-\sigma$ est pair,

$$2\times\frac{1.3.5\ldots(n+\sigma-1)}{2.4.6\ldots(n+\sigma)}\cdot\frac{1.3.5\ldots(n-\sigma-1)}{2.4.6\ldots(n-\sigma)},$$

et zéro quand il est impair; on a donc

$$2\times\frac{1.3.5\ldots(n+\sigma-1)}{2.4.6\ldots(n+\sigma)}\cdot\frac{1.3.5\ldots(n-\sigma-1)}{2.4.6\ldots(n-\sigma)}=C_n^{\sigma}\left[\Theta_n^{\sigma}(o)\right]^2$$

et, comme

$$\Theta_n^{\sigma}(o)=\frac{n-\sigma!}{2.4\ldots(n-\sigma)(2n-1)(2n-3)\ldots(n+\sigma+1)}$$
$$=\frac{1.3.5\ldots(n+\sigma-1).1.3.5\ldots(n-\sigma-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

aussi, quand $(n-\sigma)$ est pair, il vient

$$C_n^{\sigma}=2\times\left[\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{n!}\right]^2\frac{n(n-1)\ldots(n-\sigma+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\sigma)}$$
$$=2\times\frac{(1.3.5\ldots 2n-1)^2}{n-\sigma!\,n+\sigma!};$$

cependant, si $\sigma=o$, il ne faut prendre que la moitié de ce coefficient

$$C_n^{o}=\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\right]^2,$$

Dans le cas où $(n-\sigma)$ est impair, cette méthode donne, pour C_n, $\frac{2}{o}$; mais on lèvera l'indétermination ainsi : on prend, dans le produit $\Theta(\mu)\Theta(\mu')$, le coefficient de $\mu\mu'$, qui, dans ce cas, est

$$\left[\Theta'(o)\right]^2\left[\frac{1.3.5\ldots(n-\sigma)(1.3.5\ldots(n+\sigma)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2,$$

et, après l'avoir multiplié par C_n, on l'égale au coefficient de $\mu\mu'\cos\sigma(\varphi-\varphi')$ dans le développement de ρ^{-1}, coefficient qu'on obtient en remarquant qu'il est le coefficient de $a^n r^{-(n+1)}\cos\sigma(\varphi'-\varphi)$ dans le développement de $\frac{d(\rho^{-1})}{d(\mu\mu')}$ pour $\mu\mu'=o$ ou dans $ar^{-2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}-\frac{2a}{r}\cos(\varphi-\varphi')\right]^{-\frac{3}{2}}$. Ce développement est obtenu,

comme ci-dessus, en multipliant $\left[1-\frac{a}{r}e^{i(\varphi-\varphi')}\right]^{-\frac{3}{2}}$ par $\left[1-\frac{a}{r}e^{-i(\varphi-\varphi')}\right]^{-\frac{3}{2}}$, et l'on retombe sur la même valeur pour C_n^σ et C_n^0.

On a, en effet,

$$\left(1-\frac{r}{a}e^{i(\varphi-\varphi')}\right)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}\frac{r}{a}e^{i(\varphi-\varphi')}+\ldots+\frac{3.5.7\ldots 2j+1}{2.4.6\ldots 2j}\left(\frac{a}{r}e^{i(\varphi-\varphi')}\right)^j,$$

$$\left(1-\frac{r}{a}e^{-i(\varphi-\varphi')}\right)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}\frac{r}{a}e^{i(\varphi-\varphi')}+\ldots+\frac{3.5.7\ldots 2j+1}{2.4.6\ldots 2j}\left(\frac{a}{r}e^{-i(\varphi-\varphi')}\right)^j.$$

Multipliant ces deux séries entre elles et par ar^{n-2}, on trouve pour le coefficient de $a^n r^{-(n+1)}$ dans le produit, ou pour coefficient de $a^{n-1}r^{-(n-1)}$ dans le produit des séries,

$$2\times\frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cos(n-1)(\varphi-\varphi')+2\times\frac{3.5.7\ldots 2n-3}{2.4.6\ldots 2n-4}$$
$$=\frac{3}{2}\cos(n-3)(\varphi-\varphi')+\ldots$$

et pour le coefficient de $\cos\sigma(\varphi'-\varphi)$ pour $(n-\sigma)$ impair

$$2\times\frac{3.5.7\ldots(n+\sigma)}{2.4.6\ldots(n+\sigma-1)}\cdot\frac{3.5.7\ldots(n-\sigma)}{2.4.6\ldots(n-\sigma-1)}=C_n^\sigma[\Theta'(0)]^2,$$

d'où, pour C_n^σ, la valeur

$$C_n^\sigma=2\times\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.3.5(n-\sigma)\times 1.3\ldots(n+\sigma)}\right]^2\frac{1.3\ldots(n+\sigma)\times 1.3\ldots(n-\sigma)}{2.4\ldots(n+\sigma-1)\times 2.4\ldots(n-\sigma-1)}$$
$$=2\times\frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{n+\sigma!\,n-\sigma!},$$

comme plus haut.

Il est bon de remarquer que si l'on fait $\mu=\mu'=1$, $\nu=\nu'=0$, le développement de ρ^{-1} se réduit à $\Sigma A_n^0 a^n r^{-(n+1)}$, ou à $\Sigma C_n^0[\Theta_n^0(1)]^2$; or, dans ce cas,

$$\rho^{-1}=(r-a)^{-1}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}\cdots\right);$$

on a donc

$$C_n^0[\Theta_n^0(1)]^2=1,$$

d'où

$$\Theta_n^0(1)=\frac{n!}{1.3\ldots(2n-1)}.$$

Le développement de $\rho^{-1}=[r^2+a^2-2ar(\mu\mu'+\nu\nu'\cos\varphi-\varphi')]^{-\frac{1}{2}}$ est donc entièrement connu, et, par suite, tous les éléments de la formule (4) sont déterminés.

7. Depuis Laplace, d'autres procédés ont été indiqués pour parvenir plus rapidement aux harmoniques d'ordre n; le produit $Y_n r^{-(n+1)}$ est le quotient d'une fonction homogène des coordonnées x, y, z par r^{2n+1}, et satisfait à l'équation $\nabla^2=0$; or la fonction $\frac{1}{r}$ et toutes ses dérivées y satisfont aussi; et il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}\cdot\frac{1}{r}\quad\text{si}\quad\alpha+\beta+\gamma=n$$

est bien le quotient d'une fonction homogène de degré n par r^{2n+1}; par suite

$$(6) \qquad r^{n+1}\frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\cdot\frac{1}{r}$$

est une fonction harmonique d'ordre n, et il en est de même d'une combinaison linéaire quelconque de ces dérivées. En particulier

$$r^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r},\ \ldots,\ r^{n+1}\frac{\partial}{\partial z^n}\frac{1}{r}$$

sont des harmoniques du type zéro, des divers ordres; car, si, après les différentiations, on remplace z par μr, on aura des fonctions de μ seul.

On préfère prendre pour valeur de la fonction type

$$\frac{r^2}{1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = P_1,\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n!}r^{n+1}\frac{\partial}{\partial z^n}\frac{1}{r} = P_n,$$

pour la raison suivante : si l'on développe $\rho^{-1} = [x^2+y^2+(z^2-a^2)]^{-\frac{1}{2}}$, qui représente l'inverse de la distance au point x, y, z du point situé sur l'axe des z à la distance a, au moyen de la série de Taylor, on a

$$\rho^{-1} = \frac{1}{r} - a\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{r}\right)_0 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial a^n}\frac{1}{r}\right)_0 + \ldots,$$

l'indice zéro indiquant qu'il faut faire $a = 0$ après la différentiation; mais on a

$$\frac{\partial}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

et, en général,

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} = (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial z^n},$$

de sorte que l'on peut toujours écrire

$$\rho^{-1} = \frac{1}{r} + a\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r} = \ldots = \frac{1}{r}\left(1 - P_1\frac{a}{r} + \ldots \pm P_n\frac{a^n}{r^n}\right),$$

quand a est $< r$.

Les fonctions P_n, ainsi obtenues, sont donc identiques à $C_n^0\Theta_n^0(1)\Theta_n^0(\mu)$, ce qu'il est aisé de vérifier; ce sont les harmoniques zonaux. Voici les valeurs des premiers

$$-P_1 = \mu, \qquad -1.2.3\,P_3 = 15\mu^3 - 9\mu,$$
$$+1.2\,P_2 = 3\mu - 1, \quad +1.2.3.4\,P_4 = 105\mu^4 - 90\mu^2 + 9,$$

et, en général,

$$(-1)^n 1.2.3\ldots n\,P_n = 1.3.5\ldots(2n-1)\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} + \ldots\right].$$

Ces harmoniques zonaux sont de beaucoup les plus utiles dans les applications.

8. Pour représenter par des symboles analogues les autres harmoniques en $\cos\varpi$ et $\sin\varpi$, on remarquera que toute combinaison linéaire, réelle ou imagi-

naire, des différentielles telles que (6) est une harmonique de même ordre; par suite, si Z est une harmonique,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + i\frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - i\frac{\partial Z}{\partial y}$$

sont des harmoniques aussi; ou bien, si l'on exprime Z au moyen des coordonnées imaginaires $\xi = x + yi$, $\eta = x - yi$, les dérivées

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial Z}{\partial \eta_1}$$

seront encore des harmoniques; par conséquent, les expressions suivantes

$$r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\xi\,\partial z^{n-1}}\frac{1}{r}, \quad r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\xi^2\,\partial z^{n-2}}\frac{1}{r}\cdots\quad r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\frac{1}{r},$$
$$r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\eta_1\partial z^{n-1}}\frac{1}{r}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial\eta_1^n}\frac{1}{r}$$

sont des harmoniques; mais $r^2 = \xi\eta + z^2$, par suite

$$\frac{d^\sigma}{d\xi^\sigma}\frac{1}{r} = (-1)^\sigma.1.3.5\ldots(2\sigma-1)\frac{\eta_1^\sigma}{r^{2\sigma+1}},$$

et ces harmoniques deviennent, au facteur r^{n+1} près,

$$-\eta\frac{\partial}{\partial z^{n-1}}\frac{1}{r^3}\cdots(-\eta_1)^\sigma.1.3.5\ldots(2\sigma-1)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^{\sigma+1}}\cdots(-\eta_1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{r^{2n+1}},$$
$$-\xi\frac{\partial}{\partial z^{n-1}}\frac{1}{r^3}\cdots(-\xi)^\sigma.1.3.5\ldots(2\sigma-1)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^{\sigma+1}}\cdots(-\xi)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{r^{2n+1}}.$$

En ajoutant deux harmoniques situés sur la même colonne, ou en retranchant et divisant par $i = \sqrt{-1}$, il viendra, en observant que $\xi = rve^{i\varphi}$, $\eta_1 = rve^{-i\varphi}$,

$$-2rv\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z^{n-1}}\frac{1}{r^3},\ 2\cos\sigma\varphi(-rv)^\sigma.1.3.5.(2\sigma-1)\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\sin n\varphi(-vr)^n\frac{1.3.5\ldots2n-1}{r^{2n+1}},$$
$$-2rv\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z^{n-1}}\frac{1}{r^3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 2\cos n\varphi(-vr)^n\frac{1.3.5\ldots2n-1}{r^{2n+1}}.$$

Par analogie avec ce qu'on a fait pour les harmoniques zonaux, on prendra pour valeur des harmoniques d'ordre n et de type σ les deux fonctions

$$Y_n^{(\sigma)}c = (-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}2\cos\sigma\varphi(-rv)^\sigma.1.3.5\ldots(2\sigma-1)\frac{\partial^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\cdot\frac{1}{r^{2\sigma+1}}$$

et

$$Y_n^{(\sigma)}s = (-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}2\sin s\varphi(-rv)^\sigma.1.3.5\ldots(2\sigma-1)\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\cdot\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

ou, plus simplement, on pourra écrire comme facteur de $\sin\sigma\varphi$ et $\cos\sigma\varphi$ dans les deux $Y_n^{(\sigma)}$

$$\frac{r^{n+\sigma+1}2^\sigma!}{n!\,\sigma!\,2^\sigma}\frac{\partial}{\partial z^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

Les valeurs de ces Y résultent des équations

$$Y_n^{(\sigma)}c + iY_n^{\sigma}s = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{d^{n-\sigma}}{dx^{\sigma}\,dz^{n-\sigma}}\frac{1}{r},$$

$$Y_n^{(\sigma)}c - iY_n^{\sigma}s = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\gamma_1^{\sigma}\,\partial z^{n-\sigma}}\frac{1}{r},$$

analogues à celle que donne P_n.

Ces fonctions ne peuvent différer que par un facteur constant de $\Theta_n^{(\sigma)}\cos\sigma\varphi$; en effet on trouve facilement

$$r^{n-\sigma+1}\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\cdot\frac{1}{r^{2\sigma-1}} = (-1)^{n-\sigma}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(2\sigma-1)}\Theta_n^{\sigma}.$$

On pourra, sous cette forme, vérifier par les principes généraux de la théorie des équations que $\Theta_n^{(\sigma)}$ s'annule pour $(n-\sigma)$ valeurs réelles de μ, entre -1 et $+1$, et qu'ainsi l'harmonique $Y_n^{(\sigma)}\sin\sigma\varphi$, ou $\cos\sigma\varphi$, s'annule sur σ méridiens et sur n parallèles, d'où le nom de *tesséraux* donné à ces harmoniques.

9. Lorsque h est une direction faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont α, β, γ, on entend par le symbole $\frac{\partial V}{\partial h}$ l'expression $\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}$; différentiant de nouveau, par rapport à une direction h', on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial h'} = \alpha\alpha'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\beta\beta'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\gamma\gamma'\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+(\alpha\gamma'+\alpha'\gamma)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+(\beta\gamma'+\beta'\gamma)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z},$$

qu'on écrira symboliquement

$$\frac{\partial^2}{\partial h\,\partial h'} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\alpha'\frac{\partial}{\partial x}+\beta'\frac{\partial}{\partial y}+\gamma'\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

en convenant de remplacer, dans le produit, les facteurs $\frac{\partial}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, ...

Cette équation se généralise immédiatement pour n différentiations successives et l'on a

$$\frac{\partial^n}{\partial h_1.\partial h_2.\partial h_3\ldots\partial h_n} = \left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(\alpha_n\frac{\partial}{\partial x}+\beta_n\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_n\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Toute expression de cette forme est donc une combinaison linéaire des dérivées de la forme $\frac{\partial^n}{\partial x^m\,\partial y^{m'}\,\partial z^{m''}}$, quand $m+m'+m''=n$; mais, quand on opère sur une fonction V satisfaisant à l'équation $\nabla^2 V = 0$, ces dérivées sont elles-mêmes des fonctions linéaires de $(2n+1)$ d'entre elles : par exemple, de

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n},\quad \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\,\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^n}{\partial x\,\partial y^{n-1}},\quad \frac{\partial^n x}{\partial y^n},$$

et de

$$\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}},\quad \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-2}\,\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}},$$

auxquelles on peut ramener toutes les autres de même ordre, puisque

$$\frac{\partial}{\partial s^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right),$$

ce qui permet de réduire l'exposant de ∂s à 0, ou 1.

Si l'on suppose que p de ces directions h, h', ... soient dans le plan des xy, l'expression

$$\frac{\partial^p}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_p} = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) + \dots + \left(\alpha_p \frac{\partial}{\partial x} + \beta_p \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

devient

$$A_0 \frac{\partial^p}{\partial x^p} + A_1 \frac{\partial^p}{\partial x^{p-1}} + \dots + A_d \frac{\partial^p}{\partial y^p},$$

si le polynôme $A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + \dots + A_p y^p = (\alpha_1 x + \beta_1 y) \dots (\alpha_p x + \beta_p y)$

Les polynômes

$$H = \frac{1}{2}(\xi^\sigma + \eta^\sigma) = x^\sigma - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} x^{\sigma-2} y^2 + \dots,$$

$$H_1 = \frac{1}{2i}(\xi^\sigma - \eta^\sigma) = \sigma x^{\sigma-1} y - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3} x^{\sigma-3} y^3 + \dots$$

présentent à cet égard un intérêt particulier.

On a, en effet,

$$\xi^\sigma - \eta^\sigma = \left(\xi - e^{\frac{\pi i}{\sigma}} \eta\right) \dots \left(\xi - e^{\frac{(2j+1)\pi i}{\sigma}} \eta\right) \dots \left(\xi - e^{\frac{2\sigma-1}{\sigma}\pi i} \eta\right),$$

$$\xi^\sigma - \eta^\sigma = \left(\xi - \eta\right) \dots \left(\xi - e^{\frac{2\pi j i}{\sigma}} \eta\right) \dots \left(\xi - e^{\frac{2\pi(\sigma-1)i}{\sigma}} \eta\right);$$

mais

$$\xi - e^{\frac{2j+1}{\sigma}\pi i} \eta = 2 e^{-\frac{2j+1}{2\sigma}\pi i} i \left[-x \sin\frac{(2j+1)\pi}{\sigma} + y \cos\frac{(2j+1)\pi}{\sigma}\right],$$

et, par suite,

$$\xi^\sigma - \eta^\sigma = 2^\sigma \prod_{j=0}^{j=\sigma-1} \left[x \sin\frac{(2j+1)\pi}{\sigma} - y \cos\frac{(2j+1)\pi}{\sigma}\right],$$

et, de même,

$$\xi^\sigma - \eta^\sigma = 2^\sigma i \prod_{j=0}^{j=\sigma-1} \left[2 \sin\frac{j\pi}{\sigma} - y \cos\frac{j\pi}{\sigma}\right].$$

Par conséquent, les opérations

$$\frac{1}{2^{\sigma-1}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma-2}} \frac{\partial}{\partial y^2} \dots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} + \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right)$$

et

$$\frac{1}{2^{\sigma-1}}\left(\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^{\sigma-1} \partial y} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3} \frac{\partial^\sigma}{\partial x^{\sigma-3} \partial y^3} \dots\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} - \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right)$$

sont le résultat de la différentiation par rapport à σ axes, faisant entre eux l'angle $\frac{\pi}{\sigma}$, et tels, dans le premier cas, que l'axe des y soit l'un de ces axes, et dans le second qu'il soit le bissecteur de l'angle formé par deux axes consécutifs, propriété énoncée par Maxwell, § 140.

EXPLICATION DES PLANCHES.

9. Ces résultats se voient bien sur les *Pl. VI* et suivantes :

La *Pl. VI* représente l'harmonique du troisième ordre et de type 1, l'axe des z est perpendiculaire au plan du papier, l'axe des x ou $\varphi = 0$ est vertical. Les lignes ponctuées sont les projections orthogonales des parallèles, et du méridien pour lequel l'harmonique s'annule; les courbes en traits pleins sont des courbes le long desquelles la fonction $Y_3^{(1)} s = 5 \sin\varphi(\mu^2 - \frac{1}{5})\nu$ est constante et égale à $\pm 1, 2, 3, 4, 5$ et 6.

Dans la *Pl. VIII*, l'axe des z est horizontal dans le plan du papier et la fonction $Y_4^2 = \frac{3}{2}\frac{5}{2}(\mu^3 - \frac{1}{7})\nu^2 \sin 2\varphi$, le plan des xz est à 45° du papier; les courbes en traits pleins indiquent les points pour lesquels la fonction est $\pm 0{,}05$, $0{,}10$, $0{,}15$, ...

Les *Pl. VII* et *IX* représentent des harmoniques non tesséraux. Maxwell explique clairement leur construction. Pour la première, il faut considérer un harmonique zonal $\frac{1}{6}(15\mu^3 - 9\mu)$, dans lequel μ est le cosinus de la distance angulaire à un pôle situé dans le plan du papier, sur la verticale, et un autre $\frac{1}{4}(15\mu^3 - 9\mu)$ perpendiculaire au papier. En prenant un nouvel ordre z horizontal, les axes des x et des y passant par les pôles primitifs, on obtient

$$\frac{1}{2}[5\nu^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) - 3\nu(\cos\varphi + \sin\varphi)]$$

pour l'harmonique représenté, qui se met facilement sous forme de sommes d'harmoniques du troisième ordre, du premier et du troisième type.

Les mêmes axes ont été pris pour la *Pl. IX*.

La Planche de la page 235 représente une sphère, sur laquelle la densité est représentée par l'harmonique du premier ordre $C\mu$, et change de signe à l'équateur. Ce potentiel intérieur est

$$\frac{1}{3}\pi r\mu \times C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}\pi r\mu \times C,$$

et la force $\frac{1}{3}\pi C$ y est constante et verticale; à l'extérieur le potentiel est

$$\frac{1}{3}\pi a^3 C \times \frac{\mu}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}\pi a^3 C \times \frac{z}{r^3};$$

les surfaces équipotentielles sont toutes fermées, leur prolongement serait tangent à l'axe des x à l'origine; en valeur absolue et suivant l'axe, le potentiel, nul au centre, croît jusqu'à la sphère, pour décroître ensuite, en raison inverse du carré de la distance au centre; sa valeur maximum est

$$\frac{1}{3}\pi C a.$$

La composante verticale de la force $-\frac{\partial V}{\partial z}$ est

$$-\frac{1}{3}\pi a^3 C\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right);$$

par suite, l'induction (*voir* les Notes précédentes) à travers un cercle extérieur à la sphère de rayon x, à la hauteur z, est

$$\frac{1}{3}\pi a^3 C \times \int_0^x 2\pi x\, dx\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) = 2\pi\frac{x^2}{r^3} \times \frac{1}{3}\pi a^3 C.$$

Les lignes de forces limitant les cercles à travers l'induction, $4\pi\Phi$, ont alors pour équation

$$\Phi = \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^3} \times \frac{5}{3}\pi a^3 C.$$

La partie (parasite) de ces courbes à l'intérieur de la sphère serait tangente à l'axe des z, et les distances auxquelles elles coupent normalement l'axe des x sont en raison inverse de Φ.

A l'intérieur, les lignes de forces sont verticales.

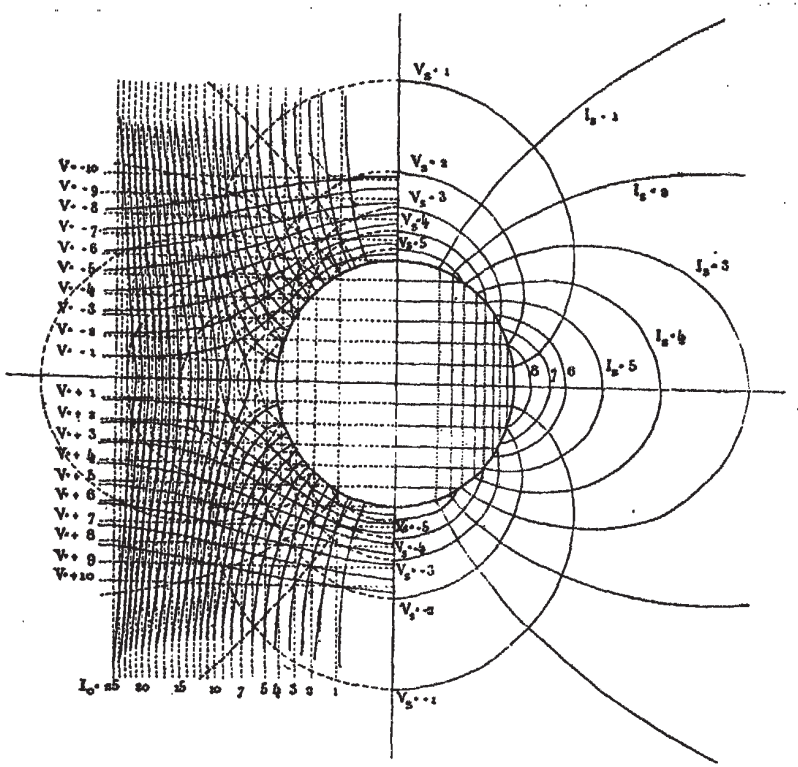
La figure correspond à des valeurs de Φ égales à 0, 0,5, 1, ..., $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, et à des valeurs de V croissant par degrés égaux à 0,5 de -3 à $+3$; si l'on suppose la constante $C = \frac{3}{2\pi}$ et qu'on prenne le rayon a de la sphère égal à 3 unités, dans la figure il est de $\frac{3}{4}$ de pouce anglais.

Dans la *Pl. V*, Maxwell ne s'est pas astreint à tracer les lignes de force suivant la règle du § 123; cette règle a été appliquée sur la *Pl. V bis* (partie droite); les lignes de force portent un numéro qui, multiplié par 4π, donne l'induction à travers une surface limitée par la surface de révolution engendrée par cette ligne; on remarquera : 1° la discontinuité des directions des lignes de force quand elles arrivent à la sphère; 2° la discontinuité de l'induction dans les mêmes circonstances; la composante normale à l'intérieur n'est que la moitié de la composante normale à l'extérieur de la sphère; par conséquent, si l'on considère une calotte sphérique, l'induction à l'extérieur sera double de ce qu'elle est à l'intérieur; on pourra vérifier encore que la composante tangentielle de la force est continue, à l'intérieur et à l'extérieur; par conséquent, l'angle de la ligne de force et de la normale à l'extérieur a une tangente moitié de l'angle intérieur correspondant.

Cette distribution des lignes de force, qui correspond, comme on le verra plus loin, au cas d'une sphère aimantée uniformément, permet d'étudier la déformation que subissent les lignes de force d'un champ électrique uniforme par la présence d'une sphère conductrice isolée; en effet, la distribution étudiée sur la sphère produit à son intérieur une force constante dirigée de haut en bas (en supposant la densité positive dans la moitié supérieure) et égale à 2; si donc on place cette sphère dans un champ électrique uniforme, où la force soit égale à 2, mais dirigée de bas en haut, la résultante sera nulle à l'intérieur; l'harmonique de premier ordre représente donc la distribution de l'électricité sur une sphère placée dans ce champ uniforme, et à l'extérieur, le potentiel et l'induction s'obtiendront en ajoutant le potentiel du champ $V_e = -2z$, et l'induction $2\pi x^2$ du champ sur un cercle de rayon x, au potentiel $V_i = \frac{z}{r^3}$, et à l'induction $I_i = \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^3}$, dus à la distribution sur la sphère; on a tracé en lignes ponctuées, sur la partie gauche de la figure, les horizontales équipotentielles de -10 à $+10$ (leur distance est la moitié de l'unité de longueur choisie) et les verticales limitant les cylindres pour lesquels l'induction est 4π, 8π, ..., ou pour lesquels la valeur de Φ est 1.2.3...; leur distance à l'axe est $\sqrt{2\Phi}$.

En appliquant les méthodes détaillées dans les Notes précédentes, on construit des points pour lesquels le potentiel total et l'induction totale ont les valeurs 0, 1, 2, 3. Les lignes de force, ainsi construites, sont bien normales à la sphère, et le numéro d'ordre de chacune donne la charge de la portion de la sphère qu'elle découpe.

Pl. V *bis*.


V₀ = 1
V₁ = 1
V₂ = 2
V₃ = 3
V₄ = 4
V₅ = 5
V₆ = 6
V₇ = 7
V₈ = 8
V₉ = 9
V₁₀ = 10
V₀ = 1
V₁ = 2
V₂ = 3
V₃ = 4
V₄ = 5
V₅ = 6
V₆ = 7
V₇ = 8
V₈ = 9
V₉ = 10
I₀ = 25 20 15 10 7 5 4 3 2 1
I₁ = 1
I₂ = 2
I₃ = 3
I₄ = 4
I₅ = 5
8 7 6

CHAPITRE X.

SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ HOMOFOCALES (¹).

147. Soit l'équation générale d'un système homofocal

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1, \tag{1}$$

où λ est un paramètre variable que nous affecterons d'un indice suivant l'espèce de surfaces considérées : ainsi nous prendrons λ_1 pour les hyperboloïdes à deux nappes, λ_2 pour les hyperboloïdes à une nappe, et λ_3 pour les ellipsoïdes. Supposons que l'ordre

$$a,\ \lambda_1,\ b,\ \lambda_2,\ c,\ \lambda_3,$$

soit celui des grandeurs croissantes de ces quantités. La quantité a est introduite pour la symétrie, mais dans tous nos résultats nous supposerons $a=0$.

Si l'on considère les trois surfaces dont les paramètres sont λ_1, λ_2 et λ_3, on trouve, en éliminant entre leurs équations, que la valeur de x^2, à leur point d'intersection, satisfait à l'équation

$$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_2^2-a^2)(\lambda_3^2-a^2). \tag{2}$$

Les valeurs de y^2 et z^2 s'obtiendraient par la permutation circulaire de a, b et c.

En différentiant cette expression par rapport à λ_1, on trouve

$$\frac{dx}{d\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-a^2}\,x. \tag{3}$$

Si ds_1 est la longueur de l'arc de la courbe d'intersection de λ_2 et λ_3, qui est compris entre les surfaces λ_1 et $\lambda_1+d\lambda_1$, on a

$$\left(\frac{ds_1}{d\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda_1}\right)^2=\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_1^2-b^2)(\lambda_1^2-c^2)}. \tag{4}$$

(¹) Cette étude est principalement empruntée à l'Ouvrage si intéressant de G. LAMÉ : *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*. Paris, 1857.

Le dénominateur de cette fraction est le produit des carrés des demi-axes de la surface λ_1.

Si nous posons

$$(5) \qquad D_1^2 = \lambda_2^2 - \lambda_3^2, \quad D_2^2 = \lambda_3^2 - \lambda_1^2, \quad D_3^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2,$$

et si nous faisons $\alpha = 0$, il vient

$$(6) \qquad \frac{ds_1}{d\lambda_1} = \frac{D_2 D_3}{\sqrt{b^2 - \lambda_1^2}\sqrt{c^2 - \lambda_1^2}}.$$

Il est facile de voir que D_2 et D_3 sont les demi-axes de la section centrale de λ_1, qui est conjuguée du diamètre passant par le point donné, et que D_2 est parallèle à ds_2 et D_3 à ds_3.

Si nous substituons aux paramètres λ_1, λ_2, λ_3 leurs valeurs en fonction de trois fonctions α, β, γ définies par les équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha = \displaystyle\int_0^{\lambda_1} \frac{c\, d\lambda_1}{\sqrt{(b^2 - \lambda_1^2)(c^2 - \lambda_1^2)}}, \\ \beta = \displaystyle\int_0^{\lambda_2} \frac{c\, d\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2 - b^2)(c^2 - \lambda_2^2)}}, \\ \gamma = \displaystyle\int_0^{\lambda_3} \frac{c\, d\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2 - b^2)(\lambda_3^2 - c^2)}}, \end{cases}$$

on a

$$(8) \qquad ds_1 = \frac{1}{c} D_2 D_3 d\alpha, \quad ds_2 = \frac{1}{c} D_3 D_1 d\beta, \quad ds_3 = \frac{1}{c} D_1 D_2 d\gamma.$$

148. Or, soit V le potentiel en un point quelconque α, β, γ : la force résultante dans la direction de ds_1 sera

$$(9) \qquad R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds_1} = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{c}{D_2 D_3}.$$

Puisque ds_1, ds_2 et ds_3 sont perpendiculaires l'un à l'autre, l'intégrale de surface sur l'élément superficiel ds_2, ds_3 est

$$(10) \qquad R\, ds_2 ds_3 = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{c}{D_2 D_3}\frac{D_3 D_1}{c}\frac{D_1 D_2}{c} d\beta\, d\gamma = -\frac{dV}{d\alpha}\frac{D_1^2}{c} d\beta\, d\gamma.$$

Considérons maintenant l'élément de volume compris entre les surfaces α, β, γ et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$. Il y aura huit de ces éléments, un dans chaque octant de l'espace.

Nous avons trouvé l'intégrale de surface de la composante normale de la force (dirigée vers l'intérieur) pour l'élément superficiel découpé sur la surface α par les surfaces β et $\beta + d\beta$, γ et $\gamma + d\gamma$. L'in-

tégrale de surface pour l'élément correspondant de la surface $\alpha + d\alpha$, sera

$$+\frac{dV}{d\alpha}\frac{D_1^2}{c}\,d\beta\,d\gamma + \frac{d^2V}{d\alpha^2}\frac{D_1^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

puisque D_1 ne dépend pas de α. L'intégrale de surface pour les deux faces opposées de l'élément de volume sera la somme de ces quantités, soit

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}\frac{D_1^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

De même, les intégrales de surface pour les deux autres couples de faces opposées seront

$$\frac{d^2V}{d\beta^2}\frac{D_2^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \quad \text{et} \quad \frac{d^2V}{d\gamma^2}\frac{D_3^2}{c}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Ces six faces comprennent un élément dont le volume est

$$ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

et si ρ est la densité de volume dans cet élément, nous trouvons, en vertu du § 77, que l'intégrale prise sur la surface totale de cet élément, augmentée de la quantité d'électricité qui y est comprise multipliée par 4π, est égale à zéro, ou, en divisant par $d\alpha, d\beta, d\gamma$,

$$\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}D_1^2 + \frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}D_2^2 + \frac{\partial^2V}{\partial\gamma^2}D_3^2 + 4\pi\rho\frac{D_1^2D_2^2D_3^2}{c^3} = 0. \tag{11}$$

Telle est la forme que prend en coordonnées elliptiques l'équation de Laplace généralisée par Poisson.

Si $\rho = 0$, le quatrième terme s'annule, et l'équation équivaut à celle de Laplace.

Pour la discussion générale de cette équation, on renvoie le lecteur à l'ouvrage de Lamé cité plus haut.

149. Pour déterminer les quantités α, β, γ, on peut les mettre sous forme d'intégrales elliptiques ordinaires, en introduisant les angles auxiliaires θ, φ et ψ; on a

$$\lambda_1 = b\sin\theta, \tag{12}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{c^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \tag{13}$$

$$\lambda_3 = c\,\sec\psi. \tag{14}$$

Si l'on pose $b = k$, et $k^2 + k'^2 = 1$, en appelant k et k' les deux modules complémentaires du système homofocal, on trouve

$$\alpha = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}, \tag{15}$$

intégrale elliptique de première espèce, que l'on peut écrire suivant la notation habituelle : $F(k, \theta)$.

De même, on a

$$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2\varphi}} = F(k') - F(k', \varphi), \tag{16}$$

où $F(k')$ est la fonction complète pour le module k',

$$\gamma = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2\psi}} = F(k) - F(k, \psi). \tag{17}$$

Ici α est figuré comme fonction de l'angle θ, qui, par suite, doit être une fonction du paramètre λ_1; β, comme une fonction de φ, et par suite de λ_2; et γ, comme une fonction de ψ ou de λ_3.

Mais ces angles et ces paramètres peuvent être regardés comme fonctions de α, β, γ. Les propriétés de ces fonctions inverses, et d'autres qui en dépendent, sont développées dans le Traité de M. Lamé sur cette question.

Il est aisé de voir que les paramètres, étant des fonctions périodiques des angles auxiliaires, doivent être des fonctions périodiques de α, β et γ. La période de λ_1 et de λ_3 est $4F(k)$, celle de λ_2 est $2F(k')$.

Solutions particulières.

150. Si V est une fonction linéaire de α, β, γ, l'équation est satisfaite. Donc nous pouvons déduire de l'équation la distribution de l'électricité sur deux surfaces confocales de même famille, maintenues à des potentiels constants, et le potentiel en un point quelconque de l'espace compris entre ces surfaces.

Hyperboloïdes à deux nappes.

Si α est constant, la surface correspondante est un hyperboloïde à deux nappes. Supposons que le signe de α soit le même que celui de x sur la nappe que nous considérons. Nous pourrons ainsi n'étudier qu'une seule nappe à la fois.

Soient α_1 et α_2 les valeurs de α pour deux nappes particulières appartenant au même hyperboloïde ou à des hyperboloïdes différents, et soient V_1 et V_2 les potentiels auxquels elles sont maintenues. Alors, si nous posons

$$V = \frac{\alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 + \alpha(V_1 - V_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \tag{18}$$

les conditions seront satisfaites sur les deux surfaces et dans tout l'espace intermédiaire. Si nous faisons V constant et égal à V_1 pour tout l'espace situé au delà de la surface α_1, V constant et égal à V_2 pour tout l'espace situé au delà de la surface α_2, nous aurons la solution complète dans ce cas particulier.

La force résultante en un point quelconque de l'une ou l'autre des nappes est

$$R_1 = -\frac{\partial V}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} \tag{19}$$

ou

$$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c}{D_1 D_2}. \tag{20}$$

Si p_1 est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en un point quelconque de la surface, et si P_1 est le produit des demi-axes de la surface, on a

$$p_1 D_2 D_3 = P_1,$$

d'où l'on tire

$$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{cp_1}{P_1}; \tag{21}$$

c'est-à-dire qu'en un point quelconque de la surface la force résultante est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent. La densité superficielle σ se déduit de l'équation

$$4\pi\sigma = R. \tag{22}$$

La quantité totale d'électricité répandue sur le segment intercepté sur une des nappes de l'hyperboloïde par le plan dont l'équation est $x = a$, est

$$Q = \frac{c}{2}\frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{a}{\lambda_1} - 1\right). \tag{23}$$

La quantité répandue sur la totalité de la nappe infinie est donc infinie.

Les formes limites de la surface sont les suivantes :

1° Pour $\alpha = F(k)$, la surface est la partie du plan des xz, qui est

située du côté positif de la branche positive de l'hyperbole ayant pour équation

$$\frac{x^2}{b_1} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1. \tag{24}$$

2° Pour $\alpha = 0$, la surface se réduit au plan des yz.

3° Pour $\alpha = -F(z)$, la surface se réduit à la partie du plan des xz qui est du côté négatif de la branche négative de l'hyperbole dont il a été parlé plus haut.

Hyperboloïde à une nappe.

En faisant β constant, nous obtenons l'équation de l'hyperboloïde à une nappe. Les deux surfaces qui limitent le champ électrique doivent donc appartenir à deux hyperboloïdes différents. Pour tout le reste, l'étude est la même que pour les hyperboloïdes à deux nappes; quand la différence des potentiels est donnée, la densité en un point quelconque de la surface est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et la quantité totale répandue sur la nappe infinie est infinie.

Les formes limites de la surface sont les suivantes :

1° Quand $\beta = 0$, la surface est la partie du plan des xz comprise entre les branches de l'hyperbole dont l'équation a été donnée plus haut (24).

2° Quand $\beta = F(k')$ la surface est la partie du plan des xy extérieure à l'ellipse homofocale dont l'équation est

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1. \tag{25}$$

Ellipsoïdes.

γ est constant pour un ellipsoïde donné. Si deux ellipsoïdes γ_1 et γ_2 sont maintenus à des potentiels V_1 et V_2, nous avons en un point quelconque γ de l'espace intermédiaire

$$V = \frac{\gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 + \gamma(V_2 - V_1)}{\gamma_1 - \gamma_2}. \tag{26}$$

La densité superficielle en un point quelconque est

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{\varepsilon p_3}{P_3}, \tag{27}$$

où p_3 est la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et P_3 le produit des demi-axes.

La charge totale d'électricité répandue sur l'une ou l'autre des deux surfaces est donnée par

$$Q_2 = c\,\frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} = -Q_1; \tag{28}$$

cette charge est finie.

Si $\gamma = F(k)$, la surface de l'ellipsoïde est à l'infini dans tous les sens.

Si l'on fait $V_2 = 0$ et $\gamma_2 = F(k)$, on trouve pour la quantité d'électricité qui charge un ellipsoïde maintenu au potentiel V au milieu d'un champ indéfini

$$Q = c\,\frac{V}{F(k) - \gamma}. \tag{29}$$

La forme limite de l'ellipsoïde se présente quand $\gamma = 0$; alors la surface se réduit à la partie du plan des xy intérieure à l'ellipse homofocale dont l'équation a été donnée plus haut (25).

La densité superficielle sur chacune des faces du plateau elliptique représenté par l'équation (25) et dont l'excentricité est k est

$$\tau = \frac{V}{4\pi\sqrt{c^2 - b^2}}\,\frac{1}{F(k)}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2}}}, \tag{30}$$

et sa charge est

$$Q = c\,\frac{V}{F(k)}. \tag{31}$$

Cas particuliers.

151. Si c reste fini, tandis que b et par suite k décroissent jusqu'à devenir finalement nuls, le système de surfaces se transforme de la manière suivante :

L'axe réel et l'un des axes imaginaires de chacun des hyperboloïdes à deux nappes décroissent indéfiniment, et, à la limite, la surface se réduit à deux plans se coupant suivant l'axe des z.

La quantité α devient identique à 0, et l'équation des plans méridiens auxquels se réduit le premier système est

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = 0. \tag{32}$$

Pour la quantité β, si nous employons la définition donnée à l'équation (7) (§ 147), nous trouvons une valeur infinie de l'intégrale pour la limite inférieure. Afin d'éviter cette difficulté, nous définirons β,

dans ce cas particulier, comme étant la valeur de l'intégrale

$$\int_{\lambda_0}^{c} \frac{c\,d\lambda_3}{\lambda_3^2\sqrt{c^2-\lambda_3^2}}.$$

Si maintenant nous faisons $\lambda_3 = c\sin\varphi$, β devient

$$\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log\cot\tfrac{1}{2}\varphi;$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}},$$

et par suite

$$\sin\varphi = \frac{2}{e^{\beta}+e^{-\beta}}.$$

Et si nous désignons la quantité exponentielle $\frac{1}{2}(e^{\beta}+e^{-\beta})$ sous le nom de *cosinus hyperbolique*, ou, plus brièvement, d'*hypocosinus* de β (ou $\cosh\beta$), et la quantité $\frac{1}{2}(e^{\beta}-e^{-\beta})$ sous le nom d'*hyposinus* ou $\sinh\beta$, et si, de même, nous employons d'autres fonctions du même genre analogues aux fonctions trigonométriques ordinaires, $\lambda_3 = c\,\mathrm{séc\,h}\beta$, et l'équation du système d'hyperboloïdes à une nappe est

$$\frac{x^2+y^2}{(\mathrm{séc\,h}\beta)^2} - \frac{z^2}{(\mathrm{tang\,h}\beta)^2} = c^2. \tag{35}$$

La quantité γ se réduit à ψ, de sorte que $\lambda_3 = c\,\mathrm{séc}\gamma$, et l'équation du système d'ellipsoïdes est

$$\frac{x^2+y^2}{\mathrm{séc}^2\gamma} + \frac{z^2}{\mathrm{tang}^2\gamma} = c^2. \tag{36}$$

Les ellipsoïdes de ce genre, qui sont des figures de révolution autour de leurs axes conjugués, sont appelés *ellipsoïdes planétaires*.

La charge électrique d'un ellipsoïde planétaire maintenu au potentiel V au milieu d'un champ indéfini est

$$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi-\gamma}. \tag{37}$$

où $c\,\mathrm{séc}\gamma$ est le rayon équatorial, et $c\,\mathrm{tang}\gamma$ le rayon polaire.

Si $\gamma = 0$, la figure est un disque circulaire de rayon c, et

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{c^2-r^2}}, \tag{38}$$

$$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi}. \tag{39}$$

152. *Deuxième cas.* — Soit $b = c$; alors $k = 1$ et $k' = 0$,

$$\alpha = \log \operatorname{tang} \frac{\pi + 2\theta}{4},$$

d'où

$$\lambda_1 = c \operatorname{tang h} \alpha, \tag{40}$$

et l'équation des hyperboloïdes de révolution à deux nappes devient

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang h}^2 \alpha} - \frac{y^2 + z^2}{\operatorname{séc h}^2 \alpha} = c^2. \tag{41}$$

La quantité β se réduit à φ, et chacun des hyperboloïdes à une nappe se réduit à un couple de plans se coupant suivant l'axe des x, et ayant pour équation

$$\frac{y^2}{\sin^2 \beta} - \frac{z^2}{\cos^2 \beta} = 0. \tag{42}$$

C'est un système de plans méridiens où β est la longitude.

La quantité γ, définie comme à l'équation (7) du § 147, deviendrait infinie à la limite inférieure : pour éviter cette difficulté, nous la définirons comme étant la valeur de l'intégrale $\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{c\, d\lambda_2}{\lambda_2^2 - c^2}$.

Si donc nous posons $\lambda_2 = c \operatorname{séc} \psi$, nous trouvons

$$\gamma = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin \psi},$$

d'où $\lambda_2 = c \operatorname{cot h} \gamma$, et l'équation de la famille d'ellipsoïdes est

$$\frac{x^2}{\operatorname{cot h}^2 \gamma} + \frac{y^2 + z^2}{\operatorname{coséc h}^2 \gamma} = c^2. \tag{43}$$

Ces ellipsoïdes, dans lesquels l'axe de révolution est l'axe transverse, sont appelés *ellipsoïdes en œuf*.

La charge électrique d'un ellipsoïde en œuf maintenu au potentiel V au milieu d'un champ indéfini est dans ce cas, d'après l'équation (29),

$$c \frac{V}{\int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin \psi}}, \tag{44}$$

où $c \operatorname{séc} \psi_0$ est le rayon polaire.

Si nous désignons par A le rayon polaire, par B le rayon équatorial,

le résultat précédent devient

$$Q = \frac{V\sqrt{A^2 - B^2}}{\log \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{B}}. \tag{45}$$

Si le rayon équatorial est très petit, comparativement au rayon polaire, comme dans un fil dont les bouts seraient arrondis

$$Q = \frac{AV}{\log 2A - \log B}. \tag{46}$$

Si b et c s'annulent, leur rapport restant fini, le système de surfaces se réduit à deux systèmes de cônes confocaux, et un système de sphères dont le rayon est inversement proportionnel à γ.

Si le rapport de b à c est zéro ou un, le système de surfaces se ramène à un système de plans méridiens, un système de cônes droits ayant l'axe commun, et un système de surfaces sphériques concentriques, dont le rayon est inversement proportionnel à γ. C'est le système ordinaire des coordonnées polaires sphériques.

Surfaces cylindriques.

153. Quand c est infini, les surfaces sont des cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

L'un des systèmes de cylindres est hyperbolique : c'est celui auquel se réduisent les hyperboloïdes à deux nappes. Comme pour $c = \infty$, $k = 0$ et par suite $\theta = \alpha$, l'équation de ce système doit être

$$\frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = b^2. \tag{47}$$

L'autre système est elliptique, et, puisque pour $k = 0$, β se réduit à

$$\int_b^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - b^2}} \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = b \cos \beta,$$

l'équation de ce système est

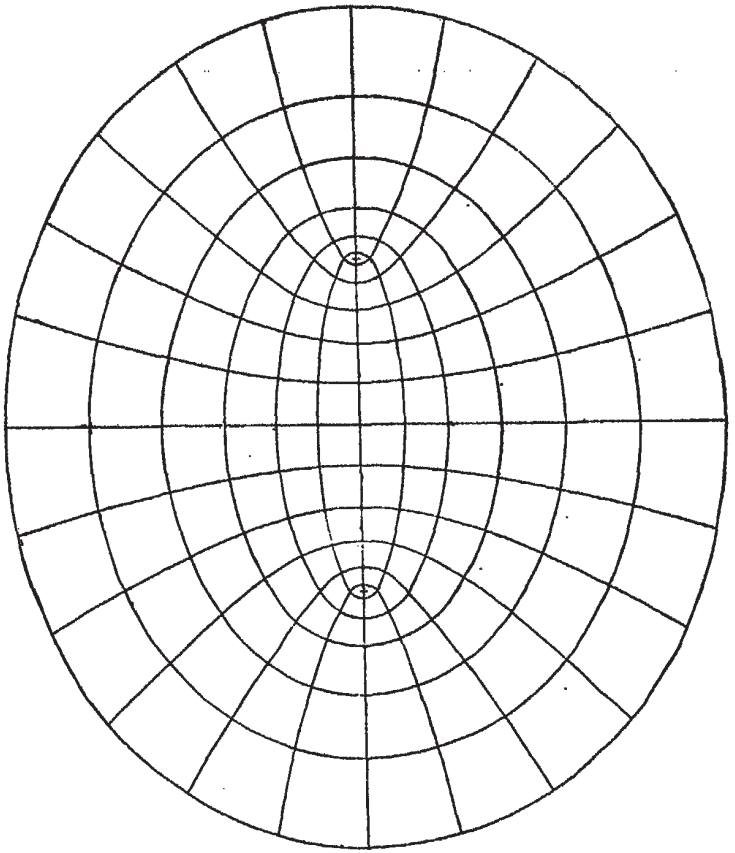
$$\frac{x^2}{\cos^2 \beta} + \frac{y^2}{\sin^2 \beta} = b^2. \tag{48}$$

Ces deux systèmes sont représentés à la *Pl. X*.

Paraboloïdes confocaux.

154. Si, dans l'équation générale, on transporte l'origine des coor-

Pl. X.



Ellipses et hyperboles confocales.

données en un point quelconque de l'axe des x, à une distance t du centre, et si à x, λ, b et c on substitue $t+x$, $t+\lambda$, $t+b$ et $t+c$, puis que l'on fasse croître t indéfiniment, on obtient, à la limite, l'équation d'un système de paraboloïdes dont les foyers sont les points $x=b$ et $x=c$, et dont l'équation est

$$(49) \qquad 4(x-\lambda)+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=0.$$

Si l'on appelle le paramètre variable λ pour le premier système de paraboloïdes elliptiques, μ pour les paraboloïdes hyperboliques, et ν pour le second système de paraboloïdes elliptiques, on aura, dans l'ordre des grandeurs croissantes : λ, b, μ, c, ν et

$$(50) \qquad \begin{cases} x=\lambda+\mu+\nu-c-b, \\ y^2=4\dfrac{(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)}{c-b}, \\ z^2=4\dfrac{(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-c)}{c-b}. \end{cases}$$

Pour éviter les valeurs infinies des intégrales (7), on prend dans d'autres limites les intégrales correspondantes du système de paraboloïdes.

On pose dans ce cas

$$\alpha=\int_{\lambda}^{b}\frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}},$$

$$\beta=\int_{b}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}},$$

$$\gamma=\int_{c}^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}}.$$

De là on tire

$$(51) \qquad \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2}(c+b)-\frac{1}{2}(c-b)\cosh\alpha, \\ \mu=\frac{1}{2}(c+b)-\frac{1}{2}(c-b)\cos\beta, \\ \gamma=\frac{1}{2}(c+b)+\frac{1}{2}(c-b)\cosh\gamma. \end{cases}$$

$$(52) \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}(c+b)+\frac{1}{2}(c-b)(\cosh\gamma-\cos\beta-\cosh\alpha), \\ y=2(c-b)\sinh\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cosh\dfrac{\gamma}{2}, \\ z=2(c-b)\cosh\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sinh\dfrac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Si $b=c$, on a le cas des paraboloïdes de révolution autour de l'axe

des x, et

$$(53)\qquad \begin{cases} x = a(e^{2\alpha} - e^{2\gamma}), \\ y = 2ae^{\alpha+\gamma}\cos\beta, \\ z = 2ae^{\alpha+\gamma}\sin\beta. \end{cases}$$

Les surfaces pour lesquelles β est constant sont des plans passant par l'axe et faisant un angle β avec un plan fixe passant par l'axe.

Les surfaces pour lesquelles α est constant sont des paraboloïdes confocaux. Si $\alpha = -\infty$, le paraboloïde se réduit à une ligne droite s'arrêtant à l'origine.

Nous pouvons aussi trouver les valeurs α, β, γ en fonction de r, θ et φ, coordonnées polaires sphériques rapportées au foyer comme origine, et à l'axe des paraboles comme axe de la sphère

$$\alpha = \log(r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\theta),$$
$$\beta = \varphi,$$
$$\gamma = \log(r^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\theta).$$

Nous pouvons comparer le cas où le potentiel est égal à α à l'harmonique solide zonal $r^i Q_i$. Tous deux satisfont à l'équation de Laplace et sont des fonctions homogènes de x, y, z; mais, dans le cas qui se déduit des paraboloïdes, il y a une discontinuité sur l'axe, et il n'existe point de différence finie entre zéro et la valeur de i.

La densité superficielle sur un paraboloïde électrisé placé au milieu d'un champ indéfini (y compris le cas d'une ligne droite s'étendant à l'infini dans une direction) est inversement proportionnelle à la racine carrée de la distance au foyer ou, dans le cas de la ligne droite, de la distance à l'extrémité de la ligne.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES IMAGES ÉLECTRIQUES ET DE L'INVERSION ÉLECTRIQUE.

155. Nous avons déjà montré que, quand une sphère conductrice est soumise à l'influence de charges électriques distribuées d'une manière déterminée, la distribution de l'électricité à la surface de cette sphère peut être déterminée par la méthode des harmoniques sphériques.

A cet effet, on développe le potentiel du système agissant en une série d'harmoniques solides de degré positif ayant pour origine le centre de la sphère, et l'on trouve alors une série correspondante d'harmoniques solides de degré négatif, qui représente le potentiel dû à l'électrisation de la sphère.

Au moyen de cette puissante méthode d'analyse, Poisson réussit à déterminer l'électrisation d'une sphère soumise à l'influence d'un système électrique donné, et résolut même le problème plus difficile de la distribution sur deux sphères conductrices en présence l'une de l'autre. Ces études ont été poursuivies en détail par Plana et par d'autres, qui ont confirmé l'exactitude des résultats de Poisson.

Si l'on applique cette méthode au cas le plus élémentaire, celui d'une sphère soumise à l'action d'un point électrisé unique, il faut développer le potentiel dû à la charge de ce point en une série d'harmoniques solides, puis déterminer une deuxième série d'harmoniques solides qui représentent le potentiel extérieur dû à l'électrisation de la sphère.

Il ne semble pas qu'aucun des mathématiciens nommés ci-dessus ait remarqué que cette seconde série représente le potentiel dû à un point électrisé imaginaire : ce point n'a pas d'existence physique, en tant que point électrisé, mais il peut être appelé une image électrique, car l'action de la surface sur les points extérieurs est la même que produirait le point électrisé imaginaire si l'on enlevait la surface sphérique.

Cette découverte paraît avoir été réservée à Sir William Thomson qui en a fait sortir une méthode d'une grande puissance pour la solution des problèmes électriques, susceptible d'être présentée sous une forme géométrique élémentaire.

Dans les travaux originaux, publiés dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* de 1848, il emploie les expressions de la théorie ordinaire des attractions à distance, et ne se sert pas de la méthode des potentiels ni des théorèmes généraux du Chapitre IV, qui cependant ont probablement conduit à ces découvertes. Au lieu de suivre la marche de l'auteur, je ferai couramment usage de la notion du potentiel et des surfaces équipotentielles, toutes les fois que l'exposition pourra être rendue plus claire par ce procédé.

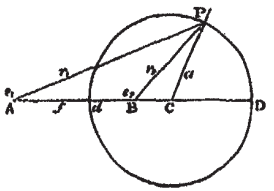
Théorie des images électriques.

156. Soient A et B (*fig.* 7) deux points dans un milieu diélectrique uniforme s'étendant à l'infini : soient e_1 et e_2 les charges respectives de A et B; soit P un point de l'espace dont les distances à A et à B sont r_1 et r_2. La valeur du potentiel en P sera

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}. \tag{1}$$

Les surfaces équipotentielles dues à cette distribution électrique sont représentées à la *Pl. I* (p. 187) quand les charges e_1 et e_2 sont de

Fig. 7.



même signe, à la *Pl. II* (p. 189) quand elles sont de signes contraires. Considérons maintenant la surface pour laquelle $V = 0$, qui est la seule surface sphérique du système. Si les charges e_1 et e_2 sont de même signe, cette surface est tout entière à l'infini; si elles sont de signes contraires, il y a, à distance finie, un plan ou une surface sphérique où le potentiel est égal à zéro.

L'équation de cette surface est

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0, \tag{2}$$

et son centre est en un point C situé sur le prolongement de AB, et

tel que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{e_1^2}{e_2^2};$$

le rayon de cette sphère est

$$AB\,\frac{e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2}.$$

Les deux points A et B sont deux points réciproques par rapport à cette sphère, c'est-à-dire qu'ils sont situés sur le même rayon, et que le rayon est une moyenne proportionnelle entre leurs distances au centre de la sphère.

Puisque cette surface sphérique est au potentiel zéro, rien ne sera changé dans le potentiel d'aucun point intérieur ou extérieur, si nous supposons cette surface formée d'une couche mince de métal et mise à la terre; les actions électriques resteront partout celles qui sont dues aux deux points électrisés A et B.

Si maintenant, laissant l'enveloppe métallique reliée à la terre, nous enlevons le point B, le potentiel deviendra zéro pour tous les points intérieurs à la sphère, mais il restera le même pour tous les points extérieurs. En effet la surface de la sphère reste au même potentiel que précédemment, et aucun changement n'a été apporté dans les charges électriques extérieures à cette sphère.

Donc, si un point électrisé A est placé à l'extérieur d'une sphère conductrice maintenue au potentiel zéro, l'action électrique sur tous les points extérieurs à la sphère est la même qui serait due au point A et à un autre point B intérieur à la sphère, que l'on peut appeler l'image électrique du point A.

157. *Définition d'une image électrique.* — Une image électrique est un point ou un système de points électrisés, situé d'un côté d'une surface, et produisant de l'autre côté de cette surface une action électrique identique à celle qui est due à la charge effective de cette surface.

En Optique, on appelle image *virtuelle* un point ou un système de points situés d'un côté d'un miroir ou d'une lentille, qui, s'il existait réellement, émettrait le système de rayons qui existent effectivement de l'autre côté du miroir ou de la lentille.

Les images électriques correspondent aux images virtuelles de l'Optique, en ce qu'elles se rapportent à l'espace situé au delà de la surface. Mais elles ne leur correspondent pas en position, ni même dans le rôle simplement approximatif des foyers optiques.

Il n'y a point d'images électriques *réelles*, c'est-à-dire de points

électrisés imaginaires qui produiraient, dans la région située du côté de la surface électrisée où ils sont eux-mêmes, un effet équivalent à celui de cette surface électrisée.

Car si, dans une certaine région de l'espace, le potentiel est le même qui serait dû à une certaine charge électrique située dans cette région, il ne peut être dû qu'à cette charge même existant en réalité. En fait, la charge en un point peut se déduire du potentiel aux environs de ce point, au moyen de l'équation de Poisson.

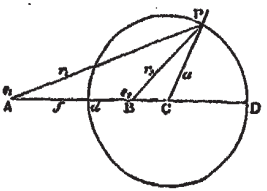
Soient

a le rayon de la sphère;
f la distance du point électrisé A au centre C;
e la charge de ce point.

Alors l'image du point est située en B, sur le même rayon de la sphère, et à une distance $\frac{a^2}{f}$; la charge de l'image est $-e\frac{a}{f}$.

Nous avons montré que cette image produit, de l'autre côté de la surface, le même effet que la charge effective de la surface. Nous allons maintenant déterminer la densité superficielle de cette charge, en un

Fig. 7.



point quelconque P de la surface sphérique : à cet effet, nous ferons usage du théorème de Coulomb (§ 80), que si R est la force résultante et σ la densité superficielle à la surface d'un conducteur,

$$R = 4\pi\sigma,$$

R étant mesuré en s'éloignant de la surface.

Nous pouvons considérer R comme la résultante de deux forces, une répulsion $\frac{e}{\overline{AP}^2}$ agissant suivant AP, et une attraction $e\frac{a}{f}\frac{1}{\overline{PB}^2}$ suivant PB.

Décomposant ces forces dans les directions de AC et CP, nous trouvons :

Pour les composantes de la répulsion,

$$cf\frac{1}{\overline{AP}^3} \text{ suivant AC}, \quad ea\frac{1}{\overline{AP}^3} \text{ suivant CP};$$

pour les composantes de l'attraction,

$$-\frac{ea}{f}\frac{1}{\overline{BP}^3}\,\overline{BC} \text{ suivant AC}, \quad -\frac{ea^2}{f}\frac{1}{\overline{BP}^3} \text{ suivant CP}.$$

Or $BP = \frac{a}{f}AP$ et $BC = \frac{a^2}{f}$, de sorte que les composantes de l'attraction peuvent s'écrire

$$-ef\frac{1}{\overline{AP}^3} \text{ suivant AC}, \quad -\frac{ef^2}{a}\frac{1}{\overline{AP}^3} \text{ suivant CP}.$$

Les composantes de l'attraction et de la répulsion suivant AC sont égales et opposées : la force résultante est donc entièrement dirigée suivant le rayon CP. Ce résultat ne fait que confirmer ce que nous avions déjà établi, à savoir que la sphère est une surface équipotentielle, c'est-à-dire une surface à laquelle la force résultante est toujours perpendiculaire.

La force résultante mesurée suivant la normale CP à la surface, et comptée vers le côté de la surface où se trouve le point A, est

$$R = -e\frac{f^2-a^2}{a}\frac{1}{\overline{AP}^3}. \tag{3}$$

Si A est pris à l'intérieur de la sphère, f est plus petit que a, et il faut compter R vers l'intérieur. On a donc, dans ce cas,

$$R = -e\frac{a^2-f^2}{a}\frac{1}{\overline{AP}^3}. \tag{4}$$

Dans tous les cas, on peut écrire

$$R = -e\frac{AD.Ad}{CP}\frac{1}{\overline{AP}^3}, \tag{5}$$

où AD et Ad sont les segments interceptés par la sphère sur une ligne quelconque passant par A, segments dont le produit doit toujours être compté positivement.

158. De là résulte, par le théorème de Coulomb (§ 80) que la

densité superficielle σ au point P est

$$\sigma = -e\frac{AD.Ad}{4\pi.CP}\frac{1}{AP^3}. \tag{6}$$

La densité électrique en un point quelconque de la sphère est en raison inverse du cube de sa distance au point A.

L'effet combiné de cette distribution superficielle et du point A est de produire : du côté de la surface où est situé le point A, un potentiel équivalent à celui qui est dû à la charge e placée en A et à son image $-\frac{ea}{f}$ en B; de l'autre côté de la surface, le potentiel est nul en tous les points. Donc l'effet de cette distribution superficielle prise en elle-même est de produire : du côté de A, un potentiel équivalent à celui qui est dû à l'image $-\frac{ea}{f}$ placée en B; et du côté opposé, un potentiel égal et de signe contraire à celui qui est dû à la charge e placée en A.

La charge totale répandue sur la surface de la sphère est évidemment $-\frac{ea}{f}$, puisqu'elle est équivalente à la charge de l'image B.

Nous arrivons ainsi aux théorèmes suivants relatifs à l'action d'une charge d'électricité répandue sur une surface sphérique, de façon que la densité superficielle soit en raison inverse du cube de la distance à un point A extérieur ou intérieur à la sphère.

Supposons la densité donnée par l'équation

$$\sigma = \frac{C}{AP^4}, \tag{7}$$

où C est une quantité constante. D'après l'équation (6),

$$C = -e\frac{AD.Ad}{4\pi a}. \tag{8}$$

L'action de cette distribution superficielle sur un point séparé de A par la surface est égale à celle d'une charge électrique $-e$, ou

$$\frac{4\pi a C}{AD.Ad},$$

concentrée en A.

Son action en un point quelconque situé du même côté de la surface que A est égale à celle d'une quantité d'électricité

$$\frac{4\pi C a^2}{f.AD.Ad},$$

concentrée au point B, image de A.

La quantité totale d'électricité répandue sur la sphère est égale à la première de ces quantités si A est intérieur, à la seconde si A est extérieur à la sphère.

Ces propositions ont été établies par Sir William Thomson, dans ses premières recherches géométriques relatives à la distribution de l'électricité dans les conducteurs sphériques : le lecteur devra s'y reporter.

159. Si un système, pour lequel la distribution électrique est connue, est placé dans le voisinage d'une sphère conductrice de rayon a, que l'on maintient au potentiel zéro en la mettant à la Terre, les charges dues aux différentes parties du système se superposent.

Soient $A_1, A_2, \ldots$ les points électrisés du système, $f_1, f_2, \ldots$ leurs distances au centre de la sphère, $e_1, e_2, \ldots$, leurs charges. Les images $B_1, B_2, \ldots$ de ces points seront situées sur le même rayon que ces points eux-mêmes, et à des distances $\frac{a^2}{f_1}, \frac{a^2}{f_2}, \ldots$ du centre de la sphère : leurs charges seront

$$-e_1\frac{a}{f_1}, \quad -e_2\frac{a}{f_2}, \quad \ldots.$$

A l'extérieur de la sphère, le potentiel dû à la distribution superficielle sera le même qui serait produit par le système des images B_1, B_2, ... Ce système est appelé, par suite, l'image électrique du système $A_1, A_2, \ldots$.

Si, au lieu d'être au potentiel zéro, la sphère est au potentiel V, il faut encore superposer une couche répandue sur sa surface extérieure avec la densité superficielle uniforme

$$\sigma = \frac{V}{4\pi a}.$$

L'effet de cette couche sur tous les points extérieurs à la sphère sera égal à celui d'une quantité d'électricité Va placée au centre; en tous les points intérieurs, le potentiel sera simplement augmenté de V.

La charge totale de la sphère due au système de points agissants extérieurs $A_1, A_2, \ldots$, est

$$E = Va - e_1\frac{a}{f_1} - e_2\frac{a}{f_2} - \ldots; \tag{9}$$

d'où l'on peut tirer soit la charge E, soit le potentiel V, suivant que l'un ou l'autre est donné.

Si le système électrisé est intérieur à la surface sphérique, la charge

induite sur la surface est égale et de signe contraire à la charge inductrice, ainsi que nous l'avons démontré pour toute surface fermée soumise à l'action de points intérieurs.

160 (¹). Un point électrisé e placé à une distance f du centre plus grande que le rayon a de la sphère, et la charge de la surface sphérique due tant à l'influence du point électrisé qu'à la charge propre de la sphère, exercent l'un sur l'autre une action mutuelle dans laquelle l'énergie est

$$M = \frac{Ee}{f} - \frac{1}{2}\frac{e^2a^3}{f^2(f^2-a^2)}, \tag{10}$$

où V est le potentiel et E la charge de la sphère.

La répulsion entre le point électrisé et la sphère est donc, d'après le § 92,

$$F = ea\left[\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2-a^2)^2}\right] = \frac{e}{f^2}\left[E - e\frac{a^3(2f^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}\right]. \tag{11}$$

Par suite la force qui s'exerce entre le point et la sphère est toujours une attraction dans les cas suivants :

1° Quand la sphère n'est pas isolée ;

(¹) Cette discussion sera peut-être plus facile à comprendre, si l'on considère le problème comme un exemple à l'appui du n° 86. Supposons que ce qu'on appelle *point électrisé* soit en réalité un petit conducteur sphérique, de rayon b et de potentiel v. On a ainsi un cas particulier du problème des deux sphères, dont une solution a déjà été donnée au § 146 et dont une autre sera donnée au § 173. Dans le cas actuel, le rayon b est si petit que l'on peut regarder la charge du petit conducteur comme distribuée uniformément sur sa surface, et l'on peut négliger les images électriques du petit conducteur, sauf la première.

On a ainsi

$$V = \frac{P}{a} + \frac{P}{f},$$

$$v = \frac{E + e\frac{a}{f}}{f} - \frac{ea}{f^2-a^2} + \frac{e}{b}.$$

L'énergie du système est donc (§ 85)

$$\frac{E^2}{2a} + \frac{Ee}{f} + \frac{e^2}{2}\left[\frac{1}{b} - \frac{a^3}{f^3(f^2-a^2)}\right].$$

Au moyen de l'équation précédente, on peut aussi exprimer l'énergie en fonction des potentiels; ce qui fait, à la même approximation,

$$\frac{aV^2}{2} + \frac{1}{2}\left(b + \frac{ab^3}{f^2-a^2}\right)v^2 - \frac{ab}{f}ve.$$

2° Quand elle n'a pas de charge;

3° Quand le point électrisé est très voisin de la surface.

Pour que la force soit répulsive, il faut que le potentiel de la sphère soit positif et plus grand que $e\frac{f^3}{(f^2-a^2)^2}$, et que la sphère ait une charge de même signe que e et plus grande que $e\frac{a^3(2f^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}$.

Au point d'équilibre, l'équilibre est instable, la force devenant une attraction si les corps sont rapprochés, une répulsion s'ils sont plus éloignés.

Si le point électrisé est intérieur à la surface sphérique, la force qui agit sur lui va toujours en s'éloignant du centre de la sphère, et elle a pour valeur

$$\frac{e^2af}{(a^2-f^2)^2}.$$

La densité superficielle au point de la sphère le plus rapproché du point électrisé, quand ce point est extérieur à la sphère, est

$$(12)\qquad \sigma_1=\frac{1}{4\pi a^2}\left[Va-e\frac{f+a}{(f-a)^2}\right]=\frac{1}{4\pi a^2}\left[E-e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\right].$$

La densité au point de la sphère le plus éloigné du point électrisé est

$$(13)\qquad \sigma_2=\frac{1}{4\pi a^2}\left[Va-e\frac{a(f-a)}{(f-a)^2}\right]=\frac{1}{4\pi a^2}\left[E-e\frac{a^2(3f+a)}{f(f-a)^2}\right].$$

Lorsque la charge E de la sphère est comprise entre

$$e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\quad\text{et}\quad -e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2},$$

l'électrisation est négative auprès du point électrisé, et positive sur la partie opposée. Il y a une ligne circulaire qui sépare les parties de la surface électrisées positivement et négativement, et cette ligne est une ligne d'équilibre.

Si

$$(14)\qquad E=ea\left(\frac{1}{\sqrt{f^2-a^2}}-\frac{1}{f}\right),$$

la surface équipotentielle qui coupe la sphère suivant la ligne d'équilibre est une sphère dont le centre est au point électrisé, et dont le rayon est égal à $\sqrt{f^2-a^2}$.

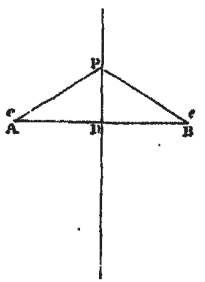
Les lignes de force et les surfaces équipotentielles correspondant à ce cas sont données à la *Pl. IV.*

Images dans une surface plane conductrice indéfinie.

161. Si les deux points électrisés A et B du § 156 sont chargés de charges électriques égales et de signes contraires, la surface de potentiel zéro sera un plan dont tous les points sont également distants de A et B.

Si donc A est un point électrisé dont la charge est e, et AD une perpendiculaire au plan; que sur AD prolongé on prenne un point B tel que AD = DB, et que l'on place en B une charge $-e$, cette charge placée en B sera l'image de A; elle produira, sur tous les points situés du même côté que A par rapport au plan, un effet identique à celui

Fig. 8.



de la charge actuelle de ce plan. En effet, du côté de A, le potentiel dû à A et B satisfait aux conditions que $\nabla^2 V = 0$ en tous les points sauf A, et que $V = 0$ dans le plan. Or il n'y a qu'une forme de V qui puisse satisfaire à ces conditions.

Pour déterminer la force résultante en un point P du plan, observons qu'elle est la résultante de deux forces égales chacune à $\frac{e}{\overline{AP}^2}$, agissant l'une suivant AP, et l'autre suivant PB. Donc la résultante de ces forces est dirigée parallèlement à AB, et est égale à

$$\frac{e}{\overline{AP}^2}\,\frac{AB}{\overline{AP}}.$$

Donc la force résultante R, mesurée depuis la surface vers la partie de l'espace où est situé le point A, est

$$R = -\frac{2e.AD}{\overline{AP}^3}, \tag{15}$$

et la densité au point P est

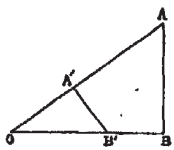
$$\sigma = -\frac{e.AD}{2\pi.\overline{AP}^3}. \tag{16}$$

De l'inversion électrique.

162. La méthode des images électriques conduit directement à une méthode de transformation au moyen de laquelle on peut déduire d'un problème dont la solution est connue la solution d'un nombre quelconque d'autres problèmes.

Nous avons vu qu'un point placé à la distance r du centre d'une sphère de rayon R a pour image un autre point situé sur le même rayon à une distance r', telle que $rr' = R^2$. Donc l'image d'un système de points, de lignes ou de surfaces se déduit du système primitif par la méthode connue en Géométrie sous le nom de *méthode d'inversion*, laquelle a été décrite par Chasles, Salmon et d'autres mathématiciens.

Fig. 9.



Si A et B sont deux points, A′ et B′ leurs images, par rapport au centre O d'une sphère d'inversion de rayon R,

$$OA.OA' = R^2 = OB.OB'.$$

Donc les triangles OAB, OA′B′ sont semblables, et

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{OA.OB}{R^2}.$$

Si la quantité d'électricité e est placée en A, son potentiel sur B sera

$$V = \frac{e}{AB}.$$

Si e' est placé en A′, son potentiel en B′ sera

$$V' = \frac{e'}{A'B'}.$$

Dans la théorie des images électriques

$$\frac{e}{e'} = \frac{OA}{R} = \frac{R}{OA'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{V}{V'} = \frac{R}{OB}, \tag{17}$$

c'est-à-dire que le potentiel sur B de la charge électrique de A est au potentiel sur l'image de B de l'image électrique de A comme R est à OB.

Puisque ce rapport ne dépend que de OB et non de OA, le potentiel sur B dû à un système quelconque de corps électrisés est au potentiel sur B′ dû à l'image de ce système dans le rapport de R à OB.

Si r est la distance au centre d'un point quelconque A et r' celle de son image A′; si e est la charge de A, et e' celle de A′; si L, S, K sont des éléments de longueur, de surface et de volume en A, L′, S′, K′ leurs images en A′; si λ, σ, ρ, λ', σ', ρ' sont les densités linéaires, superficielles et de volume correspondantes en ces deux points; si V est le potentiel en A dû au système primitif, et V′ le potentiel en A′ dû au système inverse, on a

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{r'}{r} = \dfrac{L'}{L} = \dfrac{R^2}{r'^2} = \dfrac{r'^2}{R^2}, \\
\dfrac{S'}{S} = \dfrac{R^4}{r'^4} = \dfrac{r'^4}{R^4}, \quad \dfrac{K'}{K} = \dfrac{R^6}{r'^6} = \dfrac{r'^6}{R^6}, \\
\dfrac{e'}{e} = \dfrac{R}{r} = \dfrac{r'}{R}, \quad \dfrac{\lambda'}{\lambda} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{R}{r'}, \\
\dfrac{\sigma'}{\sigma} = \dfrac{r'^2}{R^2} = \dfrac{R^2}{r'^2}, \quad \dfrac{\rho'}{\rho} = \dfrac{r'^5}{R^5} = \dfrac{R^5}{r'^5}, \\
\dfrac{V'}{V} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{R}{r'}.
\end{array}\right. \tag{18}$$ (1)

Si, dans le système primitif, une certaine surface est la surface d'un conducteur, et a par suite un potentiel constant P, son image dans le système transformé aura un potentiel $P\frac{R}{r'}$. Mais, en plaçant au centre d'inversion O une quantité d'électricité égale à — PR, le potentiel de la surface transformée est réduit à zéro.

Si donc on connaît la distribution électrique sur un conducteur isolé dans l'espace indéfini, et chargé au potentiel P, on peut trouver par inversion la distribution sur un conducteur dont la forme est l'image du premier, lorsque ce conducteur mis à la Terre est soumis à l'influence d'une charge — PR placée au centre d'inversion.

---

(1) *Voir* Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 515.

103. Voici quelques théorèmes de Géométrie fort utiles lorsque l'on étudie les cas d'inversion.

Toute sphère se transforme par inversion en une autre sphère, à moins qu'elle ne passe par le centre d'inversion, auquel cas elle se transforme en un plan.

Si a et a' sont les distances au centre d'inversion des centres des deux sphères dont les rayons sont α et α', et si l'on appelle puissance d'une sphère par rapport à un centre d'inversion le produit des segments interceptés par la sphère sur une ligne passant par le centre d'inversion, la puissance de la première sphère est $a^2 - \alpha^2$, et celle de la seconde est $a'^2 - \alpha'^2$. Nous avons dans ce cas

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R^2}{a^2 - \alpha^2} = \frac{a'^2 - \alpha'^2}{R^2}; \tag{19}$$

c'est-à-dire que le rapport des distances des centres de la première et de la seconde sphère est égal au rapport de leurs rayons, et au rapport de la puissance de la sphère d'inversion à la puissance de la première sphère, ou au rapport de la puissance de la seconde sphère à la puissance de la sphère d'inversion.

L'image du centre d'inversion par rapport à une sphère est le point inverse du centre de l'autre sphère.

Dans le cas où les surfaces inverses sont un plan et une sphère, la perpendiculaire abaissée du centre d'inversion sur le plan est au rayon d'inversion comme ce rayon est au diamètre de la sphère; la sphère a son centre sur cette perpendiculaire, et passe par le centre d'inversion.

Une circonférence se transforme en une autre circonférence, à moins qu'elle ne passe par le centre d'inversion; elle devient alors une ligne droite.

L'angle de deux lignes ou de deux surfaces à leur point d'intersection n'est point altéré par l'inversion.

Tout cercle qui passe par un point et par l'image de ce point prise par rapport à une sphère est orthogonal à cette sphère.

Donc, tout cercle qui passe par un point et est orthogonal à la sphère passe par l'image du point.

104. On peut, en appliquant la méthode d'inversion, déduire de la distribution uniforme à la surface d'une sphère isolée qui n'est soumise à aucune influence, la distribution à la surface d'une sphère non isolée soumise à l'influence d'un point électrisé.

Si le point électrisé est placé en A, on le prend comme centre d'inversion; et, s'il est placé à une distance f de la sphère de rayon a,

la figure inverse sera une sphère de rayon a', dont le centre est à une distance f', avec les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{f'}{f} = \frac{R^2}{f^2 - a^2}. \tag{20}$$

Le centre de chacune de ces sphères correspond au point inverse de l'autre par rapport à A, c'est-à-dire que si C est le centre et B le point inverse de la première sphère, C' sera le point inverse et B' le centre de la seconde sphère.

Or soit e' une charge électrique donnée à la seconde sphère, et non soumise à des forces extérieures. Elle se distribuera uniformément sur la sphère, avec une densité superficielle

$$\tau' = \frac{e'}{4\pi a'^2}. \tag{21}$$

Son action sur tout point extérieur à la sphère sera identique à celle d'une charge e' placée au centre B' de la sphère.

Sur la surface sphérique et à l'intérieur, le potentiel est une quantité constante

$$P' = \frac{e'}{a'}. \tag{22}$$

Transformons le système : le centre B' devient alors le point inverse B, et la charge e' de B' devient $e' \frac{R}{f'}$ en B; et en tout point séparé de B par la surface, le potentiel est celui qui est dû à cette charge placée en B.

Le potentiel en un point quelconque P situé sur la surface ou du même côté que B par rapport à cette surface, est dans le système transformé

$$\frac{e'}{a'} \frac{R}{AP}.$$

Si maintenant on superpose à ce système une charge e placée en A, e étant égal à

$$e = -\frac{e'}{a'} R, \tag{23}$$

le potentiel se réduit à zéro sur la surface même et sur tous les points situés du même côté que B. Pour tous les points situés du même côté que A, le potentiel est le même qui serait dû à une charge e en A, et à une charge $e' \frac{R}{f'}$ située en B.

Mais

$$e'\frac{R}{f'} = -e\frac{a'}{f'} = -e\frac{a}{f}, \tag{24}$$

ainsi que nous l'avons vu plus haut, à propos de la charge de l'image B.

Pour trouver la densité en un point quelconque de la première sphère, nous avons

$$\sigma = \sigma'\frac{R^3}{\overline{AP}^3}, \tag{25}$$

et, substituant à σ' son expression en fonction de quantités appartenant à la première sphère, nous trouvons la même valeur qu'au § 158

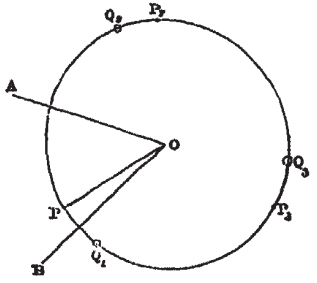
$$\sigma = -\frac{e(f^2-a^2)}{4\pi a\overline{AP}^3}. \tag{26}$$

Sur les systèmes finis d'images successives.

165. Si deux plans conducteurs se coupent sous un angle qui soit un sous-multiple de deux droits, il y a un système d'images en nombre fini qui détermine complètement la distribution.

Soit, en effet, AOB une section des plans conducteurs normale à leur intersection, et soient $AOB = \frac{\pi}{n}$ l'angle d'intersection, P le point électrisé, $PO = r$ et $POB = 0$. Menons un cercle de centre O et de rayon OP, et cherchons les points qui sont les images successives de P

Fig. 10.



dans les deux plans, en commençant par OB. Nous trouvons ainsi Q_1 pour l'image de P dans OB, P_2 pour l'image de Q_1 dans OA, Q_2 pour celle de P_2 dans OB, P_3 pour celle de Q_2 dans OA, et Q_3 pour celle de P_3 dans OB.

Si nous avions commencé par l'image de P dans AO, et que AOB satisfît à la condition d'être une partie aliquote de deux angles droits, nous aurions trouvé les mêmes points dans l'ordre inverse Q_2, P_2, Q_2, P_2, Q_1.

En effet, les images de deux en deux P_1, P_2, P_3, ... sont sur le cercle, à des distances angulaires égales à 2AOB, et les images intermédiaires Q_1, Q_2, Q_3 sont à des intervalles de même grandeur. Donc, si 2AOB est une partie aliquote de 2π, il y aura un nombre fini d'images, dont aucune ne tombera à l'intérieur de l'angle AOB; mais, si AOB n'est pas une partie aliquote de π, il sera impossible de représenter la distribution existante au moyen d'un nombre fini de points électrisés.

Si $AOB = \frac{\pi}{n}$, il y aura n images négatives Q_1, Q_2, ..., toutes égales et de signe contraire à P, et $n-1$ images positives, toutes égales et de même signe.

L'angle compris entre deux images de même signe consécutives est $\frac{2\pi}{n}$. Si nous considérons l'un ou l'autre des plans conducteurs comme plan de symétrie, nous voyons que les images positives et négatives sont placées symétriquement, par rapport à ce plan, en sorte qu'à chaque image positive correspond une image négative placée sur la même normale, à une distance égale, de l'autre côté du plan.

Si, maintenant, nous transformons ce système par rapport à un point quelconque, les deux plans deviennent deux sphères, ou une sphère et un plan se coupant sous l'angle $\frac{\pi}{n}$, le point agissant P étant compris dans cet angle.

Les images successives sont situées sur le cercle qui passe par P et qui coupe orthogonalement les deux sphères.

Pour trouver la position des images, nous pouvons faire usage du principe qu'un point et son image sont sur le même rayon de la sphère : nous sommes conduits à mener des cordes successives dans ce cercle, en partant de P et en passant par le centre de chacune des deux sphères alternativement.

Pour trouver la charge qu'il convient d'attribuer à chaque image, prenons un point quelconque du cercle d'intersection : la charge de chaque image est proportionnelle à sa distance à ce point, et son signe est positif ou négatif, suivant qu'elle appartient au premier ou au second système.

166. Nous avons ainsi trouvé la distribution des images, lorsqu'on soumet à l'influence d'un point électrisé un conducteur formé de deux

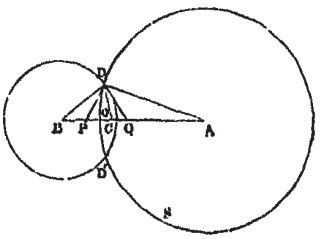
sphères se coupant sous un angle $\frac{\pi}{n}$, et maintenu au potentiel zéro.

De là nous pouvons déduire, par inversion, le cas d'un conducteur formé de deux segments de sphère se coupant sous un angle rentrant égal à $\frac{\pi}{n}$, chargé au potentiel unité et placé dans l'espace indéfini.

A cet effet, transformons le système par rapport à P; le cercle sur lequel étaient les images devient une ligne droite passant par le centre des sphères.

La *fig.* 11 représente une section passant par la ligne des centres AB. Soient D et D′ les points où le cercle d'intersection coupe le plan du papier. Pour trouver les images successives, menons un rayon DA du premier cercle, puis des rayons DC, DB, ..., faisant avec DA des angles $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$. Les points C, B, ..., où ces rayons coupent la ligne des centres, sont les positions des images positives; la charge de chacune d'elles est représentée par sa distance à D. La dernière de ces

Fig. 11.



images est au centre du second cercle.

Pour trouver les images négatives, menons DP, DQ, ..., faisant avec la ligne des centres des angles $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$. L'intersection de ces lignes avec la ligne des centres donnera la position des images négatives, et la charge de chacune d'elles sera représentée par sa distance à D.

La densité superficielle en un point quelconque de l'une ou l'autre des sphères est la somme des densités dues au système d'images. Ainsi, la densité superficielle en un point quelconque S de la sphère qui a son centre en A est

$$\sigma = \frac{1}{4\pi \overline{DA}}\left[1 + \left(\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2\right)\frac{DB}{\overline{BS}^3} + \left(\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2\right)\frac{DC}{\overline{CS}^3} + \cdots\right],$$

où A, B, C, ... sont les images de la série positive.

Si S est sur le cercle d'intersection, la densité est zéro.

Pour trouver la charge totale de chacun des segments sphériques, nous pouvons prendre l'intégrale de surface de l'induction produite à travers ce segment par chacune des images.

La charge totale du segment de centre A, due à l'image A, dont la charge est D, est

$$DA\,\frac{DA - OA}{2\,DA} = \frac{1}{2}(DA - OA),$$

où O est le centre du cercle d'intersection.

De même la charge de chaque segment due à l'image B est $\frac{1}{2}(DB - OB)$, et, ainsi de suite, les lignes telles que OB qui sont mesurées de O vers la gauche, étant comptées négativement.

Donc la charge totale du segment dont le centre est A est

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(DA - DB - DC + \ldots) - \tfrac{1}{2}(OA - OB + OC + \ldots)\\ &-\tfrac{1}{2}(DP - DQ + \ldots\quad\ ) - \tfrac{1}{2}(OP - OQ + \ldots\quad\ ).\end{aligned}$$

167. La méthode des images électriques peut s'appliquer à un espace quelconque, limité par des surfaces planes ou sphériques, se coupant les unes les autres sous des angles qui sont des parties aliquotes de deux angles droits.

Pour qu'un pareil système de surfaces sphériques puisse exister, tous les angles solides de la figure doivent être trièdres et avoir deux de leurs angles droits, et le troisième droit ou partie aliquote de deux droits.

Par suite, les cas où le nombre des images est fini sont les suivants :

1° Une seule surface, plane ou sphérique;

2° Deux plans, une sphère et un plan, ou deux sphères se coupant sous un angle $\frac{\pi}{n}$;

3° Ces deux surfaces, jointes à une troisième, plan ou sphère, qui les coupe orthogonalement;

4° Ces trois surfaces et une quatrième coupant les deux premières orthogonalement et la troisième sous un angle $\frac{\pi}{n}$. De ces quatre surfaces, une au moins doit être sphérique.

Nous avons déjà examiné le premier et le second cas. Dans le premier cas, nous avons une seule image; dans le deuxième, nous en avons $2n - 1$, disposées en deux séries sur une circonférence passant par le point agissant et orthogonales aux deux surfaces. Dans le troisième cas, nous avons, outre les images précédentes, leurs images par rap-

port à la troisième surface, soit en tout $4n-1$ images en outre du point agissant.

Dans le quatrième cas, nous commençons par mener par le point agissant un cercle orthogonal aux deux premières surfaces, sur lequel nous déterminons la position et la grandeur des n images négatives et des $n-1$ images positives; puis, pour chacun de ces $2n$ points (le point agissant compris), nous menons un cercle orthogonal aux deux autres surfaces, sur lequel nous déterminons deux séries de n' images chacune. Nous obtenons ainsi, en sus du point agissant, $2nn'-1$ images positives et $2nn'$ négatives; et ces $4nn'$ points sont les intersections de n cercles avec n' autres cercles, ces cercles appartenant aux deux systèmes de lignes de courbure d'une cyclide.

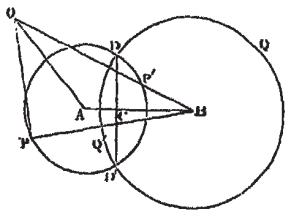
Si chacun de ces points reçoit la charge voulue d'électricité, la surface, dont le potentiel est nul, se compose de $n+n'$ sphères formant deux séries; les sphères successives de la première série se coupent sous un angle $\frac{\pi}{n}$, celles de la seconde série sous un angle $\frac{\pi}{n'}$, et chacune des sphères de chaque série est orthogonale à toutes les sphères de l'autre série.

Cas de deux sphères orthogonales.

(Voir *Pl. IV.*)

168. Soient A et B les centres de deux sphères se coupant orthogonalement en D et D' (*fig.* 12), et soit C le point où la ligne DD'

Fig. 12.



coupe la ligne des centres. C est l'image de A par rapport à la sphère B, et l'image de B par rapport à la sphère A. Si $AD=\alpha$, et $BD=\beta$, $AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; et si l'on place en A, B et C des quantités d'électricité égales à α, β et $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, les deux sphères seront des surfaces équipotentielles, dont le potentiel sera égal à l'unité.

Donc, au moyen de ce système, nous pouvons déterminer la distribution dans les cas suivants :

1° Sur le conducteur PDQD′ que forment les grands segments des deux sphères. Son potentiel est égal à l'unité et sa charge est

$$\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = AD + BD - CD.$$

Cette quantité est donc la mesure de la capacité d'un conducteur de cette forme, qui n'est soumis à aucune action inductive de la part d'autres corps.

La densité en un point quelconque P de la sphère de centre A, et la densité en un point quelconque Q de la sphère de centre B, sont respectivement

$$\frac{1}{4\pi\alpha}\left[1-\left(\frac{\beta}{BP}\right)^3\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{4\pi\beta}\left[1-\left(\frac{\alpha}{AQ}\right)^3\right].$$

Aux points d'intersection D et D′, la densité est zéro.

Si l'une des sphères est beaucoup plus grande que l'autre, à la limite, la densité au sommet de la petite sphère est égale à trois fois la densité au sommet de la grande sphère.

2° La lentille P′DQ′D′, formée par les petits segments des deux sphères, chargée d'une quantité d'électricité $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ et soumise à l'influence des points A et B chargés des quantités α et β, est aussi au potentiel unité, et sa densité est exprimée par les mêmes formules.

3° Le ménisque DPD′Q′, formé par la différence des segments, étant chargé de la quantité α et soumis à l'action des charges β en B et $-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ en C, est aussi en équilibre au potentiel unité.

4° Le ménisque QDP′D′, sous l'influence des points A et C.

On peut aussi en déduire la distribution électrique sur les surfaces internes suivantes :

La lentille creuse PDQ′D′ soumise à l'influence d'un point électrisé intérieur C, placé au centre du cercle DD′;

Le ménisque creux sous l'influence d'un point placé au centre de la surface concave;

Le creux formé par les grands segments des deux sphères, sous l'influence de trois points A, B et C.

Mais, au lieu de rechercher la solution de ces cas, nous allons appliquer le principe des images électriques pour déterminer la densité de la charge induite en un point P de la surface extérieure du conducteur PDQD′, par une unité d'électricité placée au point O.

Soient

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OP = r, \quad BP = p,$$
$$AD = \alpha, \quad BD = \beta, \quad AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Transformons ce système, par rapport à une sphère de centre O et de rayon un.

Les deux sphères restent des sphères orthogonales, ayant leurs centres sur le même rayon que A et B. Si nous distinguons par un accent les quantités relatives au système transformé

$$a' = \frac{a}{a^2 - \alpha^2}, \quad b' = \frac{b}{b^2 - \beta^2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{b^2 - \beta^2},$$
$$r' = \frac{1}{r}, \quad p'^2 = \frac{\beta^2 r^2 - (b^2 - \beta^2)(r^2 - \beta^2)}{r^2 (b^2 - \beta^2)^2}.$$

Si dans le système transformé le potentiel de la surface est égal à l'unité, la densité au point P′ est

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[1 - \left(\frac{\beta'}{p'} \right)^2 \right].$$

Si dans le système primitif la densité en P est σ, on a

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{1}{r^3},$$

et le potentiel est $\frac{1}{r}$. En mettant en O une charge d'électricité négative égale à l'unité, le potentiel deviendra nul sur la surface et la densité en P sera

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha r^3} \left\{ 1 - \frac{\beta^2 r^3}{[\beta^2 r^2 - (b^2 - \beta^2)(r^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

On a ainsi la distribution produite sur l'une des surfaces sphériques par une unité d'électricité placée en O. La distribution sur l'autre surface sphérique s'obtiendra en échangeant a et b, α et β, et en remplaçant p par q ou AQ.

Pour trouver la charge totale induite sur le conducteur par un point électrisé O, examinons le système transformé.

Dans le système transformé, nous avons des charges α' en A′, β' en B′, et une charge négative $\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}$ en un point C′ de la ligne A′B′, tel que

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\alpha'^2}{\beta'^2}.$$

Si

$$OA' = \alpha', \quad O'B' = b', \quad OC' = c',$$

nous trouvons

$$c'^2 = \frac{\alpha'^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2 - \alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2 - \beta'^2}.$$

Transformons ce système, les charges deviennent

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta'}{b'} = \frac{\beta}{b}$$

et

$$-\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\frac{1}{c'} = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

Donc la charge totale qui est induite sur le conducteur par l'unité d'électricité négative placée en O, est

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

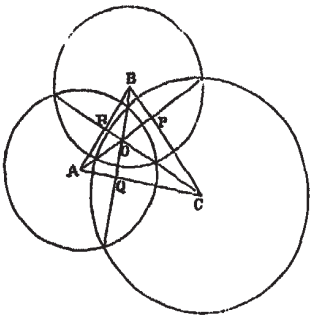
Distribution de l'électricité sur trois surfaces sphériques orthogonales.

169. Soient α, β, γ les rayons des sphères, alors

$$BC = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}, \quad CA = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2}, \quad AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Soient P, Q, R (*fig.* 13) les pieds des perpendiculaires abaissées de A,

Fig. 13.



B, C sur les côtés opposés du triangle, et soit O l'intersection de ces perpendiculaires.

Alors P est l'image de B dans la sphère γ, et l'image de C dans la

sphère β, et O est l'image de P dans la sphère α. Soient α, β, γ les charges placées en A, B et C. La charge en P sera

$$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

De même

$$AP=\frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2x^2+x^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},$$

de sorte que la charge du point O, considéré comme image de P, est

$$\frac{x\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2x^2+x^2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

On trouverait de même le système d'images, qui sont électriquement équivalentes, à quatre surfaces sphériques orthogonales maintenues au potentiel unité.

Si δ est le rayon de cette sphère, et si l'on place au centre de cette sphère une charge égale à δ, la charge au point où la ligne des centres de deux sphères quelconques, α et β par exemple, rencontre leur plan d'intersection, est

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

La charge, au point où le plan de trois centres, A, B, C par exemple, rencontre la perpendiculaire abaissée de D est

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}},$$

et la charge, au point d'intersection des quatre perpendiculaires, est

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}}}.$$

Système de quatre sphères orthogonales soumis à l'influence d'un point électrisé.

170. Soient A, B, C, D les quatre sphères, et soit O le point électrisé. Traçons quatre sphères A_1, B_1, C_1, D_1, dont chacune A_1 passe

par le point O et coupe orthogonalement trois des sphères primitives B, C et D dans le cas présent; menons six sphères (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) passant chacune par le point O et par le cercle d'intersection de deux des sphères primitives.

Les trois sphères B_1, C_1, D_1 se coupent en un second point différent de O. Soit A′ ce point, et soient B′, C′ et D′ les intersections de C_1, D_1 et A_1, de D_1, A_1 et B_1, et de A_1, B_1 et C_1. Deux quelconques de ces sphères A_1, B_1 coupent l'une des six sphères (cd) en un point $(a'b')$; il y a donc six de ces points.

Une quelconque des sphères A_1 coupe trois des six sphères (ab), (ac), (ad) en un point a'. Il y a quatre points de cette espèce. Enfin, les six sphères (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) se coupent en un point S.

Si maintenant nous transformons le système par rapport à une sphère de rayon R et de centre O, les quatre sphères A, B, C, D se transforment en sphères, et les dix autres sphères en plans. Des points d'intersection des quatre premières, A′, B′, C′ et D′, deviennent les centres des sphères : les autres correspondent aux onze autres points du paragraphe précédent, et ces quinze points forment l'image de O dans le système des quatre sphères.

Au point A′, image de O dans la sphère A, il faut placer une charge égale à l'image de O, c'est-à-dire $-\frac{\alpha}{a}$, α étant le rayon de la sphère A et a la distance de son centre au point O. De même, il faut placer les charges voulues en B′, C′ et D′.

Les charges de chacun des onze points restants peuvent se déduire des expressions trouvées au paragraphe précédent, en substituant α', β', γ' et δ' à α, β, γ et δ, et multipliant le résultat obtenu pour chaque point par la distance de ce point au point O, en employant la notation suivante :

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{b^2 - \beta^2}, \quad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2 - \gamma^2}, \quad \delta' = -\frac{\delta}{d^2 - \delta^2}.$$

[Les cas étudiés aux §§ 169 et 170 peuvent être traités comme il suit : Prenons trois plans coordonnés rectangulaires, et plaçons des charges $\pm e$, en chacun des huit points du système $\left(\pm\frac{1}{2\alpha}, \pm\frac{1}{2\beta}, \pm\frac{1}{2\gamma}\right)$, les charges négatives étant placées aux points qui ont une ou trois coordonnées négatives. Il est clair qu'alors les plans coordonnés sont au potentiel zéro. Transformons alors par rapport à un point quelconque, et nous avons le cas de trois sphères se coupant orthogonale-

ment soumises à l'influence d'un point électrisé. Si nous transformons par rapport à un des points électrisés, nous avons la solution pour le cas d'un conducteur ayant la forme de trois sphères de rayons α, β et γ se coupant orthogonalement, et librement chargé.

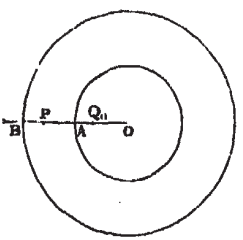
Si au système de points électrisés décrit ci-dessus, nous ajoutons son image par rapport à une sphère ayant son centre à l'origine, nous voyons qu'en outre des trois plans coordonnés, la surface de la sphère fait aussi partie de la surface au potentiel zéro].

Deux sphères qui ne se coupent pas.

171. Lorsqu'un espace est limité par deux surfaces sphériques qui ne se coupent pas, les images successives d'un point agissant intérieur à cet espace forment deux séries infinies situées l'une et l'autre en dehors de ces sphères : la condition, pour que l'on puisse appliquer la méthode des images électriques, est donc satisfaite.

Deux sphères quelconques qui ne se coupent pas se transforment

Fig. 14.



en deux sphères concentriques, si l'on prend pour centre d'inversion l'un ou l'autre des deux points inverses communs aux deux sphères.

Nous commencerons donc par le cas de deux surfaces sphériques concentriques non isolées et soumises à l'influence d'un point électrisé placé entre les deux surfaces.

Soient b le rayon de la première, be^{ϖ} celui de la seconde; et soit $r = be^{u}$ la distance du centre au point agissant.

Toutes les images successives seront sur le même rayon que le point agissant.

Soient Q_0 (*fig.* 14) l'image de P par rapport à la première sphère; P_1 l'image de Q_0 par rapport à la seconde sphère; Q_1 celle de P_1 par

rapport à la première, et ainsi de suite; alors

$$OP_s.OQ_s = b^2, \quad OP_s.OQ_{s-1} = b^2 e^{2\varpi},$$
$$OQ_0 = be^{-u}, \quad OP_1 = be^{u+2\varpi}, \quad OQ_1 = be^{-(u+2\varpi)}, \quad \ldots,$$

d'où

$$OP_s = be^{(u+2s\varpi)}, \quad OQ_s = be^{-(u+2s\varpi)};$$

et, si l'on représente par P la charge du point P, on a

$$P_s = Pe^{s\varpi}, \quad Q_s = Qe^{-(s\varpi+u)}.$$

Soient maintenant Q'_1 l'image de P dans la seconde sphère, P'_1 celle de Q'_1 dans la première, etc.

$$\begin{aligned} OQ'_1 &= be^{2\varpi-u}, & OP'_1 &= be^{u-2\varpi}, \\ OQ'_2 &= be^{4\varpi-u}, & OP'_2 &= be^{u-4\varpi}, \\ OQ'_s &= be^{2s\varpi-u}, & OP'_s &= be^{u-2s\varpi}, \\ Q'_s &= -Pe^{s\varpi-u}, & P'_s &= Pe^{-s\varpi}. \end{aligned}$$

Parmi ces images, tous les P sont positifs et tous les Q sont négatifs; tous les P et tous les Q appartiennent à la première sphère, tous les P' et tous les Q' à la seconde sphère.

Les images intérieures à la première sphère forment une série convergente dont la somme est

$$-P\frac{e^{\varpi-u}-1}{e^{\varpi}-1}.$$

Telle est donc la quantité d'électricité répandue sur la première sphère, la sphère intérieure. Les images extérieures à la seconde sphère forment une série divergente; mais l'intégrale de surface de chacune de ces images, par rapport à la sphère, est égale à zéro. La charge électrique sur la sphère extérieure est donc

$$P\left(\frac{e^{\varpi-u}-1}{e^{\varpi}-1}\right) = -P\frac{e^{\varpi}-e^{\varpi-u}}{e^{\varpi}-1}.$$

Si nous substituons à ces expressions leurs valeurs en fonction de OA, OB et OP, nous trouvons

$$\text{charge de A} = -P\frac{OA.PB}{OP.AB},$$
$$\text{charge de B} = -P\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}.$$

Si l'on suppose que les rayons des deux sphères deviennent infinis, le cas devient celui d'un point électrisé placé entre deux plans paral-

lèles A et B. Dans ce cas, les expressions deviennent

$$\text{charge de A} = -P\,\frac{PB}{AB^2}$$

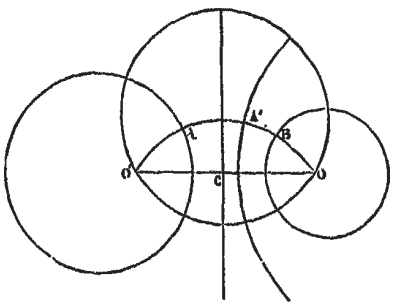
$$\text{charge de B} = -P\,\frac{AP}{AB}.$$

172. Pour passer de ce cas à celui de deux sphères qui ne se coupent pas, commençons par trouver les deux points inverses communs O et O′, par lesquels passent tous les cercles orthogonaux aux deux sphères. Si alors nous transformons le système par rapport à l'un ou l'autre de ces points, les deux sphères deviennent concentriques, comme dans le premier cas.

Si nous prenons pour centre d'inversion le point O de la *fig.* 15, ce point sera placé dans la *fig.* 14, quelque part entre les deux sphères.

Or, au § 171, nous avons traité le cas d'un point électrisé placé

Fig. 15.



entre deux conducteurs concentriques maintenus au potentiel zéro. Donc, en transformant ce cas par rapport au point O, nous en tirerons la distribution de l'électricité sur deux conducteurs sphériques extérieurs l'un à l'autre, maintenus au potentiel zéro, et soumis à l'influence d'un point électrisé placé dans le voisinage. On verra au § 173 comment les résultats ainsi obtenus peuvent servir à trouver la distribution sur deux conducteurs sphériques électrisés et soumis uniquement à leurs influences réciproques.

Le rayon OAPB de la *fig.* 14, sur lequel se trouvent les images successives, devient dans la *fig.* 15 un arc de cercle passant par O et O′; et le rapport de O′P à OP est égal à Ce^{u}, où C est une quantité numérique.

Si nous posons

$$\theta = \log\frac{O'P}{OP}, \quad \alpha = \log\frac{O'A}{OA}, \quad \beta = \log\frac{O'B}{OB},$$

on a

$$\beta - \alpha = \varpi, \quad \alpha + \alpha = \theta.$$

Toutes les images de P seront sur l'arc OAPBO'.

La position de l'image de P dans la sphère A est Q_0, ou

$$\theta(Q_0) = \log\frac{O'Q}{OQ} = 2\alpha - \theta;$$

celle de Q_0, dans la sphère B, est P_1, où

$$\theta(P_1) = \log\frac{O'P_1}{OP_1} = \theta + 2\varpi.$$

De même,

$$\theta(P_s) = \theta + 2s\varpi, \quad \theta(Q_s) = 2\alpha - \theta - 2s\varpi.$$

De même, les images successives de P par rapport à B, A, B, ..., étant Q'_0, P'_1, Q'_1, ...,

$$\theta(Q'_0) = 2\beta - \theta, \quad \theta(P'_1) = \theta - 2\varpi,$$
$$\theta(P'_s) = \theta - 2s\varpi, \quad \theta(Q'_s) = 2\beta - \theta + 2s\varpi.$$

Pour trouver la charge d'une image P_s, observons que sa charge dans le système transformé est

$$P\sqrt{\frac{OP_s}{OP}},$$

ce qui doit être multiplié par OP_s dans la figure primitive. Donc la charge de P_s dans la figure bipolaire est

$$P\sqrt{\frac{OP_s \cdot O'P_s}{OP \cdot O'P}}.$$

Si nous posons $\xi = \sqrt{OP \cdot O'P}$, et si nous appelons ξ le paramètre du point P, nous pouvons écrire

$$P_s = \frac{\xi_s}{\xi} P,$$

c'est-à-dire que la charge d'une image est proportionnelle à son paramètre.

Si nous employons les coordonnées curvilignes θ et φ, en sorte que

$$e^{\theta+\sqrt{-1}\varphi} = \frac{x + \sqrt{-1}y - k}{x + \sqrt{-1}y + k},$$

en appelant $2k$ la distance OO', on aura

$$x = -\frac{k\sinh\theta}{\cosh\theta - \cos\varphi}, \quad y = \frac{k\sin\varphi}{\cosh\theta - \cos\varphi},$$

$$x^2 + (y - k\cot\varphi)^2 = k^2\operatorname{cosec}^2\varphi,$$

$$(x + k\coth\theta)^2 + y^2 = k^2\operatorname{cosec}\hbar^2\theta.$$

$$\cot\varphi = \frac{x^2 + y^2 - k^2}{2ky}, \quad \coth\theta = -\frac{x^2 + y^2 + k^2}{2kx},$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\cosh\theta - \cos\varphi}} \quad (^1).$$

Puisque la charge de chaque image est proportionnelle à son paramètre et doit être prise positive ou négative, suivant qu'elle est de la forme P ou de la forme Q, nous trouvons

$$P_s = \frac{P\sqrt{\cosh\theta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\theta + 2s\varpi) - \cos\varphi}},$$

$$Q_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\theta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \theta - 2s\varpi) - \cos\varphi}},$$

$$P'_s = \frac{P\sqrt{\cosh\theta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\theta - 2s\varpi) - \cos\varphi}},$$

$$Q'_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\theta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\beta - \theta + 2s\varpi) - \cos\varphi}}.$$

Nous avons ainsi obtenu les positions et les charges de deux séries infinies d'images. Nous avons maintenant à déterminer la charge totale de la sphère A, en trouvant la somme des images intérieures de

---

(1) Il faut se rappeler que dans ces expressions

$$2\cosh\theta = e^{\theta} + e^{-\theta}, \quad 2\sinh\theta = e^{\theta} - e^{-\theta},$$

et que toutes les autres fonctions de θ se dérivent de celles-ci d'après les mêmes règles que les fonctions trigonométriques ordinaires correspondantes.

La manière d'appliquer les coordonnées bipolaires à cette question a été indiquée par Thomson, dans le *Journal de Liouville* de 1847. (*Voir* Thomson, *Reprint of Papers*, § 211 et 212.) Dans le texte, je me suis servi de la méthode du professeur Betti (*Nuovo Cimento*, vol. XX) pour ce qui est de la méthode analytique; mais j'ai conservé la notion des images électriques, telle qu'elle a été employée par Thomson dans son Mémoire original, *Phil. Mag.*, 1853.

la forme P′ ou de la forme Q. Nous pouvons écrire cette somme

$$P\sqrt{\cosh\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta-2s\varpi)-\cos\varphi}},$$

$$-P\sqrt{\cosh\theta-\cos\varphi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha-\theta-2s\varpi)-\cos\varphi}}.$$

De même la charge totale induite sur B est

$$P\sqrt{\cosh\theta-\cos\varphi}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta+2s\varpi)-\cos\varphi}},$$

$$-P\sqrt{\cosh\theta-\cos\varphi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\beta-\theta+2s\varpi)-\cos\varphi}}.$$

173. Nous allons appliquer ces résultats à la détermination des coefficients de capacité et d'induction dans le cas de deux sphères de rayons a et b, dont la distance des centres est c.

Supposons la sphère A au potentiel unité, et la sphère B au potentiel zéro.

Les images successives d'une charge a placée au centre de la sphère A seront celles qui correspondent à la distribution actuelle. Toutes les images seront sur l'axe, entre les pôles et les centres des sphères; et l'on observera que des quatre systèmes d'images déterminés au § 172, le premier et le quatrième seulement existent dans le cas présent.

Si nous posons

$$k=\frac{\sqrt{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2}}{2c},$$

nous aurons

$$\sinh\alpha=-\frac{k}{a},\quad \sinh\beta=-\frac{k}{b}.$$

Les valeurs de θ et de φ, au centre de la sphère A, sont

$$\theta=2\alpha,\quad \varphi=0.$$

Si donc, dans les équations, nous substituons à P, a ou $-k\frac{1}{\sinh\alpha}$; à θ, 2α et à φ, 0, en nous souvenant que P lui-même fait partie de la charge de A, nous trouvons pour le coefficient de capacité de A

$$q_{aa}=k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(s\varpi-\alpha)};$$

pour le coefficient d'induction de A sur B ou de B sur A

$$q_{ab} = -k \sum_{s=b}^{s=\infty} \frac{1}{\sinh s\varpi},$$

De même, en supposant B au potentiel unité et A au potentiel zéro, nous pouvons déterminer la valeur de q_{bb}; nous trouvons avec notre notation actuelle

$$q_{bb} = k \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\sinh(\beta + s\varpi)}.$$

Pour calculer ces quantités en fonction des rayons a et b des sphères et de la distance c de leurs centres, nous remarquerons que, si

$$K = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2},$$

nous pouvons écrire

$$\sinh\alpha = -\frac{K}{2ac}, \quad \sinh\beta = \frac{K}{2bc}, \quad \sinh\varpi = \frac{K}{2ab},$$

$$\cosh\alpha = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cosh\beta = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}, \quad \cosh\varpi = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab},$$

et, nous servant de la relation

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta,$$
$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta.$$

De cette manière, ou bien en calculant directement les images successives par la méthode indiquée dans le Mémoire de Sir W. Thomson, nous trouvons

$$q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3 b^3}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \cdots,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3 b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - a^2 - b^2 - ab)} - \cdots,$$

$$q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^3 b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \cdots.$$

174. Nous avons alors les équations suivantes pour déterminer les charges E_a et E_b des deux sphères, quand elles sont portées aux potentiels V_a et V_b,

$$E_a = V_a q_{aa} + V_b q_{ab},$$
$$E_b = V_a q_{ab} + V_b q_{bb}.$$

Si nous posons

$$q_{aa}q_{bb} - q_{ab}^2 = \mathrm{D} = \frac{1}{\mathrm{D}'}$$

et

$$p_{aa} = q_{bb}\mathrm{D}', \quad p_{ab} = -q_{ab}\mathrm{D}', \quad p_{bb} = q_{aa}\mathrm{D}',$$

d'où

$$p_{aa}p_{bb} - p_{ab}^2 = \mathrm{D}',$$

les équations qui déterminent les potentiels en fonction des charges sont

$$\mathrm{V}_a = p_{aa}\mathrm{E}_a + p_{ab}\mathrm{E}_b,$$
$$\mathrm{V}_b = p_{ab}\mathrm{E}_a + p_{bb}\mathrm{E}_b,$$

où p_{aa}, p_{ab} et p_{bb} sont les coefficients de potentiel.

L'énergie totale du système est, d'après le § 85,

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{E}_a\mathrm{V}_a + \mathrm{E}_b\mathrm{V}_b),\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{V}_a^2 q_{aa} + 2\mathrm{V}_a\mathrm{V}_b q_{ab} + \mathrm{V}_b^2 q_{bb})\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{E}_a^2 p_{aa} + 2\mathrm{E}_a\mathrm{E}_b p_{ab} + \mathrm{E}_b^2 p_{bb}).\end{aligned}$$

La répulsion qui s'exerce entre les sphères est donc, d'après les §§ 92 et 93,

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{V}_a^2\frac{dq_{aa}}{dc} + 2\mathrm{V}_a\mathrm{V}_b\frac{dq_{ab}}{dc} + \mathrm{V}_b^2\frac{dq_{bb}}{dc}\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{E}_a^2\frac{dp_{aa}}{dc} + 2\mathrm{E}_a\mathrm{E}_b\frac{dp_{ab}}{dc} + \mathrm{E}_b^2\frac{dp_{bb}}{dc}\right),\end{aligned}$$

c étant la distance des centres des sphères.

De ces deux expressions de la répulsion, la première, qui est exprimée en fonction des potentiels des sphères et des variations des coefficients de capacité et d'induction, est la plus commode pour les calculs.

Nous devons donc différentier les q par rapport à c. Ces quantités, qui sont exprimées en fonction de k, α, β et ϖ, doivent être différentiées, en supposant a et b constants. Nous avons les équations

$$k = -a\sinh\alpha = b\sinh\beta = -c\frac{\sinh\alpha.\sinh\beta}{\sinh\varpi};$$

nous en tirons

$$\frac{dk}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\varpi},$$
$$\frac{d\alpha}{dc} = \frac{\sinh\alpha\cosh\beta}{k\sinh\varpi},$$
$$\frac{d\beta}{dc} = \frac{\cosh\alpha\sinh\beta}{k\sinh\varpi},$$
$$\frac{d\varpi}{dc} = \frac{1}{k};$$

d'où il vient

$$\frac{dq_{aa}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh w}\frac{q_{aa}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + b\cosh\beta)\cosh(sw - \alpha)}{c\sinh^2(sw - \alpha)},$$

$$\frac{dq_{ab}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh w}\frac{q_{ab}}{k} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s\cosh sw}{\sinh^2 sw},$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh w}\frac{q_{bb}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc - a\cosh\alpha)\cosh(sw + \beta)}{c\sinh^2(\beta + sw)}.$$

Sir W. Thomson a calculé la force qui s'exerce entre deux sphères de même rayon, séparées par une distance moindre que le diamètre de chacune d'elles. Pour des distances plus grandes, il n'est pas nécessaire d'employer plus de deux ou trois images successives.

La série des coefficients différentiels de q, par rapport à c, s'obtient aisément par différentiation directe.

$$\frac{dq_{aa}}{dc} = -\frac{2a^2bc}{(c^2-b^2)^2} - \frac{2a^2b^2c(2c^2-2b^2-a^2)}{(c^2-b^2+ac)^2(c^2-a^2-b^2-ab)^2} - \cdots,$$

$$\frac{dq_{ab}}{dc} = \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2(3c^2-a^2-b^2)}{c^2(c^2-a^2-b^2)} + \frac{a^2b^2\left[(5c^2-a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)-a^2b^2\right]}{c^2(c^2-a^2-b^2+ab)^2(c^2-a^2-b^2-ab)^2} - \cdots,$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc} = -\frac{2ab^2c}{(c^2-a^2)^2} - \frac{2a^2b^2c(2c^2-2a^2-b^2)}{(c^2-a^2+bc)^2(c^2-a^2-bc)^2} - \cdots.$$

Distribution électrique sur deux sphères en contact.

175. Si nous supposons les deux sphères au potentiel unité, sans influence d'aucun autre point, et si nous transformons le système par rapport au point de contact, nous aurons deux plans parallèles, aux distances $\frac{1}{2a}$ et $\frac{1}{2b}$ du point d'inversion, soumis à l'influence d'une unité d'électricité placée en ce point.

Il y aura une série d'images positives, toutes égales à l'unité, à des distances $s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ de l'origine, s étant un nombre entier quelconque compris entre $-\infty$ et $+\infty$.

Il y aura aussi une série d'images négatives toutes égales à -1, dont les distances à l'origine, comptées dans le sens de a, sont $\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Si ce système est transformé de nouveau et ramené à la forme de deux sphères en contact, nous avons une série correspondante d'images négatives, dont les distances au point de contact sont de la forme $\frac{1}{s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, où s est positif pour la sphère A et négatif pour la sphère B. La charge de chaque image (le potentiel des sphères étant égal à l'unité) est numériquement égale à sa distance au point de contact et est toujours négative.

Il y aura aussi une série d'images positives, dont les distances au point de contact, mesurées dans la direction du centre de A, sont de la forme $\frac{1}{\frac{1}{a}+s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$.

Lorsque s est zéro ou un entier positif, l'image est intérieure à la sphère A.

Si s est un entier négatif, l'image est dans la sphère B.

La charge de chaque image a pour mesure sa distance à l'origine et est toujours positive.

La charge totale de la sphère A est donc

$$E_a = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a}+s\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \frac{ab}{a+b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s},$$

Chacune de ces séries est infinie, mais, si nous les combinons sous la forme

$$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2 b}{s(a+b)[s(a+b)-a]},$$

la série devient convergente.

De même, pour la charge de la sphère B,

$$E_b = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab}{s(a+b)-b} - \frac{ab}{a+b}\sum_{s=-1}^{s=-\infty}\frac{1}{s},$$

$$= \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab^2}{s(a+b)[s(a+b)-b]}.$$

L'expression de E_a est évidemment égale à

$$\frac{ab}{a+b}\int_0^1 \theta \frac{\theta^{\frac{b}{a+b}-1}-1}{1-\theta}\,d\theta,$$

qui est la forme sous laquelle Poisson avait donné ce résultat.

On peut aussi montrer (LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 438) que la série E_a qui précède est égale à

$$a - \left[\gamma + \Psi\left(\frac{b}{a+b}\right)\right]\frac{ab}{a+b},$$

où $\gamma = 0{,}57712$, et où $\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(1+x)$.

On a dressé une table des valeurs de Ψ. (Voir *Œuvres de Gauss*, t. III, p. 161-162.)

Si l'on désigne un instant $\frac{b}{a+b}$ par x, la différence entre les charges E_a et E_b est

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\log\Gamma(x)\Gamma(1-x) \times \frac{ab}{a+b} \\ &= \frac{d}{dx}\log\sin\pi x \times \frac{ab}{a+b} \\ &= \pi\frac{ab}{a+b}\cot\frac{\pi b}{a+b}. \end{aligned}$$

Si les sphères sont égales et au potentiel unité, la charge de chacune est

$$\begin{aligned} E_a &= a\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{2s(2s-1)} \\ &= a\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots\right) \\ &= a\log_e 2 = 0{,}693147\,18\,a. \end{aligned}$$

Si la sphère A est très petite par rapport à la sphère B, la charge de A est approximativement

$$E_a = \frac{a^2}{b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2}$$

ou

$$E_a = \frac{\pi^2}{6}\frac{a^2}{b}.$$

La charge de B est à peu près la même que si A était enlevé, ou

$$E_b = b.$$

La densité moyenne sur chaque sphère s'obtient en divisant la charge

par la surface; on obtient ainsi

$$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{24b},$$

$$\sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b},$$

$$\sigma_c = \frac{\pi^2}{6}\,\sigma_b.$$

Donc, si une très petite sphère est mise en contact avec une très grande, la densité moyenne sur la petite sphère est égale à celle de la grande sphère multipliée par $\frac{\pi^2}{6}$ ou 1,644936.

Application de l'inversion électrique au cas d'une calotte sphérique.

176. Un des plus remarquables exemples de la puissance de la méthode des images électriques est l'étude faite par Sir W. Thomson de la distribution sur une calotte sphérique. Les résultats de cette étude furent communiqués sans démonstration à M. Liouville et publiés dans son journal en 1847. Le travail complet est donné dans le *Reprint of Electrical papers* de Thomson, art. XV. Je ne sache pas qu'aucun autre mathématicien ait résolu le problème de la distribution sur une portion limitée de surface courbe.

Comme je me propose d'exposer la méthode plutôt que de vérifier les calculs, je ne m'étendrai point sur les considérations géométriques ni sur l'intégration, et je renvoie le lecteur à l'Ouvrage de Thomson.

Distribution sur un ellipsoïde.

177. On démontre, par une méthode bien connue (1), que l'attraction d'une couche limitée par les surfaces de deux ellipsoïdes semblables, semblablement placés et concentriques, est telle qu'il n'y a point d'attraction résultante sur un point intérieur à la couche. Si nous supposons que l'épaisseur de la couche décroisse indéfiniment, en même temps que sa densité augmente, à la limite nous arrivons à concevoir la densité comme variant proportionnellement à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, et, puisque dans cette distribution superficielle l'attraction sur un point intérieur à l'ellipsoïde est nulle, l'électricité ainsi distribuée sur la surface est en équilibre.

---

(1) Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 150 de cet Ouvrage.

Donc la densité, superficielle en un point d'un ellipsoïde non soumis à des influences extérieures, est proportionnelle à la distance du centre au plan tangent.

Distribution sur un disque.

En faisant deux axes de l'ellipsoïde égaux et faisant tendre le troisième vers zéro, nous arrivons au cas d'un disque circulaire, et nous avons l'expression de la densité superficielle en un point quelconque P d'un tel disque chargé au potentiel V, sans être soumis à aucune influence intérieure. Si σ est la densité superficielle sur une des faces du disque, et si — KPL est une corde menée par le point P,

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{KP.PL}}.$$

Application du principe de l'inversion électrique.

178. Prenons pour centre d'inversion un point quelconque Q, et soit R le rayon de la sphère d'inversion. Le plan du disque devient une surface sphérique passant par Q, et le disque lui-même devient une portion de sphère limitée par un cercle. C'est cette portion que nous appellerons la *calotte*.

Si S′ est le disque électrisé au potentiel V′ et soustrait à toute influence extérieure, son image S sera un segment de sphère électrisé par l'influence d'une quantité d'électricité V′R placée en Q.

La méthode d'inversion nous donne donc la solution du problème de la distribution électrique sur une calotte sphérique ou sur un disque plan soumis à l'influence d'un point électrisé placé sur le prolongement de la surface de la sphère ou du plan.

Influence d'un point électrisé situé sur la partie non employée de la surface sphérique.

La solution se déduit des principes géométriques et de la méthode d'inversion exposés plus haut.

Soit C le point central ou le pôle de la calotte S, et soit a la distance de C à un point de l'arête circulaire du segment. Si une quantité q d'électricité est placée en un point Q de la surface de la sphère prolongée, et si le segment S est maintenu au potentiel zéro, la densité σ en un point quelconque P de la surface de la calotte est

$$\sigma = \frac{1}{2\pi^2}\frac{q}{\overline{QP}^2}\sqrt{\frac{\overline{CQ}^2 - a^2}{a^2 - \overline{CP}^2}},$$

CQ, CP et QP étant les lignes droites qui joignent les points C, Q et P.

Il est à remarquer que cette expression ne dépend pas du rayon de la sphère à laquelle est emprunté le segment. Elle s'applique donc sans changement au cas d'un disque plan.

Influence d'un nombre quelconque de points électrisés.

Considérons maintenant la sphère comme divisée en deux parties : le segment sphérique sur lequel nous avons déterminé la distribution, et que nous appellerons la *calotte*, et le reste de la surface la partie non utilisée, sur laquelle est placé le point agissant Q.

Si un nombre quelconque de points agissants sont répandus sur le reste de la sphère, la charge induite par eux sur un point quelconque de la calotte peut s'obtenir en additionnant les densités induites par chacun d'eux séparément.

179. Supposons tout le reste de la surface de la sphère couvert d'une charge uniforme de densité ρ; la densité en un point quelconque de la calotte s'obtiendra par une simple intégration étendue à la surface ainsi électrisée.

Nous obtiendrons ainsi la solution pour le cas où la calotte est au potentiel zéro, et soumise à l'influence du reste de la sphère couvert d'une couche fixe de densité ρ.

Isolons maintenant tout le système, et mettons-le à l'intérieur d'une sphère de diamètre f, couverte d'une couche fixe d'électricité de densité ρ'.

Il n'y aura point de force résultante à l'intérieur de cette sphère; la distribution ne sera donc pas changée sur la calotte, mais le potentiel de tous les points intérieurs à cette sphère sera accru d'une quantité V, telle que

$$V = 2\pi\rho' f.$$

Donc le potentiel deviendra V en tous les points de la calotte.

Supposons maintenant que cette sphère soit concentrique à celle dont fait partie la calotte, et que son rayon dépasse celui de cette dernière sphère d'une quantité infiniment petite.

Nous avons alors le cas d'une calotte maintenue au potentiel V, et soumise à l'influence du reste de la sphère chargé d'une charge fixe dont la densité superficielle est $\rho + \rho'$.

180. Nous n'avons plus alors qu'à supposer $\rho + \rho'$ égal à zéro, et

nous avons le cas d'une calotte maintenue au potentiel V et soustraite à toute influence extérieure.

Soit σ la densité en un point donné sur l'une ou l'autre des surfaces du segment, celui-ci étant au potentiel zéro et soumis à l'influence du reste de la sphère chargée à la densité ρ. Si le segment est maintenu au potentiel V, il faudra augmenter la densité sur l'extérieur du segment de la densité ρ' de la sphère enveloppante supposée.

Le résultat de cette analyse est que, si f est le diamètre de la sphère, a le rayon du segment, r la distance de P au pôle du segment, la densité superficielle sur la surface intérieure du segment est

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2 f}\left(\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \tan g^{-1}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right),$$

et la densité superficielle au même point, mais à l'extérieur du segment, est

$$\sigma + \frac{V'}{2\pi f}.$$

Pour calculer ce résultat, on n'a pas à faire d'opération plus compliquée qu'une simple intégration étendue sur une fraction de surface sphérique. Et pour achever la théorie de la distribution sur un segment de sphère, nous n'avons plus à introduire d'autre considération géométrique que celle de l'inversion dans lessur faces sphériques.

181. Soit à trouver la densité superficielle en un point d'un segment soumis à l'influence d'une charge q placée en un point Q non situé sur le prolongement de la surface sphérique.

Transformons le segment par rapport à Q, le rayon de la sphère d'inversion étant égal à R. Le segment S se transforme en son image S', et le point P a pour image P'. Nous avons alors à déterminer la densité σ' au point P', le segment S' étant maintenu à un potentiel V' tel que $q = V'R$, et soustrait d'ailleurs à toute influence extérieure.

La densité σ au point P du segment primitif est alors

$$\sigma = -\frac{\sigma' R^3}{\overline{QP}^3},$$

ce segment étant au potentiel zéro et soumis à l'influence d'une quantité q d'électricité placée en Q.

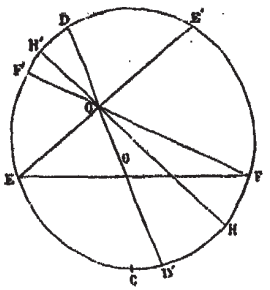
Le résultat de cette opération est le suivant :

Supposons que la figure représente une section menée par le centre O de la sphère, le pôle C du segment et le point agissant Q; D est un

point qui, dans la figure transformée, répond au pôle non occupé, du côté de la base du segment; il peut être obtenu par la construction suivante :

Menons par Q les cordes EQE′ et FQF′. Alors, si nous supposons que le rayon de la sphère d'inversion est une moyenne proportionnelle

Fig. 16.



entre les segments que le point Q détermine sur la corde, E′F′ sera l'image de EF. Prenons le milieu D′ de l'arc F′CE′, de façon que F′D′ = F′E′, et menons D′QD qui rencontre la sphère en D; D est le point cherché. De même, par O, centre de la sphère, et par Q, menons HOQH′, qui coupe la sphère en H et en H′. Alors, si P est un point du segment, la densité superficielle en P, du côté du segment qui est séparé de Q par le reste de la surface sphérique, densité due à l'induction d'une charge q placée en Q, sera

$$\tau = \frac{q}{2\pi^2}\,\frac{\mathrm{QH.QH'}}{\mathrm{HH'.\overline{PQ}^3}}\left\{\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{DQ}}\left(\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2 - a^2}{a^2 - \overline{\mathrm{CP}}^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{tang}^{-1}\left[\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{DQ}}\left(\frac{\overline{\mathrm{CD}}^2 - a^2}{a^2 - \overline{\mathrm{CP}}^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

a désignant la corde menée du pôle C à la base circulaire du segment.

Du côté le plus voisin de Q, la densité superficielle est

$$\sigma + \frac{q}{2\pi}\,\frac{\mathrm{QH.QH'}}{\mathrm{HH'.\overline{PQ}^3}}.$$

CHAPITRE XII.

THÉORIE DES FONCTIONS CONJUGUÉES A DEUX DIMENSIONS.

182. Il n'y a qu'un nombre très restreint de cas véritablement indépendants, pour lesquels ait été résolu le problème de l'équilibre électrique. La méthode des harmoniques sphériques a été appliquée aux conducteurs sphériques; les méthodes des images électriques et de l'inversion sont encore plus puissantes dans les cas où elles peuvent s'appliquer. Mais, à ma connaissance, le cas des surfaces du second degré est le seul où l'on connaisse à la fois les surfaces équipotentielles et les lignes de force, lorsque ces lignes de force ne sont point des courbes planes.

Mais il y a une classe de problèmes très importants dans la théorie de l'équilibre électrique et dans celle de la conduction des courants, où l'on n'a à considérer qu'un espace à deux dimensions.

Par exemple, si dans toute la partie du champ électrique que l'on considère, et au delà encore, les surfaces de tous les conducteurs sont engendrées par le mouvement de lignes droites parallèles à l'axe des z, et si la partie du champ où il cesse d'en être ainsi est si éloignée de la partie considérée que l'on puisse négliger l'action électrique de cette partie éloignée, l'électricité se distribue uniformément tout le long des génératrices; et si nous considérons une partie du champ limitée par deux plans perpendiculaires à l'axe des z et distants de l'unité de longueur, le potentiel et la distribution électriques seront des fonctions de x et y seulement.

Soient $\rho dx\,dy$ la quantité d'électricité répandue dans un élément ayant $dx\,dy$ pour base et l'unité pour hauteur, et σds la quantité répandue sur un élément de surface dont la base est l'élément linéaire ds, et dont la hauteur est égale à l'unité.

L'équation de Poisson peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\rho = 0,$$

ce qui se réduit, s'il n'y a point d'électricité libre, à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Le problème général de l'équilibre électrique peut s'énoncer comme il suit :

Étant donné un espace continu à deux dimensions limité par des courbes fermées $C_1, C_2, \ldots$, trouver la forme d'une fonction V telle que, sur ces limites, elle prenne les diverses valeurs $V_1, V_2, \ldots$ constantes pour chaque limite; et que dans l'étendue de cet espace V soit fini, continu, n'ait en chaque point qu'une valeur unique et satisfasse à l'équation de Laplace.

Je ne sache pas que l'on ait donné aucune solution parfaitement générale, même de la question ainsi limitée; mais la méthode de transformation qui est donnée au § 190, et peut s'appliquer à ce cas, est bien plus puissante que toute méthode connue pouvant s'appliquer à l'espace à trois dimensions.

La méthode repose sur les propriétés des fonctions conjuguées de deux variables.

Définitions des fonctions conjuguées.

183. On dit que deux quantités α et β sont des fonctions conjuguées de x et y, si $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ est une fonction de $x + \sqrt{-1}\,y$. De cette définition, il résulte que

$$(1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0;$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0.$$

Donc les deux fonctions satisfont à l'équation de Laplace.

On a aussi

$$(3) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 = R^2.$$

Si x et y sont des coordonnées rectangulaires, si ds_1 est l'arc intercepté sur la courbe $\beta = \text{const.}$ par les courbes α et $\alpha + d\alpha$, et si ds_2 est l'arc de α compris entre les courbes β et $\beta + d\beta$, on a

$$(4) \qquad \frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{1}{R},$$

et les courbes se coupent orthogonalement.

Si nous supposons que le potentiel $V = V_0 + k\alpha$, k étant une certaine constante, V satisfait à l'équation de Laplace, et les courbes (α) sont des courbes équipotentielles. Les courbes (β) sont des lignes de force, et l'intégrale de R prise pour une unité de longueur de base sur

une surface cylindrique qui se projette sur le plan des xy suivant la courbe AB est égale à $k(\beta_B - \beta_A)$, où β_A et β_B sont les valeurs de β aux extrémités de la courbe.

Si l'on trace dans le plan une série de courbes correspondant à une série de valeurs de α en progression arithmétique, et une autre série correspondant à des valeurs de β présentant la même différence, ces deux séries de courbes se coupent orthogonalement en tous leurs points de rencontre; et si la différence commune est assez petite, à la limite les éléments en lesquels est divisé le plan seront de petits carrés dont les côtés auront, dans les différentes parties du champ, des directions et des grandeurs différentes, ces grandeurs étant inversement proportionnelles à R.

Si deux ou plusieurs des lignes équipotentielles α sont des courbes fermées comprenant entre elles un espace continu, on peut les prendre pour surface de conducteurs aux potentiels $(V_0 + k\alpha_1)$, $(V_0 + k\alpha_2)$, ... La quantité d'électricité répandue sur l'élément de ces courbes, qui est compris entre les lignes de force β_1 et β_2, est $\frac{k}{4\pi}(\beta_2 - \beta_1)$.

Le nombre des lignes équipotentielles comprises entre deux conducteurs indique donc la différence de leurs potentiels, et le nombre des lignes de force qui partent d'un conducteur indique la quantité d'électricité qui le charge.

Nous allons maintenant établir quelques-uns des principaux théorèmes relatifs aux fonctions conjuguées, et, pour les démontrer, nous nous servirons soit des équations (1), qui contiennent les coefficients différentiels, soit des définitions primitives, où l'on fait usage de symboles imaginaires.

184. THÉORÈME I. — *Si x' et y' sont des fonctions conjuguées par rapport à x et y, et si x'' et y'' sont d'autres fonctions conjuguées par rapport à x et à y, les fonctions $x' + x''$ et $y' + y''$ seront aussi conjuguées par rapport à x et y.*

En effet,

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial y''}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\partial (x' + x'')}{\partial x} = \frac{\partial (y' + y'')}{\partial y}.$$

De même,

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x''}{\partial y} = -\frac{\partial y''}{\partial x};$$

d'où

$$\frac{\partial(x'+x'')}{dy} = -\frac{\partial(y'+y'')}{dx},$$

c'est-à-dire que $x'+x''$ et $y'+y''$ sont des fonctions conjuguées par rapport à x et y.

Représentation graphique d'une fonction qui est la somme de deux fonctions données.

Soit une fonction (α) de x et de y, représentée graphiquement par une série de courbes tracées dans le plan des xy, chacune des courbes correspondant à une valeur particulière de α prise dans une série de valeurs croissant d'une quantité constante δ.

Soit une autre fonction (β) de x et y, représentée de même par une série de courbes correspondant à des valeurs de β qui diffèrent de la même quantité constante δ.

Pour représenter de la même manière la fonction $(\alpha+\beta)$, il faudra tracer une série de courbes passant par les intersections des deux premières séries : de l'intersection des courbes α et β à celle des courbes $\alpha+\delta$ et $\beta-\delta$, puis à celle des courbes $\alpha+2\delta$ et $\beta-2\delta$, et ainsi de suite. En tous ces points, la fonction aura la même valeur $\alpha+\beta$. La courbe suivante passera par les intersections de α et $\beta+\delta$, $\alpha+\delta$ et β, $\alpha+2\delta$ et $\beta-\delta$, et ainsi de suite, et la fonction qui correspond à cette courbe est $\alpha+\beta+\delta$.

De cette façon, étant tracées la série des courbes α et la série des courbes β, on peut construire la série $\alpha+\beta$.

Ces trois séries de courbes peuvent être tracées à part sur trois feuilles différentes de papier transparent; et, lorsque la première et la seconde sont convenablement superposées, on peut tracer la troisième.

Les fonctions conjuguées pouvant ainsi être combinées par addition, nous avons le moyen de tracer sans peine les figures répondant à bien des cas intéressants, dès l'instant que nous savons tracer les figures pour les cas simples dont ils sont formés. Mais le théorème suivant nous fournit une méthode bien plus puissante pour transformer les solutions.

185. THÉORÈME II. — *Si x'' et y'' sont des fonctions conjuguées par rapport aux variables x' et y', et si x' et y' sont des fonctions conjuguées par rapport à x et à y, x'' et y'' sont conjuguées par rapport à x et y.*

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x''}{\partial x} &= \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},\\ &= \frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y''}{\partial y} + \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y},\\ &= \frac{\partial y''}{\partial y};\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial x''}{\partial y} &= \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y},\\ &= -\frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} - \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x},\\ &= -\frac{\partial y''}{\partial x},\end{aligned}$$

et ce sont là les conditions pour que x'' et y'' soient conjuguées de x et y.

On peut aussi le voir d'après la définition primitive des fonctions conjuguées. Car $x'' + \sqrt{-1}\,y''$ est une fonction de $x' + \sqrt{-1}\,y'$, et $x' + \sqrt{-1}\,y'$ est une fonction de $x + \sqrt{-1}\,y$. Donc, $x'' + \sqrt{-1}\,y''$ est une fonction de $x + \sqrt{-1}\,y$.

De même, on montrerait que, si x' et y' sont des fonctions conjuguées de x et y, x et y sont des fonctions conjuguées de x' et y'.

Ce théorème peut recevoir l'interprétation graphique suivante :

Prenons x' et y' pour coordonnées rectangulaires, et traçons sur le papier les courbes qui répondent à des valeurs en progression arithmétique de x'' et de y''. Nous avons ainsi un double système de courbes qui partage le papier en petits carrés. Traçons aussi sur le papier des lignes droites horizontales et verticales, également espacées, et inscrivons auprès de ces lignes les valeurs correspondantes de x' et y'.

Prenons maintenant une autre feuille de papier, sur laquelle x et y sont pris pour coordonnées rectangulaires, et sur laquelle on trace un double système de courbes x' et y', chacune des courbes portant l'indication des valeurs correspondantes de x' et y'. Ce système de coordonnées curvilignes correspondra, point pour point, au système de coordonnées rectilignes $x'y'$ de la première feuille de papier.

Si donc nous prenons un nombre quelconque de points sur la courbe x'' de la première feuille, et si nous notons les valeurs de x' et y' en ces points; et si nous marquons les points correspondants sur la seconde feuille, nous obtiendrons autant de points de la courbe transformée x''. Si nous faisons de même pour toutes les courbes x'',

y'' de la première feuille, nous obtiendrons sur la seconde une double série de courbes x'', y'' de forme différente, mais possédant la même propriété de partager le papier en petits carrés.

186. THÉORÈME III. — *Si* V *est une fonction de x' et de y', et si x' et y' sont des fonctions conjuguées de x et y, on a*

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy',$$

l'intégration étant effectuée entre les mêmes limites.

En effet,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x'\,\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x'\,\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}.$$

Additionnant ces deux dernières équations, et nous rappelant les conditions (1) relatives aux fonctions conjuguées, nous trouvons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right),$$

d'où

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)dx\,dy$$
$$=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy'.$$

Mais, si V est un potentiel, on a, d'après l'équation de Poisson,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+4\pi\rho=0,$$

et le résultat peut s'écrire

$$\iint\rho\,dx\,dy=\iint\rho'\,dx'\,dy';$$

c'est-à-dire qu'il y a la même quantité d'électricité dans les parties correspondantes des deux systèmes, si les coordonnées d'un système sont des fonctions conjuguées des coordonnées de l'autre système.

Théorèmes additionnels relatifs aux fonctions conjuguées.

187. THÉORÈME IV. — *Si x_1 et y_1, x_2 et y_2 sont des fonctions conjuguées par rapport à x et y, et si*

$$X = x_1x_2 - y_1y_2, \quad Y = x_1y_2 + x_2y_1,$$

X et Y sont des fonctions conjuguées de x et y.

En effet,

$$X + \sqrt{-1}\,Y = (x_1 + \sqrt{-1}\,y_1)(x_2 + \sqrt{-1}\,y_2).$$

THÉORÈME V. — *Si Φ est une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,$$

et si l'on pose

$$2R = \log\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right], \quad \theta = -\tang^{-1}\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}.$$

R et θ sont des fonctions conjuguées de x et y.

En effet, R et θ sont des fonctions conjuguées de $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$, lesquels sont des fonctions conjuguées de x et y.

EXEMPLE I. — Inversion.

188. Comme exemple de la méthode générale de transformation, prenons un cas d'inversion à deux dimensions. Soient O un point fixe dans un plan ; OA une direction fixe ; et soient $r = \mathrm{OP} = ae^{\theta}$, $\theta = \mathrm{AOP}$; enfin, x et y les coordonnées de P par rapport à O :

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho = \log\dfrac{1}{a}\sqrt{y^2 + x^2}, & \theta = \tang^{-1}\dfrac{y}{x}, \\ x = ae^{\rho}\cos\theta, & y = ae^{\rho}\sin\theta. \end{cases}$$

ρ et θ sont des fonctions conjuguées de x et y.

Si $\rho' = n\rho$ et $\theta' = n\theta$, ρ' et θ' seront des fonctions conjuguées de ρ

et 0. Dans le cas où $n = -1$, nous avons

$$r' = \frac{a^2}{r}, \quad \theta' = -\theta, \tag{6}$$

ce qui correspond à l'inversion ordinaire combinée avec une rotation de 180° de la figure autour de OA.

Inversion des figures à deux dimensions.

Dans ce cas, si r et r' représentent les distances des points correspondant au point O; e et e' les charges totales d'un corps; S et S' les éléments de surface; V et V' les éléments de volume; σ et σ' les densités superficielles; ρ et ρ' les densités de volume; φ et φ' les potentiels correspondants dans les deux systèmes,

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{r'}{r} = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{a^2}{r^2} = \dfrac{r'^2}{a^2}, & \dfrac{V'}{V} = \dfrac{a^4}{r^4} = \dfrac{r'^4}{a^4}, \quad \dfrac{e'}{e} = 1, \\ \dfrac{\sigma'}{\sigma} = \dfrac{r^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{r'^2}, & \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{r^4}{a^4} = \dfrac{a^4}{r'^4}, \quad \dfrac{\Phi'}{\Phi} = 1. \end{cases}$$

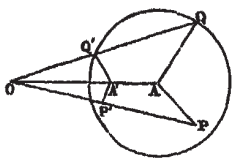
EXEMPLE II. — **Images électriques dans les figures à deux dimensions.**

189. Soit A le centre d'un cercle de rayon $AQ = b$; soit E la charge en A; le potentiel en un point quelconque P est

$$\Phi = 2E \log \frac{b}{AP}, \tag{8}$$

et si ce cercle est la section d'un cylindre conducteur creux, la densité superficielle en un point quelconque Q est $-\dfrac{E}{2\pi b}$.

Fig. 17.



Transformons le système par rapport à O, posant

$$AO = mb, \quad a^2 = (m^2 - 1)b^2;$$

nous avons alors en A' une charge égale à celle de A, avec $AA' = \dfrac{b}{m}$.

La densité en Q' est

$$-\frac{E}{2\pi b}\,\frac{b^2-\overline{AA'}^2}{\overline{A'Q'}^2},$$

et le potentiel en un point P′ intérieur au cercle est

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi' = \Phi = 2E(\log b - \log AP) \\ \qquad = 2E(\log OP' - \log A'P' - \log m). \end{cases}$$

Cette distribution équivaut à la combinaison d'une charge E en A′ et d'une charge — E en O, image de A′ par rapport au cercle. La charge idéale de O est égale et contraire à celle de A′.

Si le point P′ est défini par ses coordonnées polaires rapportées au centre du cercle, et si nous posons

$$\rho = \log r - \log b \quad \text{et} \quad \rho_0 = \log AA' - \log b,$$

nous avons

$$(10)\qquad AP' = be^{\rho},\quad AA' = be^{\rho_0},\quad AO = be^{-\rho_0},$$

et le potentiel au point (ρ, θ) est

$$(11)\qquad \begin{cases} \Phi = E\log(e^{-2\rho_0} - 2e^{-\rho_0}e^{\rho}\cos\theta + e^{2\rho}) \\ \qquad - E\log(e^{2\rho_0} - 2e^{\rho_0}e^{\rho}\cos\theta + e^{2\rho}) + 2E\rho_0. \end{cases}$$

C'est là le potentiel produit au point (ρ, θ) pour une charge E placée en $(\rho_0, 0)$, sous la condition que $\Phi = 0$ quand $\rho = 0$.

Dans ce cas, ρ et θ sont les fonctions conjuguées de l'équation (5); ρ est le logarithme du rapport du rayon vecteur d'un point au rayon du cercle, et θ est un angle.

Le centre est le seul point singulier dans ce système de coordonnées, et l'intégrale de ligne $\int \frac{d\theta}{ds}\,ds$ prise le long d'une courbe fermée est 0 ou 2π, suivant que la courbe fermée renferme ou non le centre.

Exemple III. — Transformation du cas précédent par Neumann (1).

190. Soient α et β deux fonctions conjuguées quelconques de x et y, telles que les courbes α soient des lignes équipotentielles, et les courbes (β) les lignes de force dans un système formé d'une demi-unité d'électricité placée à l'origine, et d'un système électrisé disposé d'une manière quelconque à une certaine distance de l'origine.

---

(1) *Journal de Crelle*, 1861.

Supposons que la courbe pour laquelle le potentiel est α_0 soit fermée, et telle qu'aucune partie du système électrisé, sauf la demi-unité placée à l'origine, ne soit comprise dans la courbe.

Alors toutes les courbes (α) comprises entre celle-ci et l'origine seront des courbes fermées entourant l'origine; et toutes les courbes (β) se rencontrent à l'origine et coupent orthogonalement les courbes (α).

Les coordonnées d'un point quelconque intérieur à la courbe (α_0) seront déterminées par les valeurs de α et β en ce point; et si le point se déplace dans le sens positif sur une des courbes (α), la valeur de (β) augmentera de 2π à chaque révolution complète.

Supposons maintenant que la courbe (α_0) soit la section de la surface intérieure d'un cylindre creux de forme quelconque, maintenu au potentiel zéro, et soumis à l'influence d'une charge répandue avec une densité linéaire E sur une ligne droite se projetant à l'origine; nous pouvons alors ne point considérer le système électrisé extérieur, et nous avons pour le potentiel en un point quelconque (α) intérieur à la courbe

$$\varphi = 2E(\alpha - \alpha_0), \tag{12}$$

et pour la quantité d'électricité qui est répandue sur la partie de la courbe α_0 comprise entre les points correspondant à β_1 et β_2,

$$Q = \frac{1}{2\pi} E(\beta_1 - \beta_2). \tag{13}$$

Si, par cette méthode ou par toute autre, nous avons déterminé la distribution du potentiel dans le cas d'une courbe de section donnée, et d'une charge placée en un point donné pris pour origine, nous pouvons passer au cas d'une charge placée en tout autre point, par une simple application de la méthode générale de transformation.

Soient α_1 et β_1 les valeurs de α et β au point où est placée la charge; substituant dans l'équation (11) $\alpha - \alpha_0$ à ρ, $\beta - \beta_1$ à θ, nous trouvons pour le potentiel d'un point quelconque, dont les coordonnées sont α et β,

$$\varphi = E\log[1 - 2e^{\alpha+\alpha_1-2\alpha_0}\cos(\beta-\beta_1) + e^{2(\alpha+\alpha_1-2\alpha_0)}] - E\log[1 - 2e^{\alpha-\alpha_1}\cos(\beta-\beta_1) + e^{2(\alpha-\alpha_1)}] - 2E(\alpha_1 - \alpha_0).$$

Cette expression du potentiel se réduit à zéro quand $\alpha = \alpha_0$; elle est finie et continue à l'intérieur de la courbe α, sauf au point (α_1, β_1), pour lequel le second terme devient infini; et, dans son voisinage immédiat, elle a pour valeur limite $-2E\log r'$, où r' est la distance à ce point.

Nous sommes donc en mesure d'obtenir la solution du problème de Green relatif à la charge d'un point quelconque intérieur à une courbe fermée, si nous connaissons la solution pour un autre point.

La charge induite sur l'élément de la courbe α_0 qui est compris entre les points β et $\beta + d\beta$, par une charge E placée au point (α_1, β_1), est, en employant la notation du § 183,

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\,ds_{s_1},$$

où ds_1 est mesuré vers l'intérieur et où l'on fait $\alpha = \alpha_0$ après la différentiation.

Ceci devient, d'après l'équation (4) du § 183,

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\beta, \quad (\alpha = \alpha_0),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{E}{2\pi}\,\frac{1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}\,d\beta.$$

Au moyen de cette expression, nous pouvons trouver le potentiel en un point quelconque (α_1, β_1) intérieur à la courbe fermée, lorsqu'on donne en fonction de β la valeur du potentiel en chaque point de la courbe fermée, et qu'il n'y a point de charge à l'intérieur de la courbe fermée.

En effet, d'après le § 86, la partie du potentiel de (α_1, β_1) qui est due à ce qu'une partie $d\beta$ de la courbe fermée est maintenue au potentiel V, est nV, n étant la charge induite sur $d\beta$ par une unité d'électricité placée en (α_1, β_1). Donc, si V est le potentiel en un point de la courbe fermée, potentiel exprimé en fonction de β, et si Φ est le potentiel au point (α_1, β_1) intérieur à la courbe fermée, celle-ci ne renfermant d'ailleurs aucune charge,

$$(16) \qquad \Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1(-e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)})V\,d\beta}{1 - 2e^{(\alpha_1 - \alpha_0)}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}.$$

Exemple IV. — Distribution près de l'arête d'un conducteur formé de deux faces planes.

191. Dans le cas d'une face plane conductrice indéfinie, chargée d'électricité avec une densité superficielle σ_0, nous avons trouvé pour le potentiel, en un point situé à une distance y du plan,

$$V = C - 4\pi\sigma_0 y,$$

C étant la valeur du potentiel sur le conducteur même.

Prenons pour axe polaire une ligne droite du plan, et passons aux coordonnées polaires : nous trouvons pour le potentiel

$$V = C - 4\pi\sigma_0 ae\rho \sin\theta;$$

et pour la quantité d'électricité répandue sur un parallélogramme dont la base est égale à l'unité, et dont la hauteur, mesurée à partir de l'axe, est $ae\rho$,

$$E = \sigma_0 ae\rho.$$

Faisons maintenant $\rho = n\rho'$, $\theta = n\theta'$; puisque ρ' et θ' sont conjugués par rapport à ρ et θ, les équations

$$V = C - 4\pi\sigma_0 ae^{n\rho'} \sin n\theta',$$
$$E = \sigma_0 ae^{n\rho'}$$

représentent une distribution possible des charges et des potentiels.

Si nous posons r pour $ae\rho'$, r sera la distance à l'axe; nous pouvons aussi mettre θ au lieu de θ' pour l'angle. Nous aurons

$$V = C - 4\pi\sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \sin n\theta,$$

$$E = \sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}}.$$

V est égal à C toutes les fois que $n\theta = \pi$ ou un multiple de π.

Supposons que l'arête soit un angle saillant du conducteur, où l'inclinaison des faces est α. Alors l'angle du diélectrique est $2\pi - \alpha$, et, pour $\theta = 2\pi - \alpha$, le point est sur l'autre face du conducteur. Nous devons donc faire

$$n(2\pi - \alpha) = \pi \quad \text{ou} \quad n = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}.$$

Alors

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} \sin\frac{\pi\theta}{2\pi - \alpha},$$

$$E = \sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

La densité superficielle σ, à une distance quelconque r de l'arête, est

$$\sigma = \frac{dE}{dr} = \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha-\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

Si l'angle est saillant, α est plus petit que π, et la densité superficielle varie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance à l'arête;

de sorte que, sur l'arête même, la densité devient infinie, et cela bien que la charge totale évaluée depuis l'arête jusqu'à une distance finie quelconque soit toujours finie.

Ainsi, quand $\alpha = 0$, l'arête est infiniment aiguë, semblable à la section d'un plan mathématique. Dans ce cas la densité varie en raison inverse de la racine carrée de la distance à l'arête.

Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, l'arête est semblable à celle d'un prisme équilatéral, et la densité varie en raison inverse de la puissance $\frac{2}{3}$ de la distance.

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'arête forme un angle droit, et la densité est en raison inverse de la racine cubique de la distance.

Si $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, l'arête est semblable à celle d'un prisme hexagonal, et la densité est en raison inverse de la racine quatrième de la distance.

Si $\alpha = \pi$, l'arête disparaît, la densité est constante.

Si $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, l'arête est semblable à l'intérieur d'un prisme hexagonal, et la densité est *directement proportionnelle* à la racine carrée de la distance.

Si $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, l'arête est un angle droit rentrant, et la densité est proportionnelle à la distance à l'arête.

Si $\alpha = \frac{5}{3}\pi$, l'arête est un angle rentrant de 60°, et la densité est proportionnelle au carré de la distance à l'arête.

En réalité, dans tous les cas où la densité devient infinie en un point quelconque, il y a décharge électrique dans le diélectrique en ce point, ainsi qu'il a été expliqué au § 55.

Exemple V. — Ellipses et hyperboles.

192. Nous avons vu que si

$$x_1 = e^{\varphi}\cos\psi, \quad y_1 = e^{\varphi}\sin\psi, \tag{1}$$

x et y sont des fonctions conjuguées de φ et ψ.

De même, si

$$x_2 = e^{-\varphi}\cos\psi, \quad y_2 = -e^{-\varphi}\sin\psi, \tag{2}$$

x_2 et y_2 sont des fonctions conjuguées. Donc, si

$$\begin{cases} 2x = x_1 + x_2 = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\cos\psi, \\ 2y = y_1 + y_2 = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})\sin\psi, \end{cases} \tag{3}$$

x et y sont des fonctions conjuguées de φ et ψ.

Dans ce cas, les points pour lesquels φ est constant sont sur l'ellipse dont les axes sont $e^{\varphi}+e^{-\varphi}$ et $e^{\varphi}-e^{-\varphi}$.

Les points pour lesquels ψ est constant sont sur l'hyperbole dont les axes sont $2\cos\psi$ et $2\sin\psi$.

Sur l'axe des x, entre $x=-1$ et $x=+1$,

$$\varphi = 0, \quad \psi = \arccos x. \tag{4}$$

Sur l'axe des x, de part et d'autre de ces limites, nous avons de chaque côté

$$\begin{cases} x>1 & \psi=0 \quad \varphi=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \\ x<1 & \psi=\pi \quad \varphi=\log\left(\sqrt{x^2-1}-x\right). \end{cases} \tag{5}$$

Si donc φ est la fonction potentielle, et ψ la fonction d'écoulement, nous avons le cas d'un écoulement d'électricité s'effectuant du côté positif vers le côté négatif de l'axe des x, à travers l'espace compris entre les points $+1$ et -1, les parties de l'axe situées au delà de ces points étant imperméables à l'électricité.

Puisque, dans ce cas, l'axe des y est une ligne de flux, nous pouvons le regarder comme étant aussi imperméable pour l'électricité.

Nous pouvons donc considérer les ellipses comme étant les sections des surfaces équipotentielles dues à un conducteur plat, de longueur infinie, de largeur 2, et chargé d'une demi-unité d'électricité par unité de longueur.

Si nous prenons ψ pour fonction potentielle, et y pour fonction d'écoulement, le cas devient celui d'un plan infini, dans lequel on aurait enlevé une bande de largeur 2. D'un côté, le plan est au potentiel π; de l'autre, il est au potentiel zéro.

Ces cas peuvent être considérés comme des cas particuliers des surfaces de second degré, étudiées au Chapitre X. La forme des courbes est donnée sur la *Pl. X*.

Exemple VI. — *Pl. XI.*

193. Considérons maintenant x' et y' comme des fonctions de x et y définies par les équations

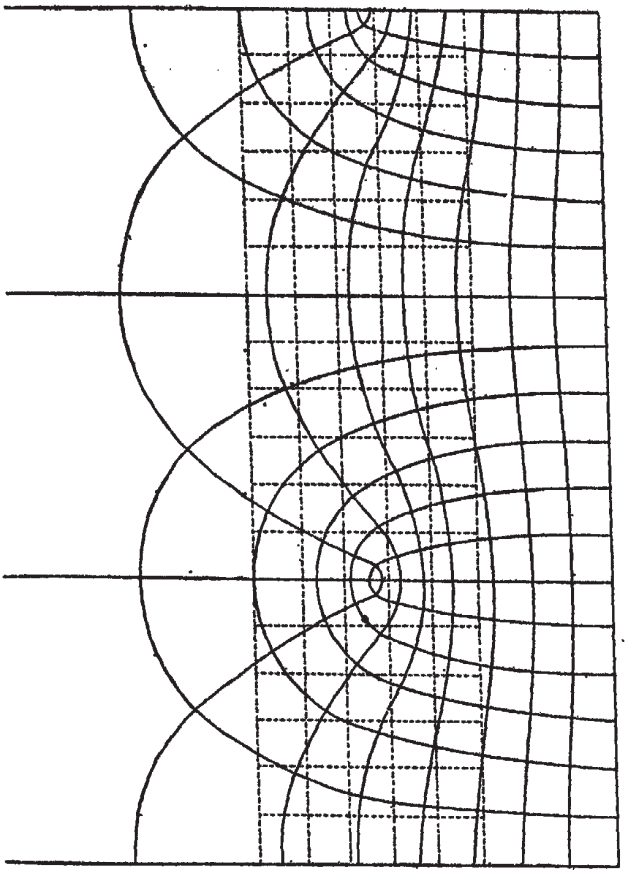
$$x' = b\log\sqrt{x^2+y^2}, \quad y' = b\arctang\frac{y}{x}; \tag{6}$$

x' et y' seront aussi des fonctions conjuguées de φ et ψ.

On donne à la *Pl. XI* les courbes qui résultent de la transformation de la *Pl. X* au moyen de ces nouvelles coordonnées.

Si x' et y' sont des coordonnées rectangulaires, les propriétés de

Pl. XI.



Lignes de force près du bord d'une plaque.

l'axe des x dans la *fig.* 1 appartiendront, dans la *fig.* 2, à une série de lignes parallèles à x', pour lesquelles $y' = bn'\pi$, n' étant un nombre entier quelconque.

Sur ces lignes, les valeurs positives de x' correspondent aux valeurs de x plus grandes que l'unité, et nous avons vu que l'on a pour ces valeurs

$$(7) \qquad \psi = n\pi, \quad \varphi = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log\left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}\right).$$

Les valeurs négatives de x' sur ces mêmes lignes correspondent aux valeurs de x plus petites que l'unité, pour lesquelles nous avons vu que l'on a

$$(8) \qquad \varphi = 0, \quad \psi = \arccos x = \arccos e^{\frac{x'}{b}}.$$

Les propriétés de l'axe des y de la *fig.* 1 appartiennent, dans la *fig.* 2, à une série de lignes parallèles à x', pour lesquelles on a

$$(9) \qquad y' = b\pi\left(n' + \tfrac{1}{2}\right).$$

La valeur de ψ le long de ces lignes est $\psi = \pi(x + \frac{1}{2})$ pour tous les points, positifs ou négatifs, et

$$(10) \qquad \varphi = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \log\left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}\right).$$

Les courbes pour lesquelles φ et ψ sont constantes peuvent être tracées directement, d'après leurs équations

$$x' = \tfrac{1}{2} b \log \tfrac{1}{4}(e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2\cos 2\psi),$$

$$y' = b \tan^{-1}\left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \tan\psi\right).$$

Comme la figure se reproduit pour des valeurs de y' différant entre elles de πb, il suffit de la tracer dans un de ces intervalles.

Il y a deux cas, selon que φ ou ψ change de signe avec y'. Supposons que ce soit φ qui change de signe. Alors toute courbe pour laquelle ψ est constant est symétrique par rapport à l'axe des x', et le coupe orthogonalement en un point situé du côté négatif. Si nous partons de ce point, pour lequel $\varphi = 0$, et si nous faisons croître φ, la courbe, d'abord orthogonale à l'axe, s'infléchit peu à peu, et finit par devenir, pour de grandes valeurs de φ, parallèle à l'axe des x'. Le côté positif de l'axe des x' appartient au système et correspond à $\psi = 0$; et quand $y' = \pm\frac{1}{2}\pi b$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Les figures pour lesquelles ψ a des valeurs constantes, comprises entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, forment donc un système de courbes qui comprennent le côté positif de l'axe de x'.

Les courbes pour lesquelles φ a des valeurs constantes coupent orthogonalement le système ψ, et les valeurs de φ varient de $-\infty$ à $+\infty$. Pour toutes celles de ces courbes φ qui sont menées au-dessus de l'axe des x, la valeur de φ est positive; le long de la partie négative de l'axe des x', sa valeur est zéro; enfin, pour toute courbe située en dessous de l'axe des x', sa valeur est négative.

Nous avons vu que le système ψ est symétrique par rapport à l'axe des x. Soit PQR une courbe quelconque coupant ce système orthogonalement, et se terminant, en P et en R, sur les courbes $y' = \pm\frac{1}{2}\pi b$, le point Q étant situé sur l'axe des x'. La courbe PQR est symétrique par rapport à l'axe des x'; mais, si la valeur de φ le long de PQ est c, elle sera $-c$ le long de QR. On se rend compte de cette discontinuité de φ par une distribution électrique du genre de celle qui sera discutée au § 195.

Si maintenant nous supposons que ce soit ψ, et non φ, qui change de signe avec y', les valeurs de φ varient de o à ∞. Pour $\varphi = o$, nous avons la partie négative de l'axe des x; pour $\varphi = \infty$, nous avons une perpendiculaire à l'axe des x' située à une distance infinie. Le long d'une ligne PQR quelconque comprise entre les deux précédentes, la valeur de φ est constante et positive.

Toute valeur ψ subit un brusque changement au point où la courbe pour laquelle ψ est constant coupe la partie négative de l'axe des x' : le signe de ψ change. On verra au § 197 la signification de cette discontinuité.

Les lignes, que nous venons d'apprendre à tracer, sont représentées sur la *Pl. XI*, réduite aux deux tiers du diagramme : le tiers supérieur est à supprimer.

194. Si nous considérons φ comme la fonction potentielle et ψ comme la fonction d'écoulement, le cas actuel est celui d'une bande de métal infiniment longue, de largeur πb, présentant à partir de l'origine et sur une longueur indéfinie dans le sens positif une cloison non conductrice, qui partage la partie positive de la bande en deux canaux distincts. Nous pouvons supposer que cette séparation soit produite par une coupure très étroite pratiquée dans la bande métallique.

Si l'on fait circuler un courant électrique, entrant par l'une de ces parties et sortant par l'autre, l'entrée et la sortie seront à une distance infinie du côté positif de l'origine, et les fonctions φ et ψ donneront la distribution du potentiel et du courant.

Si, au contraire, nous prenons ψ pour le potentiel et φ pour la fonc-

tion d'écoulement, nous nous trouverons dans le cas d'un courant ayant pour direction générale celle de l'axe des y', et circulant à travers une feuille métallique dans laquelle on aurait pratiqué un certain nombre de coupures non conductrices, parallèles à l'axe des x', et s'étendant de l'axe des y' à l'infini, dans le sens négatif.

195. Nous pouvons appliquer ces résultats à deux cas importants en électricité statique.

1° Soit un conducteur en forme de feuille plane, présentant une arête rectiligne, et illimité partout ailleurs. On le met dans le plan des xz, du côté positif de l'origine, et l'on place parallèlement, à une distance $\frac{1}{2}\pi b$ de chaque côté de ce plan, deux plans conducteurs indéfinis. Alors, si ψ est la fonction potentielle, sa valeur est zéro pour le conducteur du milieu, et $\frac{1}{2}\pi$ pour les deux autres plans.

Considérons la quantité d'électricité qui se trouve sur la partie du conducteur central, qui s'étend sur une hauteur 1 dans le sens de z, et sur une longueur de $x' = a$ à partir de l'origine.

La quantité d'électricité qui existe sur la partie de cette bande qui est comprise entre x'_1 et x'_2 est $\frac{1}{4\pi}(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Donc, depuis l'origine jusqu'à $x' = a$, la quantité d'électricité est

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{4\pi} \log\left(e^{\frac{a}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{b}} - 1}\right),$$

ce qui devient, si a est grand comparativement à b,

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{4\pi} \log 2 e^{\frac{a}{b}} = \frac{a + b \log_e 2}{4\pi b}.$$

Donc la quantité d'électricité, répandue sur un plan limité par une arête rectiligne, est plus grande que si l'électricité avait été distribuée avec une densité uniforme égale à celle qui existe à une certaine distance de l'arête; la quantité existante est égale à celle qui, pour la même densité uniforme, serait répandue sur un plan s'étendant sur une largeur $b \log_e 2$, au delà de la limite actuelle du plan.

Cette distribution uniforme imaginaire est figurée par les lignes pointillées de la *Pl. XI*. Les verticales représentent les lignes de force; les horizontales, les surfaces équipotentielles, en supposant la densité uniforme sur les deux plans prolongés à l'infini dans toutes les directions.

196. Les condensateurs électriques sont quelquefois formés d'un

plateau placé à égale distance de deux autres plateaux parallèles s'étendant de tous les côtés beaucoup plus loin que le plateau du milieu. Si le rayon de courbure de la ligne qui limite le plateau du milieu est grand, relativement à la distance des plateaux, nous pouvons considérer cette courbe comme une ligne droite, et approximativement calculer la capacité du condensateur, en supposant que la surface du plateau du milieu soit augmentée par une couronne de largeur uniforme régnant tout autour de la courbe limite, et en supposant également que, sur le plateau ainsi accru, la densité superficielle soit uniforme et égale à ce qu'elle est sur les parties éloignées de la courbe limite.

Ainsi, si S est l'aire véritable du plateau, L sa circonférence, B la distance des grands plateaux, nous avons

$$b = \frac{1}{\pi} B, \tag{13}$$

et la largeur de la couronne additionnelle est

$$\alpha = \frac{\log_e 2}{\pi} B, \tag{14}$$

de sorte que l'aire augmentée est

$$S' = S + \frac{\log_e 2}{\pi} BL. \tag{15}$$

La capacité du plateau du milieu est donc

$$\frac{1}{2\pi}\frac{S'}{B} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{B} + L\frac{1}{\pi}\log_e 2\right). \tag{16}$$

Correction pour l'épaisseur du plateau.

Comme le plateau du milieu a généralement une épaisseur que l'on ne peut négliger devant la distance des plateaux, on obtient une représentation plus exacte des faits dans le cas actuel, en supposant que la section du plateau intermédiaire correspond à la courbe $\psi = \psi'$.

Le plateau aura, à une certaine distance du bord, une épaisseur à peu près uniforme $\beta = 2b\psi'$, mais sera arrondi vers le bord.

La position effective du bord du plateau s'obtient en faisant $y' = o$, d'où

$$x' = b\log_e(\cos\psi'). \tag{17}$$

La valeur de ψ' sur ce bord est zéro, et, au point pour lequel $x' = o$,

elle est

$$\frac{a + b\log_e 2}{b}.$$

Donc, la quantité d'électricité répandue sur le plateau est la même que si l'on avait ajouté à ce plateau une couronne de largeur

$$\frac{B}{\pi}\left[\log_e 2 + \log_e\left(\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right)\right]$$

ou

$$\frac{B}{\pi}\log_e\left(2\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right), \tag{18}$$

la densité étant supposée avoir en tous les points la valeur qu'elle a une certaine distance du bord.

Densité près des bords.

La densité superficielle en un point quelconque du plateau est

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}} = \frac{1}{4\pi b}\left(1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{2x'}{b}} + \frac{3}{8}e^{-\frac{4x'}{b}} - \dots\right). \tag{19}$$

La quantité entre parenthèses tend rapidement vers l'unité, quand x' croît, de sorte que, à une distance du bord égale à n fois la largeur de la couronne α, la densité effective excède la densité normale d'environ $\frac{1}{2^{2n+1}}$ de la densité normale.

De même, nous pouvons calculer la densité sur les plans indéfinis

$$= \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}}. \tag{20}$$

Quand $x' = 0$, la densité effective est à la densité normale dans le rapport de $2^{-\frac{1}{2}}$ à 1.

Du côté positif, à une distance égale à n fois la largeur de la couronne, la densité est inférieure à la densité normale d'environ $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Du côté négatif, à une distance égale à n fois la largeur de la couronne, la densité est environ $\frac{1}{2^n}$ de la densité normale.

Ces résultats montrent quel degré d'exactitude on peut attendre, si

l'on applique cette méthode à des plateaux d'étendue limitée, en présentant des irrégularités dans le voisinage des bords. La même distribution s'établirait dans le cas d'une série illimitée de ces plateaux équidistants, dont les potentiels seraient alternativement $+V$ et $-V$. Dans ce cas, nous devons prendre la distance des plateaux égale à B.

197. 2° Le second cas que nous étudierons est celui d'une série infinie de plans parallèles au plan des xz, distants les uns des autres de $B = \pi b$, et tous coupés par le plan des yz, de manière à ne s'étendre que du côté négatif de ce plan. Si nous prenons φ pour fonction potentielle, nous pouvons regarder ces plans comme des conducteurs au potentiel zéro.

Considérons les courbes le long desquelles φ est constant. Pour $y' = n\pi b$, c'est-à-dire sur le prolongement de chacun des plans, nous avons

$$x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}). \tag{21}$$

Pour $y' = (n + \frac{1}{2})\pi b$, c'est-à-dire dans les positions intermédiaires,

$$x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}). \tag{22}$$

Donc, quand φ est grand, la courbe pour laquelle φ est constant est une ligne onduleuse dont la distance moyenne à l'axe des y' est approximativement

$$a = b(\varphi - \log_e 2). \tag{23}$$

L'amplitude des ondulations de chaque côté de cette ligne est

$$\tfrac{1}{2} b \log \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}. \tag{24}$$

Quand φ est grand, cette expression devient $be^{-2\varphi}$, de sorte que la forme de la courbe se rapproche d'une ligne droite parallèle à l'axe des y', à une distance a de l'axe, du côté positif.

Si nous supposons un plan $x' = a$ maintenu à un potentiel constant, tandis que le système des plans parallèles est maintenu à un potentiel différent, $b\varphi = a + b \log_e 2$, et, par suite, la densité superficielle de la charge induite sur ce plan est égale à la densité de la charge qui y aurait été induite par un plan parallèle, porté au même potentiel que la série des plans, et placé à une distance $b \log_e 2$ plus loin que le bord de ces plans parallèles.

Si B est la distance de deux plans de la série, $B = \pi b$, et la distance

additionnelle est

$$\alpha = B\frac{\log_e 2}{\pi}. \tag{25}$$

198. Considérons maintenant l'espace compris entre deux surfaces équipotentielles, dont l'une est formée par une série d'ondulations parallèles, tandis que l'autre, correspondant à une grande valeur de φ, peut être considérée comme sensiblement plane.

Si D est la hauteur d'une ondulation, comptée de son point le plus haut à son point le plus bas, nous trouvons pour valeur correspondante de φ,

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{e^{\frac{D}{b}}+1}{e^{\frac{D}{b}}-1}. \tag{26}$$

La valeur de x' au sommet de l'onde est

$$b\log\tfrac{1}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi}).$$

Donc (1), si A est la distance du sommet des ondes au plan opposé, la capacité du système formé de la surface plane et de la surface ondulée est égale à celle d'un système de deux plans à la distance $A+\alpha'$, où

$$\alpha' = \frac{B}{\pi}\log_e\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}}. \tag{28}$$

199. Si dans un conducteur, dont le reste de la surface est plane, on pratique un seul sillon de cette forme, et si l'autre conducteur est un plan à la distance A, la capacité de chaque conducteur diminue par

---

(1) Soient Φ le potentiel du plan et φ celui de la surface ondulée. La quantité d'électricité répandue sur l'unité de surface du plan est $\frac{1}{4\pi b}$. Donc la capacité est égale à

$$\frac{1}{4\pi b(\Phi-\varphi)} = \frac{1}{4\pi(A+\alpha')},$$

d'où

$$A+\alpha' = b(\Phi-\varphi);$$

mais

$$A + b\log\tfrac{1}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) = b(\Phi-\log 2),$$

d'où

$$\alpha' = -b\varphi + b[\log 2 + \log\tfrac{1}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi})] = b\log(1+e^{-2\varphi}) = b\log\frac{2}{1+e^{-\frac{D}{b}}},$$

d'après (26).

rapport à l'autre. Mais la diminution ainsi produite est inférieure à la $n^{ième}$ partie de la diminution produite par n rainures semblables faites côte à côte; en effet, dans ce dernier cas, la force électrique qui agit entre les conducteurs est moindre que dans le premier cas, de sorte que l'induction à la surface de chaque sillon est réduite par l'influence des sillons voisins.

Soient L la longueur, B la largeur, D la profondeur du sillon; la capacité d'une aire S prise dans le plan opposé au sillon sera

$$\frac{S - LB}{4\pi A} + \frac{LB}{4\pi(A + \alpha')} = \frac{S}{4\pi A} - \frac{LB}{4\pi A}\frac{\alpha'}{A + \alpha'}. \tag{29}$$

Si A est grand relativement à B ou à α', la correction devient, en vertu de l'équation (28),

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log_e \frac{2}{1 - e^{-\pi\frac{B}{D}}}. \tag{30}$$

Pour une fente de profondeur infinie, la correction devient, en faisant D infini,

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log_e 2. \tag{31}$$

Pour trouver la densité superficielle sur la série des plans parallèles, nous devons calculer

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x'} \text{ pour } \varphi = 0,$$

soit

$$\sigma = \frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{e^{-2\frac{x}{b}} - 1}}. \tag{32}$$

La densité moyenne sur le plateau plan situé à une distance A des bords de la série de plans parallèles est $\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi b}$. Donc, à une distance $n\alpha$ du bord d'un de ces plans, la densité superficielle est $\frac{1}{\sqrt{2^{2n} - 1}}$ de cette densité moyenne.

200. Cherchons maintenant à déduire de ces résultats la distribution électrique dans le système obtenu en faisant tourner le plan de la figure autour de l'axe $y' = -R$. L'équation de Poisson prend la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{1}{R + y'}\frac{\partial V}{\partial y'} + 4\pi\rho = 0. \tag{33}$$

Supposons que V soit ici la fonction φ donnée au §193, et déterminons la valeur de ρ d'après cette équation. Nous savons que les deux premiers termes disparaissent et, par suite,

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}. \tag{34}$$

Si nous admettons qu'en outre de la densité superficielle déjà étudiée l'électricité soit distribuée dans l'espace d'après la loi qui vient d'être établie, la distribution du potentiel sera représentée par les courbes de la *Pl. XI.*

Or on voit aisément sur cette figure que, en général, $\frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ est très petit, sauf sur les bords des plateaux; la nouvelle distribution peut donc être représentée approximativement par ce qui existe effectivement, c'est-à-dire une certaine distribution superficielle sur les bords des plateaux.

Si donc nous prenons l'intégrale $\int\int \rho\, dx'\, dy'$ entre les limites $y' = 0$ et $y' = \frac{\pi}{2} b$, de $x' = -\infty$ à $x' = +\infty$, nous aurons la charge additionnelle totale qui résulte pour une des faces du plateau de sa courbure.

Puisque $\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -\frac{\partial\psi}{\partial x'}$, nous avons

$$\left\{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\, dx' &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\,dx' \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}(\psi_\infty - \psi_{-\infty}) = \frac{1}{8}\frac{1}{R+y'}\left(2\frac{y'}{B}-1\right).\end{aligned}\right. \tag{35}$$

Intégrant par rapport à y', nous avons

$$\int_0^{\frac{B}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho\, dx'\, dy' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\frac{2R+B}{B}\log\frac{2R+B}{2R} \tag{36}$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{B}{R} + \frac{1}{192}\frac{B^2}{R^2} + \cdots. \tag{37}$$

C'est là la moitié de la quantité totale d'électricité que nous devons supposer répandue dans l'espace voisin des bords des plateaux cylindriques, pour chaque unité de circonférence. Et puisque c'est seulement près des bords des plateaux que cette densité est appréciable, nous pouvons, sans modifier sensiblement son action sur la surface plane opposée, supposer toute la charge condensée à la surface du

plateau; et, en calculant l'attraction qui agit entre cette surface et la surface cylindrique, nous pouvons supposer que cette électricité appartient à la surface cylindrique.

S'il n'y avait pas de courbure, la charge superficielle de la surface positive du plateau aurait été, par unité de longueur,

$$-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,dx' = \frac{1}{4\pi}(\psi_0-\psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

Donc, si nous y ajoutons toute la distribution précédente, il faut multiplier cette charge par le facteur $\left(1+\frac{1}{2}\frac{B}{R}\right)$ pour avoir la charge totale de la face positive.

(1) Dans le cas d'un disque de rayon R placé à égales distances de

---

(1) Lorsque nous avons évalué, au § 200, la distribution totale dans l'espace, il aurait peut-être été plus exact de prendre, pour la représenter, l'intégrale

$$\iint \rho\, 2\pi(R+y')\,dx'\,dy'.$$

ce qui donne $-\frac{1}{32}\frac{B}{R}$ pour chaque unité de circonférence comptée sur l'arête de rayon R. On arrive ainsi à la même correction que dans le texte.

On peut aussi traiter comme il suit le cas du disque.

Faisons tourner la figure du § 195 autour d'une perpendiculaire aux plateaux, à une distance + R du bord du plateau du milieu. Ce bord décrira donc un cercle qui sera le bord du disque. Comme au § 200, nous partons de l'équation de Poisson, qui est, dans ce cas,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}-\frac{1}{R-x'}\frac{\partial V}{\partial x'}+4\pi\rho=0.$$

Supposons maintenant que V soit égal à la fonction potentielle ψ du § 195. Cela revient à supposer entre les plateaux une distribution électrique dont la densité de volume ρ est

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R-x'}\frac{\partial\psi}{\partial x'}.$$

La quantité totale est

$$2\int_0^{\frac{B}{2}}\int_{-\infty}^{R}\rho\,2\pi(R-x')\,dx'\,dy'.$$

Si R est grand relativement à la distance des plateaux, on verra, en examinant les lignes du potentiel de la *Pl. XI*, que ce résultat est sensiblement égal à

$$\int_0^{\frac{B}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\,dx'\,dy',$$

deux plans parallèles indéfinis distants l'un de l'autre de B, on trouve, pour la capacité du disque,

$$\frac{R^2}{B} + 2\frac{\log_e 2}{\pi} R + \frac{1}{2} B. \tag{38}$$

Théorie de l'anneau de garde de Thomson.

201. Dans certains électromètres de Sir W. Thomson, une grande surface plane est maintenue à un certain potentiel; à une distance a de cette surface est un disque plan de rayon R, entouré par un grand anneau plan percé d'une ouverture circulaire de rayon R', concentrique au disque. Cet anneau porte le nom d'*anneau de garde;* ainsi que le disque, il est maintenu au potentiel zéro.

On peut considérer l'intervalle compris entre le disque et l'anneau comme un sillon circulaire de profondeur infinie et de largeur $R' - R$. Nous poserons $R' - R = B$.

Alors la charge que prendra le disque sous l'influence du plateau chargé au potentiel unité sera, en supposant la densité uniforme, $\frac{R^2}{4A}$.

---

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{8}\pi B.$$

Et la distribution superficielle totale est, en y comprenant les deux faces du disque,

$$\begin{aligned} &2\int_0^R \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y'}\right)_{y'=0} 2\pi(R-x')\,dx' \\ &= -\int_0^R (R-x')\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)_{y'=0} dx' \\ &= -\int_0^R \varphi_{y'=0}\,dx' \\ &= -\frac{R^2\pi}{2B} - R\log_e 2 + \frac{B}{\pi}\left(\log_e 2 - \frac{1}{2}\pi + 1\right). \end{aligned}$$

Si donc la distribution qui existe dans le volume compris entre les plateaux est supposée condensée sur le disque, et si la différence des potentiels des plateaux et du disque est $\frac{\pi}{2}$, l'expression de la capacité devient

$$\frac{R^2}{B} + 2\frac{\log_e 2}{\pi} R + \frac{1}{4} B - \frac{2}{\pi^2}\left(\log_e 2 - \frac{1}{2}\pi + 1\right) B,$$

résultat qui diffère de celui qui est donné dans le texte d'environ $\frac{B}{4}$.

La charge qui existe sur une des faces d'un sillon rectiligne de largeur B, de longueur $2\pi R$ et de profondeur infinie, peut être évaluée d'après le nombre des lignes de force qui partent du grand plateau et viennent rencontrer cette face du sillon. En se reportant au § 197 et à la note, on voit que cette charge est

$$\frac{1}{2} LB \frac{1}{4\pi b},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} RB \frac{1}{A + \alpha'},$$

puisque, dans le cas actuel, $\Phi = 1$, $\varphi = 0$, et, par suite, $b = A + \alpha'$.

Mais, puisque le sillon n'est pas rectiligne et que son rayon de courbure est R, il faut multiplier par le facteur $\left(1 + \frac{1}{2}\frac{B}{R}\right)$.

La charge totale du disque est donc

$$\frac{R^2}{4A} + \frac{1}{4}\frac{RB}{A + \alpha'}\left(1 + \frac{B}{2R}\right) \tag{39}$$

$$= \frac{R^2 + R'^2}{8A} - \frac{R^2 - R'^2}{8A}\frac{\alpha'}{A + \alpha'}, \tag{40}$$

et la valeur de α' ne peut être supérieure à

$$\frac{B \log_e 2}{\pi},$$

soit environ 0,22 B.

Si B est petit en comparaison de A ou R, cette expression donnera une approximation suffisante de la charge du disque pour une différence de potentiels égale à l'unité. Le rapport de A à R peut être quelconque, mais il faut que les rayons du grand plateau et de l'anneau de garde excèdent R de plusieurs fois la grandeur de A.

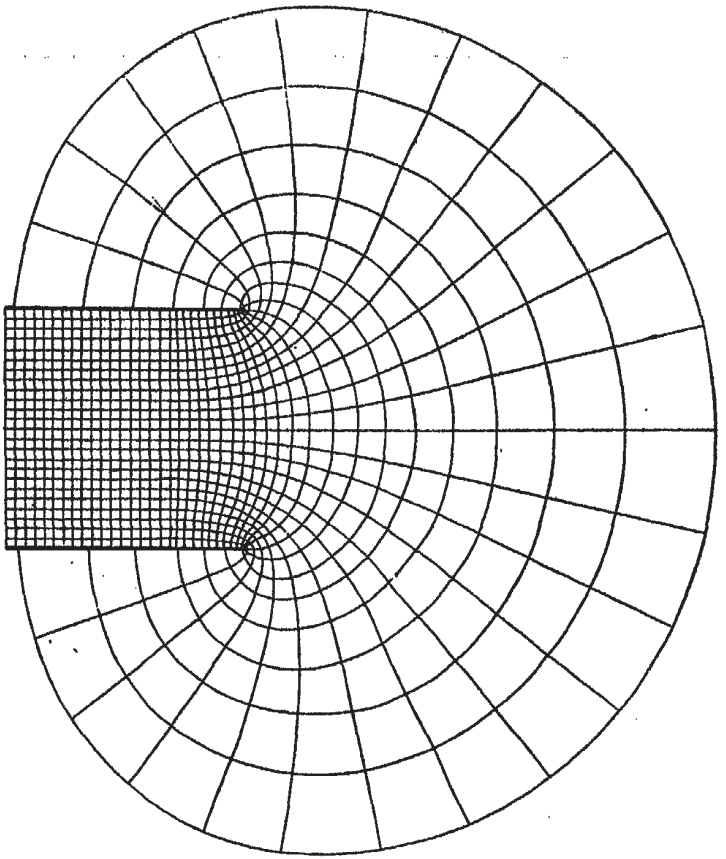
Exemple VII. — *Pl. XII.*

202. Helmholtz, dans son Mémoire sur le *Mouvement discontinu des fluides* (1), a montré l'application de plusieurs formules, où les coordonnées sont exprimées en fonction du potentiel et de sa fonction conjuguée.

Une de ces formules peut être appliquée au cas de la charge d'un

(1) *Königl. Akad. der Wissenschaften*, Berlin, 23 avril 1868.

Pl. XII.



Lignes de force entre deux plaques.

plateau de grandeur finie, placé parallèlement à une surface plane infinie, reliée à la terre.

Puisque

$$x_1 = A\varphi, \quad y_1 = A\psi,$$

et aussi

$$x_2 = Ae^{\varphi}\cos\psi, \quad y_2 = Ae^{\varphi}\sin\psi$$

sont des fonctions conjuguées de φ et de ψ, les fonctions formées en additionnant x_1 et x_2, y_1 et y_2 seront aussi conjuguées. Donc

$$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi,$$
$$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi$$

sont des fonctions conjuguées de φ et ψ, et φ et ψ sont des fonctions conjuguées de x et y.

Supposons que x et y soient des coordonnées rectangulaires, et soit $k\psi$ le potentiel : alors $k\varphi$ est conjugué de $k\psi$, k étant une constante quelconque.

Posons $\psi = \pi$, alors $y = A\pi$, $x = A(\varphi - e^{\varphi})$.

Si φ varie de $-\infty$ à o, puis de o à $+\infty$, x varie de $-\infty$ à $-A$ et de $-A$ à $-\infty$. Donc la surface équipotentielle, pour laquelle $\psi = \pi$, est un plan parallèle à x, situé à une distance $b = \pi A$ de l'origine, et s'étendant de $-\infty$ à $x = -A$.

Considérons la partie de ce plan qui s'étend depuis

$$x = -(A + a) \text{ jusqu'à } x = -A,$$

et de

$$z = o \qquad \text{jusqu'à } z = c,$$

et supposons que sa distance au plan des xz soit $y = b = 4\pi$ et que son potentiel soit $V = k\psi = k\pi$.

La charge électrique de la partie de plan considérée s'obtient en déterminant les valeurs de φ à ses extrémités. Nous avons donc à tirer φ de l'équation

$$x = -(A + a) = A(\varphi - e^{\varphi});$$

φ aura une valeur négative φ_1 et une valeur positive φ_2, et sur le bord du plan, où $x = -A$, $\varphi = o$.

Donc la charge sur un des côtés est

$$-\frac{ck\varphi_1}{4\pi},$$

et sur l'autre

$$\frac{ck\varphi_2}{4\pi}.$$

Ces deux charges sont positives, et leur somme est

$$\frac{ck(\varphi_2-\varphi_1)}{4\pi}.$$

Si nous supposons que a soit grand relativement à A,

$$\varphi_1 = -\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A}-1+e^{-\frac{a}{A}-1+\ldots}},$$

$$\varphi_2 = \log\left[\frac{a}{A}+1+\log\left(\frac{a}{A}+1+\ldots\right)\right].$$

Si nous négligeons les termes exponentiels de φ_1, nous trouvons que si, sur la surface négative, la densité était uniformément égale à ce qu'elle est à une certaine distance des bords du plan, la charge de cette surface serait inférieure à ce qu'elle est en réalité, d'une quantité égale à la charge d'une bande de largeur $\frac{b}{\pi}$ chargée à cette densité uniforme.

La capacité totale de la partie du plan considérée est

$$C = \frac{c}{4\pi^2}(\varphi_2-\varphi_1).$$

La charge totale est CV, et l'attraction vers le plan indéfini, qui a pour équation $y=0$ et pour potentiel $\psi=0$, est

$$-\frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial b} = V^2\frac{ac}{8\pi b^2}\left(1+\frac{\frac{a}{A}}{1+\frac{a}{A}\log\frac{a}{A}}+e^{-\frac{a}{A}}+\ldots\right)$$

$$= \frac{V^2c}{8\pi b^2}\left(a+\frac{b}{\pi}-\frac{b^2}{\pi^2 a}\log\frac{a}{A}+\ldots\right).$$

Les lignes équipotentielles et les lignes de force sont figurées à la *Pl. XII.*

EXEMPLE VIII. — **Théorie d'un grillage de fils parallèles (*Pl. XIII*).**

203. Dans plusieurs instruments électriques, on emploie un grillage de fils métalliques parallèles, pour empêcher certaines parties de l'appareil d'être électrisées par induction. Nous savons que, quand un conducteur est entièrement entouré par un vase métallique au même potentiel que lui-même, il ne peut être soumis à l'induction d'aucun corps électrisé extérieur au vase; mais on ne peut voir le conduc-

Pl. XIII.

Lignes de force près d'un grillage.

teur, s'il est entièrement entouré de métal, et c'est pourquoi on laisse, dans certains cas, une ouverture que l'on couvre d'un grillage de fils métalliques fins. Examinons quel effet produit ce grillage pour diminuer l'induction électrique. Nous supposerons le grillage formé d'une série de fils parallèles, situés dans un même plan, à intervalles égaux, le diamètre des fils étant petit relativement à leur écartement, et, au contraire, la distance au grillage des corps électrisés d'une part, du conducteur protégé d'autre part, étant considérable relativement à l'écartement des fils.

204. A la distance r' de l'axe d'un fil rectiligne de longueur indéfinie, chargé d'une quantité d'électricité λ par unité de longueur, le potentiel est

$$V = -2\lambda \log r' + C. \tag{1}$$

Nous pouvons exprimer ce potentiel au moyen de coordonnées polaires, dont l'axe est à une distance du fil égale à l'unité. Nous devons faire, dans ce cas,

$$r'^2 = r^2 - 2r\cos\theta + 1, \tag{2}$$

et, si nous supposons que l'axe lui-même soit aussi chargé d'électricité à la densité linéaire λ', nous trouvons

$$V = -\lambda \log(1 - 2r\cos\theta + r^2) - 2\lambda' \log r + C. \tag{3}$$

Si maintenant nous faisons

$$r = e^{\frac{2\pi y}{a}}, \quad \theta = \frac{2\pi x}{a}, \tag{4}$$

d'après la théorie des fonctions conjuguées,

$$V = -\lambda \log\left(1 - 2e^{\frac{2\pi y}{a}}\cos\frac{2\pi x}{a} + e^{\frac{4\pi y}{a}}\right) - 2\lambda' \log e^{\frac{2\pi y}{a}} + C, \tag{5}$$

où x et y sont des coordonnées rectangulaires. Et telle sera la valeur du potentiel dû à une série infinie des fils métalliques fins, parallèles à l'axe des z situés dans le plan des xz, et passant par des points de l'axe des x, pour lesquels x est un multiple de a.

Chacun de ces fils est chargé à la densité linéaire λ.

Le terme où paraît λ' représente une charge produisant, dans la direction des y, une force constante $\frac{4\pi\lambda'}{a}$.

La forme des surfaces équipotentielles et des lignes de force est

donnée à la *Pl. XIII*, pour $\lambda' = 0$. Près des fils, les surfaces équipotentielles sont presque cylindriques : nous pouvons donc regarder la solution comme approximativement vraie, quand les fils sont des cylindres ayant un diamètre fini, mais petit relativement à leur intervalle.

A une certaine distance des fils, les surfaces équipotentielles prennent des formes de plus en plus voisines des plans parallèles au plan du grillage.

Si dans l'équation nous faisons $y = b_1$, quantité considérable relativement à a, nous trouvons approximativement

$$V_1 = -\frac{4\pi b_1}{a}(\lambda + \lambda') + C. \tag{6}$$

Si maintenant nous faisons $y = -b_2$, où b_2 est une quantité positive très grande relativement à a, nous trouvons, approximativement,

$$V_2 = \frac{4\pi b_2}{a}\lambda' + C. \tag{7}$$

Si c est le rayon des fils du grillage, c étant petit relativement à a, nous pouvons trouver le potentiel du grillage lui-même, en supposant que la surface du fil coïncide avec la surface équipotentielle qui coupe le plan des xz à une distance c de l'axe des z. Pour trouver le potentiel du grillage, nous faisons donc $x = c$ et $y = 0$, d'où

$$V = -2\lambda \log 2 \sin\frac{\pi c}{a} + C. \tag{8}$$

205. Nous avons maintenant obtenu des expressions qui représentent l'état électrique d'un système formé d'un grillage de fils dont le diamètre est petit relativement à leur écartement, et de deux surfaces planes conductrices situées de part et d'autre du grillage, à des distances considérables relativement à l'écartement des fils.

La densité superficielle σ_1 sur le premier plan se tire de l'équation (6),

$$4\pi\sigma_1 = \frac{\partial V_1}{\partial b_1} = -\frac{4\pi}{a}(\lambda + \lambda'); \tag{9}$$

la densité sur le second plan, de l'équation

$$4\pi\sigma_2 = \frac{\partial V_2}{\partial b_2} = \frac{4\pi}{a}\lambda'. \tag{10}$$

Si maintenant nous posons

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\log_e\left(2\sin\frac{\pi c}{a}\right), \tag{11}$$

et si nous éliminons λ et λ' entre les équations (6), (7), (8), (9), (10), nous trouvons

$$4\pi\sigma_1\left(b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{\alpha}\right)=V_1\left(1+\frac{b_2}{\alpha}\right)-V_2-V\frac{b_2}{\alpha}, \tag{12}$$

$$4\pi\sigma_2\left(b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{\alpha}\right)=V_2\left(1+\frac{b_1}{\alpha}\right)-V_1-V\frac{b_1}{\alpha}. \tag{13}$$

Si les fils sont infiniment fins, α devient infini, et les termes où il figure en dénominateur disparaissent, de sorte que le cas se ramène à celui de deux plans en présence, sans grillage interposé.

Si le grillage est en communication métallique avec l'un des plans, soit avec le premier, $V = V_1$, et le second membre de l'équation en σ se réduit à $V_1 - V_2$. Donc la densité σ_1, qui est induite sur le premier plan quand le grillage est interposé, est à la densité qui aurait été induite en l'absence du grillage, le second plan étant dans les deux cas maintenu au même potentiel, comme 1 est à $1+\frac{b_1b_2}{\alpha(b_1+b_2)}$.

Nous serions arrivés à la même valeur de l'effet produit par le grillage pour diminuer l'influence électrique de la première surface sur la seconde, si nous avions relié le grillage à cette seconde surface. Cela est évident, puisque b_1 et b_2 figurent de la même manière dans l'expression. C'est aussi une conséquence directe du théorème démontré au § 88.

L'induction d'un des plans électrisés sur l'autre à travers le grillage est la même que si, le grillage étant enlevé, la distance des plans était portée de b_1+b_2 à $b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{\alpha}$.

Si les deux plans sont maintenus au potentiel zéro et que le grillage soit porté à un potentiel donné, la charge du grillage est à la charge que prendrait une surface plane de même aire comme b_1b_2 est à $b_1b_2+\alpha(b_1+b_2)$.

Ces résultats ne sont approchés que si b_1 et b_2 sont grands relativement à α, et si α est grand relativement à c. La quantité α est une longueur qui peut avoir une grandeur quelconque. Elle devient infinie quand c décroît indéfiniment.

Si nous supposons $c=\frac{1}{2}a$, il n'y aura plus d'ouvertures entre les fils du grillage, et, par suite, pas d'induction à travers. Nous devons donc avoir, dans ce cas, $\alpha = 0$. Or la formule (11) donne

$$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\log_e 2 = -0{,}11\,a.$$

ce qui est évidemment faux, car, en aucun cas, un grillage ne pour-

rait changer le signe de l'induction. Mais il est facile d'atteindre un degré d'approximation plus élevé, dans le cas d'un grillage à fils cylindriques. Je n'indiquerai que la marche à suivre pour arriver à ce résultat.

Méthode d'approximation.

206. Puisque les fils sont cylindriques et que sur chacun d'eux la distribution est symétrique par rapport à un diamètre parallèle aux y, le véritable développement du potentiel est de la forme

$$V = C_0 \log r + \Sigma C_i r^i \cos i\theta, \tag{14}$$

où r est la distance d'un des fils à l'axe, et θ l'angle de r avec y. Puisque le fil est un conducteur, V doit être constant quand on fait r égal au rayon. Donc les coefficients de tous les cosinus multiples de θ doivent s'annuler.

Pour abréger, prenons de nouvelles coordonnées $\xi, \eta_1, \ldots$, telles que

$$a\xi = 2\pi x, \quad a\eta_1 = 2\pi y, \quad a\rho = 2\pi r, \quad a\beta = 2\pi b, \ldots, \tag{15}$$

et soit

$$F_\beta = \log(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2\cos\xi). \tag{16}$$

Si nous faisons

$$V = A_0 F + A_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + A_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2} + \ldots, \tag{17}$$

nous pourrons, endonnant des valeurs convenables aux coefficients A, exprimer tout potentiel qui est fonction de η_1 et de $\cos\xi$, et qui ne devient infini que pour $\eta_1 + \beta = 0$ et $\cos\xi = 1$.

Si $\beta = 0$, le développement de F en fonction de ρ et θ est

$$F_0 = 2\log\rho + \tfrac{1}{12}\rho^2\cos 2\theta - \tfrac{1}{1440}\rho^4\cos 4\theta + \ldots. \tag{18}$$

Pour des valeurs finies de β, le développement de F est

$$F_\beta = \beta + 2\log(1-e^{-\beta}) + \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\rho\cos\theta - \frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}\rho^2\cos 2\theta + \ldots. \tag{19}$$

Dans le cas d'un grillage et de deux plans conducteurs dont les équations sont $\eta_1 = \beta_1$ et $\eta_1 = -\beta_2$, l'équation du plan du grillage étant $\eta_1 = 0$, il y a deux séries infinies d'images du grillage. La première série le comprend lui-même avec une série infinie d'images situées de part et d'autre de lui, toutes égales et semblablement électrisées.

Les axes de ces cylindres imaginaires sont dans des plans dont les équations sont de la forme

$$\eta = \pm 2n(\beta_1 - \beta_2), \tag{20}$$

n étant un nombre entier.

La seconde série consiste en une série infinie d'images pour lesquelles les coefficients $A_0, A_2, A_4, \ldots$ sont égaux et de signes contraires aux mêmes quantités pour le grillage même, tandis que $A_1, A_3, \ldots$ sont égaux et de même signe. Les axes de ces images sont dans des plans dont les équations sont de la forme

$$\eta = 2\beta_2 \pm 2m(\beta_1 + \beta_2), \tag{21}$$

m étant un nombre entier.

Le potentiel dû à une série finie d'images de ce genre varie suivant que le nombre des images est pair ou impair. Donc le potentiel dû à une série infinie est indéterminé ; mais, si nous y ajoutons la fonction $B\eta + C$, les conditions du problème suffisent pour déterminer la distribution électrique.

Nous pouvons, en premier lieu, déterminer les potentiels V_1 et V_2 des deux plans conducteurs, en fonction des coefficients $A_0, A_1, \ldots$ et de B et C, ensuite les densités σ_1 et σ_2 en un point quelconque de ces plans. Les valeurs moyennes de σ_1 et σ_2 sont données par les équations

$$4\pi\sigma_1 = \frac{2\pi}{a}(A_0 - B), \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{2\pi}{a}(A_0 + B). \tag{22}$$

Ensuite, nous devons développer les potentiels dus au grillage lui-même et à toutes les images en fonction de ρ et des cosinus des arcs multiples de θ, et ajouter au résultat $B\rho\cos\theta + C$.

Alors les termes indépendants de θ donnent le potentiel V du grillage, et le coefficient de chaque cosinus d'arc multiple de θ, étant égalé à zéro, fournit une équation entre les coefficients indéterminés.

De la sorte, on peut trouver assez d'équations pour éliminer tous les coefficients, et laisser encore deux équations pour déterminer σ_1 et σ_2 en fonction de V_1, V_2 et V.

Ces équations seront de la forme

$$\begin{cases} V_1 - V = 4\pi\sigma_1(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_2(\alpha + \gamma), \\ V_2 - V = 4\pi\sigma_1(\alpha + \gamma) + 4\pi\sigma_2(b_2 + \alpha - \gamma). \end{cases} \tag{23}$$

La quantité d'électricité induite sur le plan protégé par le grillage, tandis qu'il existe avec l'autre plan une différence de potentiel donnée,

est la même que si les plateaux étaient à la distance

$$\frac{(\alpha-\gamma)(b_1+b_2)+b_1b_2-4\gamma}{\alpha+\gamma},$$

au lieu de b_1+b_2.

Les valeurs de α et γ sont à peu près les suivantes :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha = \frac{a}{2\pi}\Bigg[&\log\frac{a}{2\pi c}-\frac{5}{3}\,\frac{\pi^4c^4}{15a^4+\pi^4c^4}\\ &+2e^{-4\pi\frac{b_1+b_2}{a}}\left(1+e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}+e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}+\dots\right)+\dots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

$$(25)\qquad \gamma = \frac{3\pi ac^2}{3a^2+\pi^2c^2}\left(\frac{e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}+\frac{e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}\right)+\dots.$$

CHAPITRE XIII.

INSTRUMENTS ÉLECTROSTATIQUES.

Instruments électrostatiques.

Les instruments que nous avons à considérer pour le moment peuvent être classés comme il suit :

1° Machines électriques, servant à produire ou à accroître l'électrisation ;

2° Multiplicateurs, servant à accroître l'électrisation dans un rapport donné ;

3° Électromètres, servant à mesurer les potentiels et les charges électriques ;

4° Accumulateurs, servant à fixer des charges électriques considérables.

Machines électriques.

207. Dans la machine ordinaire, un plateau ou un cylindre de verre tourne en frottant contre une surface de cuir, sur laquelle on a étalé un amalgame de zinc et de mercure. La surface du verre s'électrise positivement, celle du frotteur négativement. En s'éloignant de l'électricité négative du frotteur, la surface électrisée du verre prend un potentiel positif élevé. Elle arrive alors en face d'une série de pointes métalliques aiguës reliées au conducteur de la machine. L'électricité positive du verre induit sur les pointes une électrisation négative d'autant plus intense que les pointes sont plus aiguës et plus rapprochées du verre.

Lorsque la machine fonctionne bien, il y a une décharge à travers l'air entre le verre et les pointes, et le verre perd une partie de sa charge positive qui passe aux pointes, et ainsi au conducteur principal de la machine, lequel est isolé, et de là à tout autre corps mis en communication électrique avec ce conducteur.

La partie du verre qui avance vers le frotteur a ainsi une charge positive plus faible que la charge qui s'éloigne du frotteur à ce même moment; et, par suite, les frotteurs et les conducteurs qui lui sont reliés s'électrisent négativement.

La surface de verre fortement positive qui s'éloigne du frotteur est attirée par la charge négative du frotteur avec plus d'énergie que la surface en partie déchargée qui approche. Les forces électriques agissent donc comme résistances aux forces employées à tourner la machine. Le travail dépensé à tourner cette machine est donc plus grand que le travail dépensé pour vaincre le frottement et les autres résistances ordinaires; l'excès de ce travail sert à produire un état d'électrisation dont l'énergie est équivalente à cet excès.

Le travail dépensé à vaincre le frottement se transforme immédiatement en chaleur dans les corps frottés. L'énergie électrique peut aussi se transformer en énergie mécanique ou en chaleur.

Si la machine ne produit pas d'énergie mécanique, toute l'énergie se transforme en chaleur, et la seule différence entre la chaleur due au frottement et celle qui est due à l'action électrique est que la première se produit sur les surfaces frottantes et que la seconde peut être produite dans des conducteurs éloignés (1).

Nous avons vu que la charge électrique de la surface de verre est attirée par le frotteur. Si cette attraction devenait suffisamment intense, il y aurait décharge entre le verre et le frotteur, et non entre le verre et les pointes du collecteur. Pour empêcher qu'il n'en soit ainsi, on attache au frotteur des secteurs de soie qui s'électrisent négativement et se collent au verre, diminuant ainsi son potentiel aux environs du frotteur.

Le potentiel augmente donc d'une manière plus graduelle, quand le verre s'éloigne du frotteur, et, par suite, il y a en chaque point une attraction moindre de la charge du verre au frotteur; donc moindre danger d'une décharge directe au frotteur.

Dans quelques machines la partie mobile est en ébonite au lieu de verre, et les frotteurs en bois ou en fourrure. Alors c'est le frotteur qui est électrisé positivement, et le conducteur principal qui est négatif.

L'électrophore de Volta.

208. L'électrophore consiste en un plateau de résine ou d'ébonite

(1) Il est probable que dans bien des cas où l'énergie dynamique se transforme en chaleur par le frottement, une partie de l'énergie se transforme d'abord en énergie électrique, et ensuite en chaleur, l'énergie électrique se dépensant à entretenir des courants en court circuit, près des surfaces frottantes. [*Voir* Sir W. Thomson, *Sur les propriétés électrodynamiques des métaux* [*Phil. Trans.*, p. 650; 1856)].

garni au dos d'un revêtement de métal et en une plaque de métal de même grandeur. Un manche isolant peut être vissé au dos de l'un ou de l'autre de ces plateaux. Le plateau d'ébonite est traversé par une goupille de métal qui fait communiquer son revêtement métallique avec le plateau de métal, lorsque les deux plateaux sont en contact.

On électrise négativement le plateau d'ébonite en le frottant avec de la laine ou une peau de chat; puis on approche le plateau métallique de l'ébonite, en le tenant par son manche isolant. Il ne passe point de décharge directe de l'ébonite au métal; mais le potentiel de celui-ci est rendu négatif par induction, et, lorsqu'il est arrivé à une certaine distance de la goupille métallique, une étincelle éclate : si alors on éloigne le plateau métallique, on lui trouve une charge positive qui peut être transmise à un autre conducteur. Le revêtement métallique du plateau d'ébonite a une charge négative égale et contraire à celle du plateau métallique.

Si l'on emploie cet instrument pour charger un condensateur ou un accumulateur, un des plateaux est placé sur un conducteur communiquant à la terre; l'autre plateau est alors appliqué sur le premier, puis sur l'électrode du condensateur, de nouveau sur le premier plateau et ainsi de suite. Si c'est le plateau d'ébonite qui est fixe, le condensateur est chargé positivement; si c'est le plateau métallique, le condensateur est chargé négativement.

Le travail effectué par la main, qui sépare les plateaux, est toujours plus grand que le travail de l'attraction électrique pendant que les plateaux s'approchent : l'opération qui consiste à charger le condensateur comporte donc une dépense de travail. Une partie de ce travail se retrouve dans l'énergie du condensateur chargé; une autre, dans la chaleur et le bruit de l'étincelle; le reste est employé à vaincre les autres résistances qui s'opposent au mouvement.

Des machines qui produisent de l'électricité au moyen de travail mécanique.

209. Dans les machines électriques à frottement ordinaires, on dépense bien plus de travail à vaincre le frottement qu'à augmenter la charge. Aussi toute disposition dans laquelle l'électrisation est produite uniquement en dépensant du travail mécanique contre les forces électriques aura, sinon une valeur pratique, du moins une grande importance scientifique. La première machine de ce genre paraît avoir été le duplicateur tournant de Nicholson, qui est décrit dans les *Philosophical*

Transactions de 1788, « comme un instrument où, en agissant sur une manivelle, on produit les deux sortes d'électricité sans frottement ni communication à la terre ».

210. Ce fut grâce au duplicateur tournant que Volta, partant de l'électrisation de la pile, réussit à obtenir une charge capable d'influencer son électromètre. Des instruments de même principe ont été inventés indépendamment par M. C.-F. Varley (1) et par Sir W. Thomson.

Ces instruments sont essentiellement formés de conducteurs de formes variées, dont les uns sont fixes et les autres mobiles. Les conducteurs mobiles sont appelés *véhicules*, et les conducteurs fixes *inducteurs, récepteurs* et *régénérateurs*. La forme des inducteurs et des récepteurs est telle qu'à un certain moment de leur révolution les véhicules sont presque complètement entourés par un corps conducteur. Comme les inducteurs et les récepteurs ne pourraient entourer complètement les véhicules, et permettre en même temps leur libre mouvement de va-et-vient, sans une disposition compliquée de pièces mobiles, l'instrument n'est pas théoriquement parfait sans un couple de régénérateurs qui recueillent la petite quantité d'électricité conservée par les véhicules au sortir des récepteurs.

Mais, pour l'instant, nous supposerons que les inducteurs et les récepteurs entourent complètement le véhicule, lorsque celui-ci leur est intérieur : la théorie se trouve alors bien simplifiée.

Nous supposerons la machine formée de deux inducteurs A et C, de deux récepteurs B et D, et de deux véhicules F et G.

Supposons l'inducteur A chargé positivement, de façon que son potentiel soit A et qu'il entoure le véhicule F qui est au potentiel F. Alors, si Q est le coefficient d'induction (compté positivement) de A sur F, la quantité d'électricité qui est sur le véhicule est

$$Q(F - A).$$

Si, pendant qu'il est entouré par l'inducteur, le véhicule est mis à la terre, $F = 0$, et la charge du véhicule est $-QA$, quantité négative. Supposons que le véhicule F tourne, entre dans le récepteur B et y touche un ressort qui le met en communication électrique avec B. Alors, comme on l'a vu au § 32, il se décharge entièrement, et cède toute sa charge négative au récepteur B.

(1) Brevet du 27 janvier 1860, n° 206.

Ensuite le véhicule entre dans l'inducteur C que nous supposerons chargé négativement. Pendant qu'il s'y trouve, C est mis à la terre et prend, par suite, une charge positive qu'il emporte et cède au récepteur D, et ainsi de suite.

De cette manière, si le potentiel des inducteurs reste toujours constant, les récepteurs B et D reçoivent à chaque révolution du véhicule des charges successives égales; chaque révolution augmente donc d'une quantité égale la charge des récepteurs.

Mais, si l'on met en communication l'inducteur A et le récepteur D, l'inducteur C et le récepteur B, les potentiels des inducteurs croissent constamment, et la quantité d'électricité cédée aux récepteurs à chaque révolution croît constamment.

Soient, par exemple, U le potentiel de A et D, V celui de B et C; le potentiel du véhicule est zéro quand il est à l'intérieur de A, puisqu'il communique à la terre; sa charge est donc $z = -QU$. Le véhicule entre dans B avec cette charge, et la lui cède. Si B est la capacité de B et C, leur potentiel passera de V à $V - \frac{Q}{B}U$.

Si, en même temps, l'autre véhicule a porté une charge $-Q'V$ de de C en D, le potentiel de A et D passera de U à $U - \frac{Q'}{A}V$, Q' étant le coefficient d'induction entre le véhicule et C, et A la capacité de A et D. Si donc U_n et V_n sont les potentiels des deux inducteurs après n demi-révolutions, U_{n+1} et V_{n+1} leurs potentiels après $n+1$ demi-révolutions,

$$U_{n+1} = U_n - \frac{Q'}{A}V_n,$$

$$V_{n+1} = V_n - \frac{Q}{B}U_n.$$

Si nous posons $\frac{Q}{B} = p^2$ et $\frac{Q'}{A} = q^2$, nous trouvons

$$pU_{n+1} + qV_{n+1} = (pU_n + qV_n)(1 - pq) = (pU_0 + qV_0)(1 - pq)^{n+1},$$
$$pU_{n+1} - qV_{n+1} = (pU_n - qV_n)(1 + pq) = (pU_0 - qV_0)(1 + pq)^{n+1},$$

d'où

$$U_n = U_0[(1-pq)^n + (1+pq)^n] + \frac{q}{p}V_0[(1-pq)^n - (1+pq)^n],$$

$$V_n = \frac{p}{q}U_0[(1-pq)^n - (1+pq)^n] + V_0[(1-pq)^n + (1+pq)^n].$$

On voit par ces équations que la quantité $pU + qV$ décroît constamment, et, par suite, quel que soit l'état d'électrisation initial, les

récepteurs finissent par avoir des charges opposées telles que les potentiels de A et B soient dans le rapport de p à $-q$.

D'autre part, la quantité $pU - qV$ croît constamment; par suite, si faible que soit à l'origine la quantité dont pU est supérieur ou inférieur à qV, cette différence croît en progression géométrique à chaque révolution jusqu'à ce que la force électromotrice devienne assez grande pour triompher de l'isolement de l'appareil.

On peut employer à divers usages des instruments de cette nature :

A fournir en abondance de l'électricité à un haut potentiel; c'est ce que faisait la grande machine de M. Varley;

A régler la charge d'un condensateur; c'est le cas dans l'électromètre de Thomson, dont la charge peut être augmentée ou diminuée en quelques tours d'une très petite machine de ce genre, que l'on appelle pour cette raison le *Replenisher;*

A multiplier de petites différences de potentiel. Les inducteurs peuvent être chargés d'abord à un potentiel extrêmement faible, celui, par exemple, d'un couple thermo-électrique; ensuite, en tournant la machine, on multiplie cette différence de potentiels d'une manière continue, jusqu'à ce qu'elle puisse être mesurée avec un électromètre ordinaire. Si l'on a déterminé par expérience dans quel rapport croît cette différence à chaque tour de la machine, la force électromotrice primitive qui a chargé les inducteurs peut se déduire du nombre de tours faits et de l'électrisation finale.

Dans la plupart de ces instruments, les véhicules tournent autour d'un axe, et viennent ainsi se placer dans la position convenable. Les communications s'établissent par le moyen de ressorts placés de façon à toucher les véhicules au moment voulu.

211. Mais Sir W. Thomson [1] a construit une machine destinée à multiplier les charges électriques, dans laquelle les véhicules sont des gouttes tombant de l'intérieur de l'inducteur dans un récepteur isolé. Le récepteur reçoit ainsi un afflux continu d'électricité de signe contraire à celle de l'inducteur. Si l'inducteur est électrisé positivement, le récepteur reçoit une charge constamment croissante d'électricité négative.

L'eau s'échappe du récepteur par un entonnoir dont le bec est presque entièrement entouré par le métal du récepteur. Les gouttes tombent donc de ce bec, presque entièrement déchargées d'électricité. Un autre inducteur et un autre récepteur de construction semblable

[1] *Proc. R. S.*, 20 juin 1867.

sont disposés de façon que l'inducteur d'un système soit relié au récepteur de l'autre. La charge des récepteurs cesse alors d'augmenter d'une façon constante, mais croît en progression géométrique avec le temps; les charges des deux récepteurs sont de signes contraires. Les charges continuent ainsi de croître, jusqu'à ce que, pendant leur chute, les gouttes soient assez écartées de leur direction par l'action électrique, pour tomber en dehors du récepteur, ou même aller frapper l'inducteur.

Dans cet instrument, l'énergie de la charge est empruntée à l'énergie des gouttes qui tombent.

212. Diverses autres machines ont été construites, dans lesquelles on fait usage du principe de l'induction électrique. La plus remarquable d'entre elles est la machine de Holtz, où le véhicule est un plateau de verre verni à la gomme laque, et où les inducteurs sont des morceaux de carton. On empêche les étincelles de passer entre les parties de l'appareil, en plaçant deux plateaux de verre de part et d'autre du plateau tournant qui constitue le véhicule. Cette machine est très puissante, et fort peu sensible à l'état de l'atmosphère. Le principe est le même que celui du duplicateur tournant et des autres instruments déduits de cette même idée; mais, comme le véhicule est un plateau isolant, et les inducteurs des conducteurs imparfaits, l'explication complète du jeu de la machine est plus difficile que dans le cas où les véhicules sont des corps conducteurs qui se chargent et se déchargent en des points déterminés.

213. Dans les machines électriques, précédemment décrites, il se produit des étincelles toutes les fois que le véhicule vient en contact avec un conducteur qui est à un potentiel différent du sien (*fig.* 18).

Or nous avons montré que, toutes les fois qu'il en est ainsi, il y a perte d'énergie; par suite tout le travail employé à tourner la machine n'est pas transformé en électricité sous forme utile, mais une partie se dépense à produire la chaleur et le bruit des étincelles électriques.

Aussi m'a-t-il paru désirable de faire voir comment on pourrait construire une machine électrique exempte de cette perte dans son rendement. Je ne la présente pas comme forme pratique de machine; je veux seulement montrer comment, pour éviter les pertes de travail, on pourrait appliquer aux machines électriques ce que l'on appelle un *régénérateur* dans les machines thermiques.

Dans la figure, A, B, C, A′, B′, C′ représentent des conducteurs

creux, fixés, disposés de façon que le véhicule P passe successivement à l'intérieur de chacun d'eux. De ces conducteurs A, A′ et B, B′ entourent presque complètement le véhicule, lorsqu'il est au milieu de son passage; C, C′ ne le recouvrent pas autant.

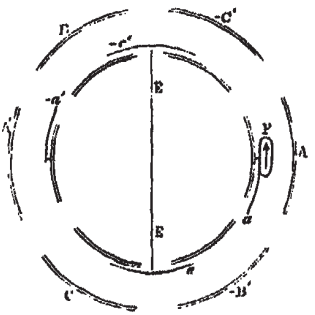
Nous supposerons que A, B, C soient reliés à une bouteille de Leyde de grande capacité au potentiel V, et que A′B′C′ soient reliés à une autre bouteille au potentiel — V′.

P est un des véhicules, qui tourne de A vers C′, etc., et dans sa course, touche des ressorts reliés, a et a' respectivement à A et A′, et e et e' à la terre.

Supposons que, quand le véhicule P est au milieu de A, le coefficient d'induction entre P et A soit — A.

Dans cette position, la capacité de P est plus grande que A, puis-

Fig. 18.



qu'il n'est pas complètement entouré par le récepteur A. Soit $A + a$ cette capacité.

Alors, si U est le potentiel de P, et V celui de A, la charge de P est $(A + a)U - AV$.

Mettons P en contact avec le ressort a, pendant qu'il est au milieu de A; le potentiel de P sera V comme celui de A, sa charge sera donc aV.

Si maintenant P quitte le ressort a, il emporte la charge aV. Quand P quitte A, son potentiel diminue, et diminue encore davantage lorsque le véhicule est soumis à l'influence de l'inducteur C′ chargé négativement.

Si, quand P entre dans C′, le coefficient d'induction sur C′ est — C′, et sa capacité $C' + c'$, et si U est le potentiel de P, la charge de P est

$$(C' + c')U + C'V' = aV,$$

si

$$c'V' = aV;$$

en ce point le potentiel de U se réduit à zéro.

Supposons qu'en ce point P entre en contact avec le ressort c' qui est relié à la terre. Puisque le potentiel de P est égal à celui du ressort, il n'y aura pas d'étincelle au moment du contact.

Ce conducteur C′ qui permet de mettre le véhicule à la terre, sans qu'il y ait d'étincelle, correspond à la disposition appelée *régénérateur* dans les machines thermiques. Nous l'appellerons donc un *régénérateur*.

Supposons que P continue de se mouvoir et reste en contact avec le ressort e', jusqu'à ce qu'il arrive au milieu de l'inducteur B, dont le potentiel est V. Si — B est le coefficient d'induction entre P et B en ce point, comme d'ailleurs U = o, la charge de P est — BV.

Quand P quitte le ressort de terre, il emporte cette charge avec lui. Pendant qu'il marche de l'inducteur positif B vers le récepteur négatif A′, son potentiel est négatif et va croissant, et, s'il gardait la charge, son potentiel serait au milieu de A′

$$-\frac{A'V' + BV}{A' + a'},$$

et si BV est plus grand que $a'V'$, sa valeur numérique sera plus grande que celle de V′. Donc il existe, avant le milieu de A′, un point où P a le potentiel — V′. En ce point, mettons-le en contact avec le ressort a' du récepteur négatif. Il n'y aura pas d'étincelle, puisque les deux corps sont au même potentiel. Faisons mouvoir P jusqu'au milieu de A′, toujours en contact avec le ressort a', et, par suite, toujours au même potentiel que A′ : durant ce mouvement, P donne à A′ une charge négative. Au milieu de A′, il quitte le ressort et emporte une charge $-a'V'$ vers le régénérateur positif C, où il touche le contact de terre c, et où son potentiel se réduit à zéro. Puis il glisse le long de ce ressort jusque dans l'inducteur négatif B′, prend pendant ce mouvement une charge négative B′V′, qu'il finit par céder au récepteur positif A ; et le cycle des opérations recommence.

Pendant ce cycle, le récepteur positif perd une charge aV et gagne une charge B′V′. Donc l'accroissement total d'électricité positive est

$$B'V' - aV.$$

De même l'accroissement total d'électricité négative est

$$BV - a'V'.$$

Si l'on donne aux inducteurs une forme telle qu'ils soient aussi près

de la surface du véhicule que le permet la condition de maintenir les pièces isolées, on rend B et B' grands; et si l'on fait les récepteurs de façon qu'ils entourent presque entièrement le véhicule quand il est dans ces pièces, a et a' deviennent très petits, et la charge des deux bouteilles de Leyde augmente à chaque tour.

Les conditions que doivent remplir les régénérateurs sont

$$C'V' = aV \quad \text{et} \quad CV = a'V'$$

et, puisque a et a' sont très petits, les régénérateurs n'ont pas besoin d'être très grands ou très voisins des véhicules.

Des électromètres et des électroscopes.

214. Un électromètre est un instrument au moyen duquel on peut mesurer des charges ou des potentiels électriques. On appelle *électroscopes* les instruments qui peuvent révéler l'existence de charges électriques ou de différences de potentiel, mais qui ne sont pas susceptibles de fournir des mesures numériques.

Un électroscope suffisamment sensible peut servir dans les mesures électriques, pourvu que nous puissions réduire la mesure à constater l'absence d'une charge. Par exemple, si nous avons deux corps électrisés A et B, nous pouvons employer la méthode décrite au Chapitre I; pour déterminer quel est celui des deux corps qui a la plus forte charge, mettons le corps A sur un support isolant, et plaçons-le ainsi dans un vase clos et isolé C. Mettons C à la terre, puis isolons-le de nouveau : il n'y aura plus de charge extérieure sur C. Enlevons maintenant A, et mettons B à l'intérieur de C, puis observons avec l'électroscope l'état électrique de C. Si la charge de B est égale à celle de A, il n'y a pas d'électrisation; mais, si elle est plus grande ou plus petite, il y aura une charge de même espèce que la charge de B, ou d'espèce contraire.

Ces sortes de méthodes, où ce que l'on doit observer, c'est la non-existence de quelque phénomène, sont appelées *méthodes de réduction à zéro*. Elles n'exigent qu'un instrument susceptible de révéler l'existence du phénomène.

Dans une autre classe d'instruments destinés à enregistrer les phénomènes, on peut se fier à l'instrument pour donner toujours la même indication, quand la quantité à enregistrer prend la même valeur; mais les lectures faites sur l'échelle de l'instrument ne sont point proportionnelles aux valeurs de la quantité, et la relation entre ces lectures et les valeurs correspondantes de la quantité est inconnue :

l'on sait seulement que l'une est une fonction continue de l'autre. A cette classe appartiennent plusieurs électromètres fondés sur les répulsions qui s'exercent entre les parties de l'instrument qui ont des charges semblables. L'usage de ces appareils est de prendre note des phénomènes, non de les mesurer. Au lieu des valeurs vraies de la quantité à mesurer, on obtient une série de nombres qui peuvent plus tard servir à déterminer de vraies valeurs, lorsqu'une étude convenable de l'échelle de l'instrument a permis de dresser une Table de concordance.

Dans une classe d'instruments encore plus parfaits, les lectures sont proportionnelles aux quantités à mesurer; pour faire une mesure complète des quantités, il suffit donc de connaître le coefficient par lequel il faut multiplier la lecture faite sur l'échelle pour avoir la valeur vraie de la quantité.

On appelle *instruments absolus* ceux qui sont construits de façon à renfermer en eux-mêmes tout ce qui est nécessaire pour déterminer les valeurs vraies des quantités.

Balance de torsion de Coulomb.

215. Un grand nombre des expériences par lesquelles Coulomb a établi les lois fondamentales de l'électricité ont été faites en mesurant la force qui agit entre deux petites boules électrisées, dont l'une est fixe, et dont l'autre se maintient en équilibre sous l'influence de deux forces, l'action électrique qui s'exerce entre les deux boules, et l'élasticité de torsion d'un fil de verre ou de métal (*voir* § 38).

Une balance de torsion consiste en une tige de gomme laque suspendue à un fil fin de métal ou de verre, et portant à une de ses extrémités une petite boule de moelle de sureau, dorée et bien unie. A sa partie supérieure, le fil de suspension est fixé à l'axe vertical d'un index que l'on peut faire tourner sur un cercle gradué horizontal, de façon à tordre l'extrémité supérieure du fil d'un nombre quelconque de degrés autour de l'axe de ce fil même.

L'ensemble de l'appareil est renfermé dans une cage; une autre petite boule est montée sur une tige isolante, de façon que l'on puisse la charger, l'introduire dans la cage par un trou, et la placer de manière que son centre coïncide avec un point déterminé situé sur le cercle horizontal que décrit la boule suspendue. La position de la boule suspendue se détermine au moyen d'un cercle gradué gravé sur la cage cylindrique de l'instrument.

Supposons les deux boules chargées, et la boule suspendue en équi-

libre dans une position connue, telle que la tige de torsion fasse un angle θ avec le rayon passant par le centre de la sphère fixe. La distance des centres est alors $2a\sin\frac{\theta}{2}$, a étant le rayon de la tige de torsion; et si F est la force qui agit entre les sphères, le moment de cette force par rapport à l'axe de torsion est

$$Fa\cos\frac{\theta}{2}.$$

Déchargeons complètement les deux boules, et soit maintenant φ l'angle que fait la tige de torsion dans sa position d'équilibre avec le rayon passant par le centre de la boule fixe.

L'angle dont la force électrique a fait tourner la tige de torsion est $\theta-\varphi$, et si M est le moment d'élasticité de torsion du fil, nous aurons l'équation

$$Fa\cos\frac{\theta}{2}=M(\theta-\varphi).$$

Si donc nous pouvons connaître M, nous pouvons déterminer la force F qui agit entre les sphères à la distance $2a\sin\frac{\theta}{2}$.

Pour trouver le moment de torsion M, soient I le moment d'inertie de la tige de torsion, T la durée d'une oscillation double de la tige sous l'influence de l'élasticité de torsion : alors

$$M=4\pi^2\frac{I}{T^2}.$$

Dans tous les électromètres, il est de la plus grande importance de savoir quelle force on mesure. Or la force qui agit sur la tige suspendue est due en partie à l'action directe de la boule fixe, mais en partie aussi à l'électrisation des parois de la cage, si ces parois sont électrisées.

Si la cage est en verre, il est impossible de déterminer quelle est l'électrisation de sa surface, autrement que par des mesures faites en chaque point avec beaucoup de difficultés. Mais si la cage est en métal, ou si une cage de métal entourant presque entièrement l'appareil est placée comme un écran entre le verre et les boules, l'électrisation de la surface intérieure de l'écran ne dépendra que de l'électrisation des boules, et celles-ci seront entièrement soustraites à l'influence de l'électrisation du verre. De cette manière on peut éliminer toute incertitude due à l'action de la cage.

Pour donner un exemple dans lequel on puisse calculer tous les

effets, supposons que la cage soit une sphère de rayon b, et que son centre coïncide avec le centre du mouvement de la tige de torsion; soit a la longueur de cette tige; soient E et E_1 les charges des deux boules, θ l'angle de leurs positions, a_1 la distance de la sphère fixe au centre, et r la distance des deux petites sphères.

Négligeons pour l'instant l'effet de l'induction sur la distribution électrique à la surface des petites sphères; la force qui agit entre elles sera une répulsion

$$\frac{EE_1}{r^2},$$

et le moment de cette force par rapport à un axe vertical passant par le centre sera

$$\frac{EE_1 aa_1 \sin\theta}{r^3}.$$

L'image de E_1 due à la surface sphérique de la cage est un point situé sur le même rayon à une distance $\frac{b^2}{a_1}$, et ayant une charge $-E_1\frac{b}{a_1}$; le moment de l'attraction entre P et cette image, par rapport à l'axe de suspension, est

$$EE_1\frac{b}{a_1}\cdot\frac{a\frac{b^2}{a_1}\sin\theta}{\left(a^2-2\frac{ab^2}{a_1}\cos\theta+\frac{b^4}{a_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=EE_1\frac{aa_1\sin\theta}{b^2\left(1-2\frac{aa_1}{b^2}\cos\theta+\frac{a^2a_1^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si b, rayon de la cage sphérique, est grand relativement à a et a_1, distances des sphères au centre, on peut négliger le second et le troisième terme du facteur qui est en dénominateur. Le moment total qui tend à faire tourner la tige de torsion peut alors s'écrire

$$EE_1 aa_1\sin\theta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{b^3}\right)=M(\theta-\gamma).$$

Électromètres pour la mesure des potentiels.

216. Dans tous les électromètres, la partie mobile est un corps chargé d'électricité à un potentiel différent de celui de certains corps fixes qui l'entourent. Si, comme dans la méthode de Coulomb, on emploie un corps isolé ayant une certaine charge, c'est la charge qui est l'objet direct de la mesure. Nous pouvons toutefois relier par des fils fins les boules de l'électromètre de Coulomb à différents conducteurs.

La charge des boules dépendra alors du potentiel de ces conducteurs et du potentiel de la cage de l'instrument. La charge de chaque boule sera à peu près égale au produit de son rayon par l'excès de son potentiel sur celui de la cage, pourvu toutefois que les rayons des boules soient petits par rapport à la distance des boules entre elles, à la paroi ou à l'ouverture de la cage.

Mais la disposition de l'appareil de Coulomb n'est pas très bien appropriée à des mesures de ce genre : en effet, si la différence des potentiels est faible, la force qui agit entre les boules convenablement écartées est très petite. Une forme plus convenable est celle de l'électromètre à plateau attiré. C'est Sir W. Snow Harris (1) qui construisit les premiers électromètres fondés sur ce principe. Depuis, Sir W. Thomson (2) a porté à un haut degré de perfection leur théorie ainsi que leur construction.

Lorsque deux disques à des potentiels différents sont placés l'un en face de l'autre à une petite distance, il y a sur les faces en regard une distribution à peu près uniforme, et une charge très faible sur le revers de ces disques, pourvu qu'il n'y ait point dans le voisinage d'autre conducteur ou corps électrisé. La charge du disque positif est à peu près proportionnelle à sa surface et à la différence de potentiel des deux disques et inversement proportionnelle à la distance de ces disques.

Si donc on donne aux disques une grande surface, et si l'on rend leur écartement très petit, une différence des potentiels faible pourra donner lieu à une force d'attraction mesurable.

On a donné (§ 202) la théorie mathématique de la distribution électrique sur deux disques ainsi disposés; mais, comme il est impossible de faire la cage de l'appareil assez grande pour que l'on puisse supposer les disques isolés dans l'espace infini, il n'est pas facile d'interpréter numériquement les résultats fournis par l'instrument pris sous cette forme.

217. Un des principaux perfectionnements apportés à cet appareil par Sir W. Thomson consiste à avoir ajouté un anneau de garde au disque attiré.

Au lieu de suspendre un des disques tout entier et de déterminer la force qui agit sur lui, on sépare du reste la partie centrale de ce

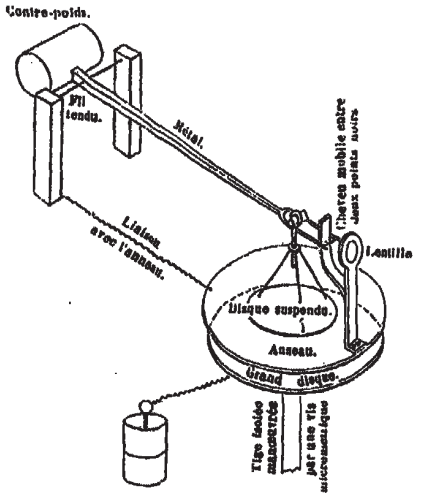
(1) *Phil. Trans.*, 1834.

(2) *Voir* un excellent Rapport de Sir W. Thomson *Sur les électromètres* (*Report of the British Association*, Dundee, 1867).

disque et l'on en fait le disque attiré, l'anneau extérieur qui forme le reste du disque restant fixe. De la sorte, on ne mesure la force que sur les parties du disque où elle est le plus uniforme, et le défaut d'uniformité de la distribution sur les bords n'a plus d'importance, puisqu'il porte sur l'anneau de garde, et non sur la partie suspendue du disque (*fig.* 19).

En outre, en reliant l'anneau de garde à une boîte métallique qui renferme le revers du disque attiré et tout son système de suspension,

Fig. 19.



on rend impossible l'existence d'une charge sur le revers du disque, puisque ce revers fait alors partie de la surface intérieure d'un conducteur creux qui est tout entier au même potentiel.

L'électromètre absolu de Thomson consiste essentiellement en deux plateaux parallèles à des potentiels différents; l'un d'eux est fait de telle sorte qu'une certaine surface, dont aucun point n'est voisin des bords du plateau, est mobile sous l'influence de la force électrique. Supposons, pour fixer les idées, que le disque attiré et son anneau de garde soient au-dessus du disque fixe. Celui-ci est toujours horizontal, monté sur une tige isolante, et peut recevoir, au moyen d'une vis micrométrique, un mouvement vertical mesurable.

L'anneau de garde est au moins aussi grand que le disque fixe; sa

surface inférieure est exactement plane et parallèle au disque fixe. Sur l'anneau de garde est monté un fléau de balance très sensible, auquel est suspendu un disque mobile très léger qui remplit presque exactement l'ouverture circulaire de l'anneau de garde, sans toutefois frotter contre ses bords. La surface inférieure du disque suspendu doit être exactement plane, et il faut avoir un moyen de reconnaître quand son plan coïncide avec le plan de la surface inférieure de l'anneau de garde, de manière à ne former avec lui qu'un seul plan, interrompu seulement par l'intervalle étroit qui sépare le disque suspendu de l'anneau de garde.

A cet effet, on agit sur la vis du disque inférieur jusqu'à ce qu'il soit en contact avec l'anneau de garde, puis on laisse reposer sur lui le disque suspendu, dont la surface inférieure est alors dans le même plan que celle de l'anneau de garde. La position du disque mobile, par rapport à l'anneau de garde, est alors définie par un système de repères. Généralement, Sir W. Thomson emploie à cet usage un fil noir fixé à la partie mobile, et se mouvant verticalement avec elle en regard de deux points noirs marqués sur un fond d'émail blanc : on observe le fil en même temps que ces points, au moyen d'une lentille plan-convexe, dont le côté plan est tourné vers l'œil. Si, à travers cette lentille, on voit le fil droit et au milieu de l'intervalle des deux points noirs, on dit qu'il est dans sa *position de visée :* cela signifie que le disque suspendu avec lequel il se meut est dans la position voulue, pour ce qui est de la hauteur. On s'assure que le disque suspendu est horizontal, en comparant les deux parties de l'image d'un objet vu par réflexion sur la surface supérieure du disque suspendu et sur celle de l'anneau de garde.

Le fléau de balance est disposé de telle sorte qu'un poids connu étant placé au milieu du disque suspendu, ce disque est en équilibre dans sa position de visée, l'ensemble de l'appareil ayant été d'ailleurs complètement déchargé par la mise en communication métallique de toutes ses parties. Une cage métallique est placée sur l'anneau de garde, de façon à renfermer la balance et le disque suspendu, tout en laissant des ouvertures suffisantes pour voir les repères.

L'anneau de garde, la cage et le disque suspendu sont en communication métallique, mais sont isolés des autres parties de l'appareil.

Supposons maintenant qu'il faille mesurer la différence des potentiels de deux conducteurs. On relie par des fils métalliques les deux conducteurs, l'un au disque supérieur, l'autre au disque inférieur, on enlève le poids du disque suspendu et l'on déplace le disque inférieur au moyen de la vis micrométrique jusqu'à ce que l'attraction élec-

trique amène le disque suspendu dans sa position de visée. On sait alors que l'attraction des disques est égale au poids qui amène le disque dans sa position de visée.

Si W est la valeur numérique du poids, g la force de gravité, la force est Wg; et si A est la surface du disque suspendu, D la distance des disques et V leur différence de potentiels (1),

$$Wg = \frac{V^2 A}{8\pi D^2} \quad \text{ou} \quad V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

---

(1) Désignons par R le rayon du disque suspendu, par R' celui de l'ouverture de l'anneau de garde : la largeur de l'espace annulaire qui sépare le disque de l'anneau est

$$B = R' - R.$$

Si D est la distance du disque suspendu au grand disque fixe, et V la différence de leurs potentiels, d'après l'étude faite au § 201, la quantité d'électricité répandue sur le disque suspendu sera

$$Q = V\left(\frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D}\,\frac{z}{D + z}\right)$$

où

$$z = B\,\frac{\log_e 2}{\pi} \quad \text{ou} \quad z = 0{,}220635\,(R' - R).$$

Si la surface de l'anneau de garde n'est pas exactement dans le plan de la surface du disque suspendu, supposons que la distance du disque fixe à l'anneau de garde soit, non pas D, mais $D + z = D'$; il résulte, de l'étude faite au § 225, qu'il y a sur les bords du disque une charge additionnelle due à sa hauteur z au-dessus de la surface générale de l'anneau de garde. Donc, dans ce cas, la charge totale est à peu près

$$Q = V\left[\frac{R^2 + R'^2}{8D} - \frac{R'^2 - R^2}{8D}\,\frac{z}{D} + \frac{(R + R')}{D}\,(D' - D)\log_e\frac{4\pi(R' + R)}{D' - D}\right],$$

et dans l'expression de l'attraction nous devons substituer à A, surface du disque, la quantité corrigée

$$A = \tfrac{1}{2}\pi\left[R^2 + R'^2 - (R'^2 - R^2)\,\frac{z}{D + z} + 8(R + R')(D' - D)\log_e\frac{4\pi(R + R')}{D' - D}\right],$$

où

R est le rayon du disque suspendu,
R' le rayon de l'ouverture de l'anneau de garde,
D la distance du disque fixe au disque suspendu,
D' la distance du disque fixe à l'anneau de garde,
z $0{,}220635\,(R' - R)$.

Si z est petit en comparaison de D, nous pourrons négliger le deuxième terme et, si D' — D est petit, le troisième.

Si le disque suspendu est circulaire et de rayon R et si le rayon de l'ouverture de l'anneau de garde est R',

$$A = \tfrac{1}{2}\pi(R^2 + R'^2) \quad \text{et} \quad V = 4D\sqrt{\frac{gW}{R^2 + R'^2}}.$$

218. Il y a toujours une certaine incertitude dans la détermination de la lecture du micromètre qui correspond à $D = 0$; et, comme une erreur sur la position du disque devient d'autant plus importante que D est plus petit, Sir W. Thomson préfère ramener toutes ces mesures à la mesure des différences de force électromotrice V. Ainsi, si V et V' sont deux potentiels, et D et D' les distances correspondantes,

$$V - V' = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Ainsi, pour mesurer la force électromotrice d'une pile, on emploie deux électromètres.

Au moyen d'un condensateur, dont on entretient la charge avec un *replenisher*, si cela est nécessaire, on maintient à un potentiel constant le plateau inférieur du principal électromètre. On vérifie qu'il en est bien ainsi, en reliant le plateau inférieur de l'électromètre principal au plateau inférieur d'un électromètre auxiliaire dont le disque suspendu est mis à la terre. La distance des plateaux de l'électromètre secondaire et la force qui est nécessaire pour amener dans la position de visée son disque suspendu sont constantes; si donc nous élevons le potentiel du condensateur jusqu'à ce que l'électromètre secondaire soit dans sa position de visée, nous savons qu'à ce moment le potentiel du disque inférieur de l'électromètre principal surpasse le potentiel de la terre d'une quantité constante que nous pouvons appeler V.

Si maintenant nous mettons à la terre le pôle positif de la pile et si nous relions son électrode négative au disque suspendu de l'électromètre principal, la différence de potentiel des deux disques sera $V + v$, v étant la force électromotrice de la pile. Soit D la lecture du micromètre dans ce cas; soit D' la lecture lorsque le disque suspendu est relié à la terre; on a

$$v = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

On peut de la sorte mesurer à l'électromètre une force électromotrice v, en laissant les disques à des distances convenables pour la mesure; car, si la distance est trop petite, un petit changement dans la

distance absolue produit un grand changement dans la force, puisque la force varie en raison inverse du carré de la distance; et une erreur sur la distance absolue produit une forte erreur sur le résultat, à moins que la distance ne soit très grande comparativement aux valeurs extrêmes que peut atteindre l'erreur sur la vis micrométrique.

L'effet des petites imperfections dans la forme des surfaces des disques et de l'intervalle qui les sépare décroît en raison inverse du cube ou des puissances plus élevées de la distance; quelle que soit la forme d'une surface régulière dont les aspérités sont tangentes à une surface plane, l'effet électrique, à une distance considérable relativement à la hauteur des aspérités, est le même que celui d'un plan placé à une certaine distance en arrière du plan des sommets des aspérités (*voir* les § 197 et 198).

Au moyen d'une charge auxiliaire, contrôlée par l'électromètre auxiliaire, on peut assurer un écartement convenable des disques.

L'électromètre auxiliaire peut être d'une construction plus simple, et ne point comporter le moyen de déterminer les forces d'attraction en mesure absolue; il suffit qu'il assure une charge constante. Un pareil électromètre peut être appelé *électromètre jauge*.

La méthode qui consiste à employer une charge auxiliaire, outre la charge à mesurer, est appelée *méthode hétérostatique d'électrométrie*, par opposition avec la méthode idiostatique, où tout l'effet est produit par la charge à mesurer.

Dans plusieurs modèles d'électromètres à plateau attiré, le plateau attiré est à un bout d'une tige; celle-ci est supportée par un fil de platine qui passe par son centre de gravité et est maintenu tendu par un ressort. L'autre bout de la tige porte le cheveu que l'on amène dans sa position de visée, en faisant varier l'écartement des plateaux et en ramenant ainsi la force d'attraction électrique à une valeur constante. En général, dans ces électromètres, cette force n'est pas déterminée en mesure absolue, mais on sait qu'elle est constante, pourvu que l'élasticité de torsion du fil de platine ne change pas.

L'ensemble de l'appareil est placé à l'intérieur d'une bouteille de Leyde, dont la surface intérieure est chargée et reliée au disque attiré et à l'anneau de garde. L'autre disque, que l'on manœuvre par la vis micrométrique, est d'abord mis à la terre, puis relié au conducteur dont on doit mesurer le potentiel. La différence des lectures, multipliée par une constante à déterminer pour chaque électromètre, donne le potentiel demandé.

219. Les électromètres que l'on vient de décrire ne sont pas auto-

matiques; à chaque observation, il faut que l'opérateur fasse le réglage de la vis micrométrique, ou quelque autre opération. Ils ne peuvent donc servir comme appareils enregistreurs, lesquels doivent se mettre d'eux-mêmes dans la position voulue. Cette condition est remplie dans l'électromètre à quadrants de Thomson.

Le principe sur lequel est fondé cet instrument peut se résumer comme il suit :

A et B sont deux conducteurs fixes qui peuvent être à des potentiels égaux ou non. C est un conducteur mobile, porté à un potentiel élevé et placé de façon à être opposé, partie à A, partie à B, le rapport des parties changeant quand C se déplace.

La disposition la plus avantageuse dans ce but consiste à rendre C mobile autour d'un axe, et à donner aux surfaces opposées A, B et C la forme de surfaces de révolution autour de cet axe.

De la sorte, la distance de la surface de C aux surfaces opposées A et B reste toujours la même, et le mouvement de C dans le sens positif ne fait qu'augmenter l'aire opposée à B et diminuer l'aire opposée à A.

Si les potentiels de A et B sont égaux, aucune force ne poussera C de A vers B; mais, si le potentiel de C diffère plus du potentiel de B que du potentiel de A, C tendra à se mouvoir de façon à augmenter l'aire de sa surface qui est opposée à B.

Par une disposition d'appareil convenable, on peut rendre cette force à peu près constante pour les différentes positions de C comprises entre certaines limites; et, si C est suspendu à un fil de torsion, ses déviations seront à peu près proportionnelles à la différence des potentiels de A et de B, multipliée par la différence du potentiel de C et de la moyenne des potentiels de A et de B.

C est maintenu à un potentiel élevé par un condensateur pourvu d'un *replenisher*, et contrôlé par un électromètre jauge; A et B sont reliés aux deux conducteurs dont on doit mesurer la différence de potentiels. Plus le potentiel de C est élevé, plus l'instrument est sensible. La charge de C étant indépendante de celle que l'on doit mesurer, cet instrument se range dans la classe des hétérostatiques.

Nous pouvons appliquer à cet électromètre la théorie générale des systèmes de conducteurs, donnée aux § 93 et 127.

Soient A, B, C les potentiels respectifs des trois conducteurs; a, b, c leurs capacités, p le coefficient d'induction entre B et C, q le coefficient entre A et C, r le coefficient entre A et B. En général, tous ces coefficients varieront avec la position de C; et, si C est disposé de façon que les extrémités de A et de B restent éloignées des extré-

mités de C, tant que le mouvement de C reste compris entre certaines limites, nous pourrons déterminer la forme de ces coefficients. Si θ représente la déviation de C de A vers B, la partie de la surface A qui est opposée à C diminue quand θ augmente. Donc, si A est maintenu au potentiel 1, tandis que B et C sont maintenus au potentiel zéro, la charge de A deviendra $a = a_0 - \alpha\theta$, où a_0 et α sont des constantes, et où a est la capacité de A. Si A et B sont symétriques, la capacité de B sera $b = b_0 + \alpha\theta$.

La capacité de C ne change pas par suite du mouvement; car le seul effet du mouvement est d'amener une autre partie de C en face de l'intervalle qui est entre A et B. Donc $C = C_0$.

La quantité d'électricité induite sur C, quand B est porté au potentiel limité, est $p = p_0 - \alpha\theta$.

Le coefficient d'induction entre A et C est $q = q_0 + \alpha\theta$.

Le coefficient d'induction entre A et B n'est pas changé par le mouvement de C et reste $r = r_0$.

Donc l'énergie électrique du système est

$$W = \tfrac{1}{2}A^2 a + \tfrac{1}{2}B^2 b + \tfrac{1}{2}C^2 c + BCp + CAq + ABr,$$

et, si Θ est le moment de la force qui tend à accroître θ,

$$\Theta = \frac{dW}{d\theta}, \text{ A, B, C étant supposés constants,}$$

$$= \tfrac{1}{2}A^2\frac{da}{d\theta} + \tfrac{1}{2}B^2\frac{db}{d\theta} + \tfrac{1}{2}C^2\frac{dc}{d\theta} + BC\frac{dp}{d\theta} + CA\frac{dq}{d\theta} + AB\frac{dr}{d\theta}$$

$$= -\tfrac{1}{2}A^2\alpha + \tfrac{1}{2}B^2\alpha - BC\alpha + CA\alpha$$

ou

$$\Theta = \alpha(A - B)[C - \tfrac{1}{2}(A + B)].$$

Dans le modèle actuel des électromètres à quadrants de Thomson, les conducteurs A et B sont en forme de boîte cylindrique, entièrement partagée en quatre quadrants (*fig.* 20). Ces quadrants sont isolés les uns des autres, mais réunis par des fils, de façon que deux quadrants opposés soient reliés à A et les deux autres à B.

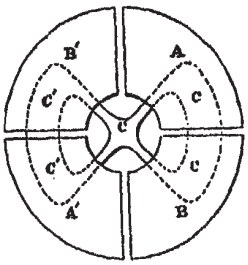
Le conducteur C est suspendu de façon à pouvoir tourner autour d'un axe vertical : il consiste en deux arcs plats, d'un quadrant, opposés l'un à l'autre et réunis par leurs rayons extrêmes.

Dans la position d'équilibre, ces quadrants doivent être partie dans A, et partie dans B, les rayons qui les supportent étant près des milieux des quadrants de la boîte creuse, en sorte que les divisions de cette boîte et les extrémités et les supports de C soient aussi éloignés que possible.

Le conducteur C est maintenu constamment à un potentiel élevé, par une communication avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde qui forme la cage de l'appareil. A et B sont reliés, le premier à la terre, le second au corps dont on doit mesurer le potentiel.

Si le potentiel de ce corps est zéro et si l'instrument est bien réglé, il ne doit point y avoir de force tendant à mouvoir C; mais, si le potentiel de A est de même signe que celui de C, C tend à se mouvoir de A vers B sous l'action d'une force presque uniforme, et le système de suspension se tord jusqu'à ce qu'une force égale soit mise en jeu et

Fig. 20.



produise l'équilibre. Entre certaines limites, les déviations de C sont proportionnelles au produit

$$(A - B)[C - \tfrac{1}{2}(A + B)].$$

En augmentant le potentiel de C, on peut augmenter le potentiel de l'instrument; et, pour de petites valeurs de $\frac{1}{2}(A + B)$, les déviations sont à peu près proportionnelles à $(A - B)C$.

De la mesure du potentiel électrique.

220. Pour déterminer en mesure absolue de fortes différences de potentiel, nous pouvons employer l'électromètre à disque attiré, et comparer l'attraction à l'effet d'un poids. Si, en même temps, nous mesurons avec l'électromètre à quadrants la différence de potentiels des mêmes conducteurs, nous déterminerons la valeur absolue de certains points de l'échelle de l'électromètre à quadrants, et nous pourrons ainsi déduire la valeur des lectures faites sur l'échelle de l'électromètre à quadrants, en fonction du potentiel de la partie suspendue et du moment de torsion de l'appareil de torsion.

Pour déterminer le potentiel de la charge d'un conducteur de di-

mensions finies, on peut relier le conducteur à l'une des électrodes d'un électromètre, l'autre électrode étant reliée à la terre ou à un corps dont le potentiel reste constant. La lecture de l'électromètre donnera le potentiel du corps après que sa charge se sera partagée entre lui et la partie de l'électromètre avec laquelle il est mis en contact. Si K désigne la capacité du conducteur et K′ celle de cette partie de l'électromètre, et si V et V′ sont les potentiels de ces deux corps avant leur mise en contact, leur potentiel commun, après le contact, sera

$$\overline{V} = \frac{KV + K'V'}{K + K'}.$$

Le potentiel initial du conducteur était donc

$$V = \overline{V} + \frac{K'}{K}(\overline{V} - V').$$

Si le conducteur n'est pas grand par rapport à l'électromètre, K′ sera comparable à K, et, à moins que l'on ne puisse déterminer les valeurs de K et K′, le second terme de cette expression aura une valeur incertaine. Toutefois, si, avant d'établir le contact, on peut porter l'électrode de l'électromètre à un potentiel très voisin de celui du corps, l'incertitude sur les valeurs de K et K′ n'aura que peu d'importance.

Si nous connaissons approximativement la valeur du potentiel du corps, nous pourrons porter l'électrode à ce potentiel approché au moyen d'un replenisher ou de quelque autre façon, et une seconde expérience donnera une plus grande approximation. De cette manière on peut mesurer le potentiel d'un corps dont la capacité est petite relativement à celle de l'électromètre.

Mesurer le potentiel en un point de l'air.

221. *Première méthode.* — On place au point donné le centre d'une sphère, dont le rayon est petit relativement à la distance des conducteurs électrisés. On la relie à la terre par un fil métallique fin, puis on l'isole ; on la porte à l'électromètre, et l'on détermine sa charge totale.

Alors, si V est le potentiel au point donné et a le rayon de la sphère, la charge de la sphère sera

$$Q = -Va,$$

et, si V′ est le potentiel de la sphère mesuré à l'électromètre dans une

chambre dont les murs sont reliés à la terre

$$Q = V'a,$$

d'où

$$V - V' = o,$$

c'est-à-dire que le potentiel de l'air, au point où était placé le centre de la sphère, est égal et de signe contraire au potentiel que prend la sphère, quand, après avoir été mise à la terre et isolée ensuite, elle est apportée dans la chambre.

Cette méthode a été employée par M. Dellmann, de Creuznach, pour mesurer le potentiel à une certaine hauteur au-dessus de la surface du sol.

Deuxième méthode. — Nous avons supposé que la sphère, placée au point donné et reliée d'abord à la terre, était ensuite isolée et portée dans une chambre dont les parois, faites de matières conductrices, étaient au potentiel zéro.

Supposons maintenant que l'on amène depuis l'électrode de l'électromètre jusqu'au point où l'on doit mesurer le potentiel un fil fin isolé. Commençons par décharger entièrement la sphère, ce qui peut se réaliser en la mettant à l'intérieur d'un vase fait de même métal qu'elle qui l'entoure presque complètement, et lui faisant toucher ce vase. La sphère ainsi déchargée est apportée au bout du fil et mise en contact avec lui. Puisqu'elle n'est pas électrisée, elle est au potentiel de l'air en ce point : si le fil de l'électrode est au même potentiel, le contact n'aura point d'effet sur lui; mais, s'il est à un potentiel différent, ce potentiel, après le contact avec la sphère, sera plus voisin qu'auparavant du potentiel de l'air. Par une série d'opérations de ce genre, où la sphère est alternativement déchargée et mise en contact avec l'électrode, le potentiel de l'électrode de l'électromètre s'approchera constamment de celui de l'air au point donné.

222. Pour mesurer le potentiel d'un conducteur sans le toucher, on peut mesurer le potentiel de l'air en un point voisin du conducteur, et calculer celui du conducteur d'après le résultat. S'il y a une cavité que le conducteur renferme presque entièrement, le potentiel de l'air dans cette cavité est très voisin de celui du conducteur.

C'est de cette façon que Sir W. Thomson a reconnu que, si deux conducteurs creux, l'un de cuivre et l'autre de zinc, sont mis en contact métallique, le potentiel de l'air dans l'espace que renferme le zinc est positif par rapport à celui de l'air dans l'espace que renferme le cuivre.

Troisième méthode. — Si, par un procédé quelconque, on peut faire qu'une série de petits corps se détachent successivement du bout de l'électrode, le potentiel de l'électrode tendra vers celui de l'air qui l'environne. C'est ce que l'on peut réaliser en faisant écouler goutte à goutte, d'un entonnoir ou d'un tuyau relié à l'électrode, de la grenaille de plomb, des limailles métalliques, du sable ou de l'eau. Le point dont on mesure le potentiel est celui où la veine liquide cesse d'être continue et se brise en gouttes séparées.

Une autre méthode commode consiste à attacher à l'électrode une allumette brûlant lentement. Le potentiel devient très vite égal à celui de l'air à l'extrémité de la flamme de l'allumette. Il suffit même d'une pointe métallique aiguë pour produire une décharge par le moyen des molécules d'air, tant que la différence des potentiels est considérable; mais, si l'on veut réduire cette différence à zéro, il faut recourir à l'une des méthodes précédentes.

Si l'on veut seulement connaître le signe de la différence des potentiels en deux points, et non sa valeur numérique, on peut produire, en un des points, un écoulement de gouttes ou de limailles à travers un entonnoir communiquant à l'autre point : on recueille ces gouttes ou limailles dans un vase isolé. Chaque goutte, en tombant, se charge d'une certaine quantité d'électricité, dont elle se décharge complètement dans le vase. Les charges s'accumulent donc constamment dans le vase, et, après qu'un nombre suffisant de gouttes sont tombées, on peut examiner la charge du vase par les méthodes mêmes les plus grossières. Le signe de la charge est positif, si le potentiel de l'entonnoir est positif par rapport à celui de l'air qui l'entoure.

MESURE DE LA DENSITÉ SUPERFICIELLE OU DE LA DISTRIBUTION.

Théorie du plan d'épreuve.

223. Pour vérifier les résultats de la théorie mathématique de la distribution à la surface des conducteurs électrisés, il est nécessaire de pouvoir mesurer la densité superficielle en différents points d'un conducteur. A cet effet, Coulomb employait un petit disque de papier doré fixé à une tige isolante de gomme laque. Il appliquait ce disque en différents points du conducteur, en le faisant coïncider aussi exactement que possible avec la surface de ce conducteur. Il l'enlevait ensuite par sa tige isolante, et mesurait sa charge dans son électromètre.

La surface du disque appliqué sur le conducteur coïncidant presque

exactement avec la surface de ce conducteur, il concluait que la densité superficielle sur la surface extérieure du disque était à peu près égale à la densité sur la surface du conducteur en cet endroit, et que la charge enlevée sur le disque était à peu près égale à la charge qui se trouvait sur une aire prise à la surface du conducteur, et égale à l'aire d'une des faces du disque. Le disque, employé de cette façon, est appelé *plan d'épreuve de Coulomb*.

Comme on a élevé des objections contre l'usage que faisait Coulomb de son plan d'épreuve, je ferai quelques remarques sur la théorie de cette expérience.

L'expérience consiste à mettre un petit corps conducteur en contact avec la surface du conducteur, au point où l'on veut mesurer la densité, et à écarter ensuite ce corps pour déterminer sa charge.

Il nous faut montrer d'abord que la charge du petit corps mis en contact avec le conducteur est proportionnelle à la densité superficielle qui existait au point de contact, avant que l'on y plaçât le petit corps.

Nous supposerons que toutes les dimensions du petit corps, et en particulier celle qui est comptée sur la direction de la normale au point de contact, sont très petites relativement aux rayons de courbure du conducteur au point de contact. Dès lors, nous pourrons admettre que la force résultante à laquelle donnait lieu la charge du conducteur supposée immobile ne subit que des variations négligeables dans l'espace occupé par le petit conducteur, et nous pourrons traiter la surface du conducteur dans le voisinage du petit corps comme une surface plane.

Or la charge que prend le petit corps, par son contact avec une surface plane, est proportionnelle à la force résultante normale à cette surface, c'est-à-dire à la densité superficielle. Nous déterminerons la grandeur de cette charge pour des formes particulières de ce corps.

Il faut maintenant montrer que, quand on écartera le petit corps, il ne passera point d'étincelle entre lui et le conducteur, et que, par conséquent, il emportera sa charge avec lui. C'est évident, car, lorsque les corps sont en contact, leurs potentiels sont les mêmes, et par suite la densité est extrêmement faible sur les parties les plus voisines du point de contact. Lorsque le petit corps est écarté à une très faible distance du conducteur que nous supposerons électrisé positivement, la charge, au point le plus voisin du petit corps, n'est plus nulle, mais bien positive; mais comme la charge du petit corps est aussi positive, l'électrisation positive est moindre qu'en aucun autre point voisin sur la surface. Or le passage d'une étincelle dépend, en gé-

néral, de la grandeur de la force résultante, et celle-ci de la densité superficielle. Donc, puisque nous supposons que le conducteur n'est pas électrisé à un potentiel assez élevé pour décharger de l'électricité par tous les points de sa surface, il ne passera point d'étincelle entre le petit corps et une partie de la surface où nous avons montré qu'il y a une plus faible densité superficielle.

224. Nous allons maintenant considérer différentes formes du petit corps.

Supposons que ce soit une petite hémisphère, disposée de façon à toucher le conducteur par le centre de sa face plane.

Supposons que le conducteur soit une grande sphère et modifions la forme de l'hémisphère, de façon que sa surface soit un peu plus d'une demi-sphère, et rencontre la surface de la sphère à angle droit. Nous nous trouvons alors dans un cas pour lequel nous avons déjà obtenu la solution exacte (*voir* **167**).

Si A et B sont les centres de deux sphères se coupant à angle droit, DD′ le diamètre du cercle d'intersection et C le centre de ce cercle; si V est le potentiel d'un conducteur dont la surface extérieure coïncide avec celle des deux sphères, la quantité d'électricité qui se trouve sur la surface libre de la sphère A est

$$\tfrac{1}{2}V(AD + BD + AC - CD - BC),$$

et celle qui se trouve sur la surface libre de la sphère B est

$$\tfrac{1}{2}V(AD + BD + BC - AD - AC),$$

et la charge totale est la somme des deux, soit

$$V(AD + BD - CD).$$

Si α et β sont les rayons des deux sphères, et si α est grand relativement à β, la charge de B est à celle de A dans le rapport de

$$\frac{3}{4}\frac{\beta^3}{\alpha^3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \dots\right) \text{ à } 1.$$

Or, soit σ la densité superficielle uniforme de A, lorsque B est enlevé, la charge de A est

$$4\pi\alpha^2\sigma,$$

et, par suite, la charge de B est

$$3\pi\beta^2\sigma\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \dots\right),$$

ou, si β est très petit en comparaison de α, la charge de l'hémisphère B est égale à trois fois la charge due à la densité σ régnant sur une aire égale à la base circulaire de l'hémisphère.

Il résulte du n° 175 que si une petite sphère est amenée au contact d'un corps électrisé, puis éloignée de lui, la densité superficielle moyenne sur cette sphère est à la densité superficielle du corps au point de contact comme π^2 est à 6, ou comme 1,645 est à 1.

225. La forme la plus convenable pour un plan d'épreuve est celle d'un disque circulaire. Nous allons donc montrer comment on peut mesurer la charge d'un disque circulaire placé sur une surface électrisée.

A cet effet, nous allons combiner une valeur de la fonction potentielle, telle qu'une des surfaces équipotentielles ressemble à une protubérance circulaire aplatie, et présente la forme générale d'un disque posé sur un plan.

Soit σ la densité superficielle sur un plan que nous supposerons être celui des xy.

Le potentiel dû à cette distribution sera

$$V = -4\pi\sigma z.$$

Soient deux disques de rayon a, ayant des charges électriques invariablement placées, de densité superficielle $-\sigma'$ et $+\sigma'$. Plaçons le premier de ces disques sur le plan des xy, son centre à l'origine; et le second disque parallèlement au premier à une très petite distance c.

On peut démontrer, ainsi que nous le verrons dans la théorie du magnétisme, que le potentiel de deux disques sur un point quelconque est $\omega\sigma' c$, ω étant l'angle solide sous-tendu au point considéré par le contour de l'un ou l'autre des disques. Donc le potentiel de l'ensemble du système sera

$$V = -4\pi\sigma z + \sigma' c\omega.$$

La forme des surfaces équipotentielles et des lignes d'induction est donnée sur le côté gauche de la *Pl. XX*, à la fin du Volume II.

Traçons la forme de la surface pour laquelle V = 0 : elle est indiquée par la ligne pointillée.

Désignant par r la distance d'un point quelconque à l'axe des z, lorsque r est beaucoup plus petit que a, et que z est petit, nous trouvons

$$\omega = 2\pi - 2\pi\frac{z}{a} + \dots.$$

Donc, pour des valeurs de r considérablement inférieures à a, l'équation de la surface équipotentielle zéro est

$$0 = -4\pi\sigma z + 2\pi\sigma' c - 2\pi\sigma' \frac{cz}{a} + \dots$$

ou bien

$$z_0 = \frac{\sigma' c}{2\sigma + \sigma' \frac{c}{a}},$$

Donc, aux environs de l'axe, la surface équipotentielle est presque plate.

En dehors du disque, où r est plus grand que a, ω est nul quand z est nul, de sorte que le plan des xy fait partie de la surface équipotentielle.

Pour trouver où se rejoignent ces deux parties de la surface, cherchons en quel point du plan $\frac{dV}{dz} = 0$.

Si r est à très peu près égal à a, l'angle solide ω devient à très peu près une lunule découpée sur la sphère de rayon 1, dont l'angle est

$$\text{arc tang} \frac{z}{r-a},$$

en sorte que

$$\omega = 2 \text{ arc tang} \frac{z}{r-a}$$

et que

$$\frac{dV}{dz} = -4\pi\sigma + \frac{2\sigma' c}{r-a}.$$

Donc, lorsque $\frac{dV}{dz} = 0$,

$$r_0 = a + \frac{\sigma' c}{2\pi\sigma} = a + \frac{z_0}{\pi},$$

approximativement.

La surface équipotentielle $V = 0$ se compose d'une figure en forme de disque, de rayon r_0 et d'épaisseur à peu près uniforme z_0, et de la partie du plan infini des xy qui est en dehors de cette figure.

L'intégrale de surface, prise sur tout le disque, donne sa charge d'électricité. On trouve (comme dans la Théorie d'un courant circulaire, IVe Partie, n° 704) que c'est

$$Q = 4\pi a \sigma' c \left(\log \frac{8a}{r_0 - a} - 2 \right) + \pi\sigma r_0^2.$$

Sur une surface égale du plan, la charge est $\pi\sigma r_0^2$: donc la charge

du disque surpasse celle d'une aire égale prise dans le plan, dans le rapport de

$$1+8\frac{z}{r}\log\frac{8\pi r}{z} \quad \text{à} \quad 1,$$

où z est l'épaisseur, et r le rayon du disque, et où l'on suppose z petit relativement à r.

Des accumulateurs électriques et de la mesure des capacités.

226. Un accumulateur ou condensateur est un appareil formé de deux surfaces conductrices séparées par un milieu diélectrique isolant.

Une bouteille de Leyde est un accumulateur dont l'armature intérieure, faite de feuilles d'étain, est séparée de l'armature extérieure par le verre de la bouteille. La première bouteille de Leyde était un vase de verre renfermant de l'eau qui était séparée par le verre de la main qui tenait le vase.

La surface extérieure d'un conducteur isolé quelconque peut être considérée comme une des surfaces d'un accumulateur, dont l'autre surface est formée par la terre ou les murs de la chambre où il est placé, et où le milieu diélectrique est l'air ambiant.

La capacité d'un accumulateur a pour mesure la quantité d'électricité dont il faut charger la surface intérieure pour établir entre les deux surfaces une différence de potentiels égale à l'unité.

Puisque tout potentiel électrique est la somme d'un certain nombre de parties obtenues en divisant chaque élément électrique par sa distance à un point, le rapport d'une quantité d'électricité à un potentiel doit avoir les dimensions d'une ligne; donc la capacité électrostatique est une quantité linéaire, que nous pouvons évaluer en pieds ou en mètres sans ambiguïté.

Dans les recherches électriques, on emploie les accumulateurs à deux usages principaux : à recevoir et à garder de grandes quantités d'électricité dans un espace aussi petit que possible; à mesurer des quantités définies d'électricité par le potentiel auquel elles portent l'accumulateur.

Pour garder des charges électriques, on n'a rien imaginé de plus parfait que la bouteille de Leyde. La plus grande partie des pertes est due à ce que l'électricité s'écoule d'une armature à l'autre par l'humidité de la surface de verre non revêtue. Cet inconvénient peut être évité très complètement en desséchant artificiellement l'air à l'intérieur de la bouteille, et en vernissant le verre, là où il est exposé à l'atmosphère.

Dans les électroscopes de sir W. Thomson, la proportion de perte d'un jour à l'autre est très faible, et, de cette perte, je crois que rien ne doit être attribué à une conduction directe par l'air ou par le verre lorsque le verre est bon; mais qu'elle se produit en entier par conduction superficielle sur les différentes tiges isolantes et sur les surfaces de verre de l'appareil.

En fait, le même électricien a donné une charge à de l'acide sulfurique renfermé dans un ballon à long col; il a ensuite scellé hermétiquement le col en le fondant à la lampe, en sorte que cette charge se trouvait complètement renfermée dans du verre. Au bout de plusieurs années, on a constaté que la charge était encore conservée.

Mais c'est seulement à froid que le verre est isolant à ce point : la charge s'échappe aussitôt que le verre est porté à une température inférieure à 100°.

Lorsqu'on désire obtenir une grande capacité sous un petit volume, il convient d'employer des accumulateurs dont le diélectrique est du caoutchouc en feuilles, du mica, ou du papier imprégné de paraffine.

227. Pour les accumulateurs de la seconde espèce, destinés à mesurer des quantités d'électricité, les diélectriques solides ne doivent être employés qu'avec de grandes précautions, parce qu'ils possèdent la propriété appelée *absorption électrique*.

Le seul diélectrique sûr pour de pareils accumulateurs est l'air : encore a-t-il l'inconvénient que toute humidité, toute poussière qui pénètre dans l'espace étroit compris entre les surfaces opposées, et où ne devrait se trouver que de l'air, non seulement altère l'épaisseur de la couche d'air, mais encore peut établir une communication entre les surfaces opposées, auquel cas l'accumulateur ne tient pas sa charge.

Pour déterminer, en mesure absolue, c'est-à-dire en mètres ou en pieds, la capacité d'un accumulateur, nous devons en connaître d'abord la forme et les dimensions, et résoudre ensuite le problème de la distribution sur ses surfaces opposées; ou bien nous devons comparer sa capacité à celle d'un accumulateur pour lequel le problème a été résolu.

Comme le problème est très difficile, le mieux est de commencer par construire un accumulateur pour la forme duquel nous connaissions la solution. Ainsi, l'on sait que la capacité d'une sphère isolée dans un espace illimité a pour mesure le rayon de cette sphère.

Une sphère, suspendue dans une chambre, a été employée par MM. Kohlrausch et Weber comme étalon absolu, auquel ils comparaient la capacité des autres accumulateurs.

Mais la capacité d'une sphère de dimensions modérées est si faible comparativement à la capacité des accumulateurs habituellement employés, qu'une sphère n'est pas un étalon de mesure bien commode.

La capacité peut être considérablement accrue si l'on entoure la sphère d'une surface sphérique creuse, concentrique, et de rayon un peu plus grand. La capacité de la surface intérieure est alors une quatrième proportionnelle à l'épaisseur de la couche d'air et aux rayons des deux sphères.

Sir W. Thomson a employé cette disposition pour avoir un étalon de capacité ; mais il y a des difficultés considérables à travailler des surfaces exactement sphériques, à les rendre tout à fait concentriques, et à mesurer leur distance et leurs rayons avec une précision suffisante.

Nous sommes ainsi amenés à préférer comme étalon absolu de capacité une disposition dans laquelle les faces opposées sont des plans parallèles.

Il est aisé de vérifier si les surfaces sont exactement planes ; leur distance peut se mesurer avec une vis micrométrique et peut être rendue susceptible d'une variation continue, ce qui est une propriété très importante dans un instrument de mesure.

Il ne reste qu'une difficulté, due à ce fait que les plans sont nécessairement limités, et que la distribution de l'électricité dans le voisinage des limites des plans n'a pas été calculée rigoureusement. Il est vrai que si nous prenons pour surfaces opposées deux disques circulaires égaux, dont le rayon est grand relativement à leur distance, nous pouvons traiter les limites de ces disques comme si c'étaient des lignes droites et calculer la distribution par la méthode de Helmholtz, décrite au n° 202. Mais il y a lieu de remarquer que, dans le cas actuel, une partie de l'électricité est distribuée sur le revers de chacun des disques, et que l'on a supposé dans le calcul qu'il n'y a point de conducteurs dans le voisinage, ce qui n'est et ne peut être le cas avec un petit instrument.

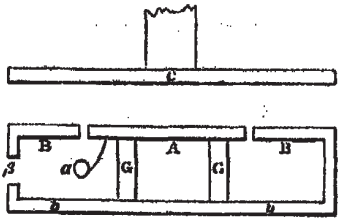
228. Nous préférons donc la disposition suivante, due à sir W. Thomson, et que l'on peut appeler disposition à anneau de garde : grâce à elle, la quantité d'électricité qui est sur un disque isolé peut se déterminer exactement en fonction de son potentiel.

Le condensateur à anneau de garde.

B*b* est un vase cylindrique fait d'une substance conductrice : la

surface extérieure de sa face supérieure est exactement plane. Cette face supérieure est formée de deux parties, un disque A et un large anneau BB entourant le disque, et séparé de lui par un très petit intervalle, juste suffisant pour ne point laisser passer d'étincelles. La

Fig. 21.



surface supérieure du disque est exactement dans le même plan que celle de l'anneau de garde. Le disque est porté par des colonnes en matière isolante GG ; C est un disque de métal dont la surface inférieure est exactement plane et parallèle à BB. Le disque C est considérablement plus grand que A. Sa distance à A est réglée et mesurée au moyen d'une vis micrométrique, qui n'est point représentée sur la figure.

Voici comment on emploie cet accumulateur comme instrument de mesure :

Supposons que C soit au potentiel zéro, et A et Bb au potentiel V. Il n'y aura pas de charge sur le revers du disque, puisque le vase est presque entièrement clos, et tout entier au même potentiel. Il y aura une charge très faible sur les bords du disque, puisqu'il est au même potentiel que BB. Sur la face du disque, la distribution est sensiblement uniforme ; la charge totale du disque sera donc presque exactement représentée par son aire multipliée par la densité superficielle d'un plan, telle qu'elle a été calculée au n° 124.

En fait, l'étude faite au n° 201 nous montre que la charge du disque est

$$V\left(\frac{R^2+R'^2}{8A}-\frac{R'^2-R^2}{8A}\,\frac{\alpha}{A+\alpha}\right),$$

où R est le rayon du disque, R′ celui de l'ouverture de l'anneau de garde, A la distance de A à C, et α une quantité qui ne peut être supérieure à

$$(R'-R)\frac{\log_e 2}{\pi}.$$

Si l'intervalle entre l'anneau de garde et le disque est petit comparativement à la distance de A à C, le second terme est très petit, et la charge du disque est, à très peu près,

$$V\frac{R^2 + R'^2}{8A}.$$

Mettons maintenant à la terre le vase B *b*. La charge du disque A ne conservera plus sa distribution uniforme, mais sera la même comme quantité, et si maintenant nous déchargeons A, nous obtiendrons une quantité d'électricité, dont nous connaissons la valeur en fonction de la différence de potentiels initiale V, et des quantités mesurables R, R′ et A.

Comparaison de la capacité des condensateurs.

229. La forme de condensateur qui se prête le mieux à la détermination de la capacité en mesure absolue, d'après la forme et les dimensions des parties de l'instrument, n'est pas, en général, celle qui convient le mieux pour les expériences d'électricité. Pour les appareils destinés à faire couramment des mesures de capacité, il est désirable de n'avoir que deux surfaces conductrices, dont l'une entoure l'autre aussi complètement que possible. Au contraire, l'accumulateur à anneau de garde a trois conducteurs indépendants qui doivent être chargés et déchargés dans un certain ordre. Il est donc désirable de pouvoir comparer les capacités de deux accumulateurs par une méthode électrique, de façon à jauger en quelque sorte des accumulateurs qui serviront ensuite d'étalons secondaires.

Je vais d'abord montrer comment on peut vérifier que les capacités de deux accumulateurs à anneau de garde sont égales.

Soient, dans l'un de ces accumulateurs, A le disque, B l'anneau de garde et le reste du vase conducteur qui lui est fixé, C le grand plateau ; soient A′, B′, C′ les parties correspondantes de l'autre accumulateur.

Si l'un de ces accumulateurs est de construction plus simple, et n'a que deux conducteurs, on n'a qu'à supprimer B ou B′, et à supposer que A est l'armature intérieure, C l'armature extérieure, que l'on suppose entourer complètement A.

Etablissons les communications suivantes :

Relions d'une manière permanente B à C′ et B′ à C, c'est-à-dire chacun des anneaux de garde au grand plateau de l'autre condensateur.

(1) Relions A à B et C′ et à J l'électrode d'une bouteille de Leyde; A′ à B′ et C et à la terre;

(2) Isolons A, B et C′ de J;

(3) Isolons A de B et C′, et A′ de B′ et C;

(4) Relions B et C′ avec B′ et C et avec la terre;

(5) Relions A et A′;

(6) Relions A et A′ à un électroscope.

Nous pouvons représenter ces communications comme il suit :

(1) $o = C = B' = A' \mid A = B = C' = J,$

(2) $o = C = B' = A' \mid A = B = C' \mid J,$

(3) $o = C = B' \mid A' \mid A \mid B = C',$

(4) $o = C = B' \mid A' \mid A \mid B = C' = o,$

(5) $o = C = B' \mid A' = A \mid B = C' = o,$

(6) $o = C = B' \mid A' = E = A \mid B = C' = o.$

le signe = signifiant la communication électrique, et le trait vertical | l'isolement.

Dans (1) les deux accumulateurs ont des charges opposées : A est positif, A′ négatif, et les charges de A et A′ sont distribuées uniformément sur la surface supérieure opposée au grand plateau de chacun des accumulateurs.

Dans (2) la bouteille de Leyde est enlevée, et dans (3) les charges de A et A′ sont isolées.

Dans (4), les anneaux de garde sont reliés aux grands plateaux : et, par suite, les charges de A et A′ se répandent sur toute la surface de ces disques, sans que leur grandeur soit modifiée.

Dans (5) A est relié à A′. Si les charges sont égales et de signe contraire, l'électrisation est entièrement détruite. C'est ce que l'on vérifie en (6) au moyen de l'électroscope E.

L'électroscope E indiquera une charge positive ou une charge négative, selon que A ou A′ a la plus grande capacité.

Au moyen d'une clef convenablement construite, on peut effectuer toutes ces opérations dans l'ordre voulu, dans l'espace d'une petite fraction de seconde ; et l'on peut faire varier les capacités jusqu'à ce que l'électroscope n'accuse plus la moindre trace de charge. De cette façon, on peut amener la capacité d'un accumulateur à être égale à celle d'un autre accumulateur, ou à la somme des capacités de plusieurs autres, et l'on peut former un système d'accumulateurs où la

capacité de chacun est exprimée en mesure absolue, c'est-à-dire en pieds ou en mètres, et où l'on a employé en même temps le mode de construction le plus convenable pour les expériences d'électricité.

Cette méthode de comparaison trouvera sans doute un emploi avantageux pour la détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques des différents diélectriques mis sous forme de disques ou de plateaux. Si, entre A et C, on interpose un disque de diélectrique considérablement plus grand que A, la capacité de l'accumulateur est modifiée, et devient égale à celle que présenterait ce même accumulateur pour un moindre écartement de A et C. Si l'accumulateur, pourvu de son plateau diélectrique, et ayant ses armatures A et C écartées d'une distance x, a la même capacité qu'il présenterait lorsque ses armatures sont à la distance x' sans interposition de diélectrique, et si a est l'épaisseur du plateau, k son pouvoir inducteur spécifique rapporté à celui de l'air pris pour unité,

$$k = \frac{a}{a + x' - x}.$$

La combinaison de trois cylindres, décrite au n° 127, a été employée par sir W. Thomson pour former un condensateur dont la capacité peut être augmentée ou diminuée de quantités mesurables.

Les expériences de MM. Gibson et Barclay, faites au moyen de cet appareil, sont décrites dans les *Proceedings* de la Société Royale, du 2 février 1871, et dans les *Phil. Trans.* de 1871, p. 573. Ils ont trouvé pour pouvoir inducteur spécifique de la paraffine 1,975, celui de l'air étant pris pour unité.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉLECTROCINÉTIQUE.

CHAPITRE I.

LE COURANT ÉLECTRIQUE.

230. Nous avons vu, au n° 45, que le potentiel est nécessairement le même en tous les points d'un conducteur en équilibre électrique.

Si deux conducteurs A et B sont chargés d'électricité, le potentiel de A étant supérieur à celui de B, et si ces deux corps sont mis en communication par un fil métallique C qui les touche tous deux, une partie de la charge de A se transporte sur B, et, au bout d'un temps très court, les potentiels de A et de B deviennent égaux.

231. Pendant que se produit ce phénomène, on observe dans le fil C certains phénomènes que l'on appelle *phénomènes du flux ou du courant électrique.*

Le premier de ces phénomènes est un transport d'électricité positive de A vers B, d'électricité négative de B vers A. Ce transport peut s'effectuer plus lentement si l'on met un petit corps isolé en contact alternativement avec A et avec B. Dans cette opération, que l'on peut appeler la *convection électrique,* de petites fractions de la charge de chaque corps sont transportées successivement de l'un sur l'autre. Dans les deux cas, une certaine quantité d'électricité, ou de charge électrique, passe d'un endroit à un autre en suivant un certain chemin dans l'espace qui sépare les corps.

Quelle que soit donc notre opinion sur la nature de l'électricité, il faut admettre que l'opération que nous venons de décrire constitue un courant d'électricité. Ce courant peut être considéré comme un courant d'électricité positive de A vers B, ou d'électricité négative de B vers A, ou comme une combinaison de ces deux courants.

Suivant la théorie de Fechner et de Weber, c'est une combinaison d'un courant d'électricité positive, et d'un courant exactement égal d'électricité négative, cheminant en sens inverse dans le même corps. Il est nécessaire de se souvenir de cette hypothèse éminemment artificielle sur la constitution du courant, pour comprendre l'énoncé de quelques-uns des plus importants résultats expérimentaux de Weber.

Si, comme au n° 30, nous supposons que P unités d'électricité positive se transportent de A vers B, et que N unités d'électricité négative se transportent de B vers A, dans l'unité de temps, la théorie de Weber veut que P = N, et P ou N peut être pris comme mesure numérique du courant.

Au contraire, nous ne faisons ici aucune hypothèse sur une relation entre P et N ; mais, ne tenant compte que de l'effet produit par le courant, c'est-à-dire du transport de P + N unités d'électricité positive de A sur B, nous considérerons P + N comme la véritable mesure du courant. Le courant que Weber appellerait 1, nous l'appellerons donc 2.

Des courants permanents.

232. Dans le cas du courant qui passe entre deux conducteurs isolés portés à des potentiels différents, l'opération est vite arrivée à son terme, qui est l'égalisation des potentiels des deux corps : le courant est donc essentiellement un courant instantané.

Mais il y a des moyens par lesquels on peut maintenir entre des conducteurs des différences de potentiel constantes; alors il passe entre ces conducteurs un courant continu d'intensité constante : c'est ce qu'on appelle un *courant permanent*.

La pile voltaïque.

La méthode la plus commode pour produire un courant permanent est d'employer la pile voltaïque.

Pour préciser les idées, nous allons décrire la pile constante de Daniell.

Une solution de sulfate de zinc est placée dans un vase de terre poreux, qui est lui-même dans un vase renfermant une solution saturée de sulfate de cuivre. Un morceau de zinc plonge dans le sulfate de zinc ; un morceau de cuivre dans le sulfate de cuivre. Des fils métalliques sont soudés au zinc et au cuivre, au-dessus du niveau du

liquide. Cette combinaison est appelée un *couple* ou un *élément de pile Daniell* (*voir* n° 272).

233. Si l'on isole le couple en le posant sur un pied non conducteur, et si l'on met en contact avec un conducteur isolé A le fil relié au cuivre, et le fil relié au zinc en contact avec un autre conducteur isolé B, fait du même métal que A, on peut montrer au moyen d'un électromètre sensible que le potentiel de A surpasse celui de B d'une certaine quantité. Cette différence de potentiels est appelée *force électromotrice de l'élément Daniell.*

Si maintenant on détache A et B de la pile, et qu'on les mette en communication par un fil métallique, un courant passager traverse le fil, de A vers B, et les potentiels de A et B deviennent égaux. On peut de nouveau charger A et B au moyen de la pile et répéter ces opérations tant que la pile veut bien fonctionner. Mais, si l'on relie A et B par le fil C, et qu'en même temps on les attache à la pile, comme précédemment, la pile entretient un courant constant à travers C, en même temps qu'une différence de potentiels constante entre A et B. Cette différence n'est pas, ainsi que nous le verrons, égale à la force électromotrice totale de l'élément, une partie de cette force étant dépensée pour entretenir le courant à travers l'élément lui-même.

Un certain nombre d'éléments rangés en série, de façon que le zinc du premier communique métalliquement avec le cuivre du second, et ainsi de suite, forment ce qu'on appelle une *pile voltaïque.* La force électromotrice d'une telle pile est égale à la somme des forces électromotrices des éléments qui la composent. Si la pile est isolée, elle peut, dans son ensemble, recevoir une charge quelconque d'électricité; mais le potentiel du pôle cuivre surpassera toujours celui du pôle zinc d'une quantité égale à la force électromotrice de la pile, quelles que soient d'ailleurs les valeurs absolues de ces deux potentiels. Les éléments de la pile peuvent être de formes différentes, contenir des substances chimiques et des métaux différents, pourvu que l'action chimique ne continue pas lorsqu'il ne passe point de courant.

234. Considérons une pile voltaïque dont les deux extrémités sont isolées l'une de l'autre. L'extrémité cuivre aura une charge positive ou vitrée, l'extrémité zinc une charge négative ou résineuse.

Relions maintenant par un fil métallique les deux bouts de la pile. Un courant électrique prendra naissance et, au bout d'un temps très

court, atteindra une valeur constante. On dit alors que c'est un courant permanent.

Propriétés du courant.

235. Le courant décrit un circuit fermé, en allant du cuivre au zinc dans les fils, et du zinc au cuivre dans les solutions.

Si l'on interrompt le circuit en coupant un des fils qui relient le cuivre d'un élément au zinc du suivant, le courant est arrêté, et l'on trouve que le potentiel du bout de fil relié au cuivre surpasse le potentiel du bout de cuivre relié au zinc d'une quantité constante, la force électromotrice totale du circuit.

Action électrolytique du courant.

236. Tant que le circuit est interrompu, il ne se produit dans les éléments aucune action chimique; mais, aussitôt que le circuit est formé, du zinc commence à se dissoudre dans chacun des éléments Daniell, et du cuivre se dépose sur les lames de cuivre.

La quantité de sulfate de zinc augmente, celle de sulfate de cuivre diminue, à moins qu'on n'en rajoute constamment de nouveau.

La quantité de zinc dissoute, la quantité de cuivre déposée sont les mêmes dans tous les éléments Daniell du circuit, quelles que soient les dimensions des électrodes de ces éléments; et, s'il y a des éléments de construction différente, l'action chimique qui s'y produit est dans un rapport constant avec l'action chimique d'un élément Daniell. Si, par exemple, un des éléments est formé de deux lames de platine plongeant dans de l'acide sulfurique étendu d'eau, de l'oxygène est mis en liberté à la surface de la plaque par laquelle le courant entre dans le liquide, c'est-à-dire la plaque qui est reliée métalliquement au cuivre de la pile Daniell; et de l'hydrogène se dégage à la surface de la plaque par où le courant sort du liquide, qui est la plaque reliée au zinc de la pile Daniell.

Le volume de l'hydrogène est exactement double de celui de l'oxygène dégagé dans le même espace de temps; et le poids de l'oxygène est exactement huit fois le poids de l'hydrogène.

Dans chacun des éléments du circuit, le poids de chaque substance dissoute, déposée ou décomposée, est égal au produit d'une certaine quantité que l'on appelle l'*équivalent électrochimique de la substance*, par l'intensité du courant et par la durée de son passage.

Pour les expériences qui établissent ce principe, voir les Séries

VII et VIII des *Experimental Researches* de Faraday; et, pour les exceptions apparentes à cette règle, voir la *Chemical Physics* de Miller, et le *Galvanismus* de Wiedemann.

237. On appelle *électrolytes* les substances qui subissent cette sorte de décomposition. L'opération elle-même s'appelle *électrolyse*. Les endroits où le courant pénètre dans l'électrolyte et en sort sont appelés les *électrodes*. De ces électrodes, celle par où entre le courant, est appelée *anode*, et celle par où il quitte l'électrolyte est appelée *cathode*. Les composants en lesquels se résout l'électrolyte sont appelés *ions;* celui d'entre eux qui paraît à l'anode porte le nom d'*anion*, et celui qui paraît à la cathode, de *cation*.

De ces termes, qui ont été, je crois, inventés par Faraday avec l'aide du Dr Whewell, les trois premiers, électrodes, électrolyse et électrolyte, ont été généralement adoptés, et l'on appelle *conduction électrolytique* ce mode de conduction du courant dans lequel se produisent cette sorte de décomposition et ce transport des éléments composants.

Si l'on met un électrolyte homogène dans un tube de section variable, et si l'on met les électrodes au bout de ce tube, on trouve que, quand le courant passe, l'anion paraît à l'anode, le cation à la cathode, les quantités de ces ions étant équivalentes entre elles, et équivalentes ensemble à une certaine quantité d'électrolytes. Dans les autres parties du tube, que la section y soit grande ou petite, constante ou variable, la composition de l'électrolyte reste invariable. Donc, la quantité de matière qui subit l'électrolyse dans chaque section du tube est la même. Si la section est petite, l'action doit donc être plus intense que si la section est grande; mais la quantité totale de chaque ion qui traverse dans un temps donné une section complète de l'électrolyte est la même pour toutes les sections.

L'intensité d'un courant peut donc se mesurer par la quantité de matière qui est électrolysée dans un temps donné. On appelle *voltamètre* un instrument qui permet de mesurer aisément la quantité de ces produits d'électrolyse.

L'intensité du courant, ainsi mesurée, est la mesure en tous les points du circuit, et la quantité totale de produits électrolytiques qui se trouvent dans un voltamètre au bout d'un temps donné est proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse une section pendant le même temps.

238. Si nous introduisons un voltamètre en un point du circuit

d'une pile voltaïque et si nous coupons le circuit en un autre point, nous pouvons supposer que l'on procède à la mesure du courant de la façon suivante. Soient A et B les extrémités du circuit rompu, A l'anode et B la cathode. Prenons une boule isolée, et faisons-lui toucher alternativement A et B : à chaque voyage, elle portera de A sur B une certaine quantité mesurable d'électricité. Cette quantité peut se mesurer à l'électromètre ou se calculer en multipliant la force électromotrice du circuit par la capacité électrostatique de la boule. De l'électricité est ainsi transportée de A vers B, sur la boule isolée, par une opération que l'on peut appeler *convection*. En même temps, l'électrolyse se produit dans le voltamètre et dans chacun des éléments de la pile, et la quantité de matière électrolysée dans chaque élément peut être comparée à la quantité d'électricité transportée par la boule. La quantité d'une substance qui est électrolysée par une unité d'électricité est appelée l'*équivalent électrochimique de la substance*.

Cette expérience serait extrêmement ennuyeuse et difficile, si on la menait de cette façon avec une boule de grandeur ordinaire et une pile comme celles dont on peut disposer; car il faudrait faire un nombre énorme de voyages pour décomposer une quantité appréciable d'électrolyte. On ne doit donc considérer cette expérience que comme un simple procédé d'exposition bien différent de la manière dont il faut en réalité conduire les déterminations d'équivalents électrochimiques. Mais on peut voir dans cette expérience comme une image du mécanisme même de l'électrolyse; car, si nous regardons la conduction électrolytique comme une sorte de convection, dans laquelle un équivalent d'anion marche vers l'anode avec une charge négative, tandis qu'un équivalent de cation marche vers la cathode avec une charge positive, nous nous ferons du mécanisme de l'électrolyse une idée qui, à ma connaissance, n'est en désaccord avec aucun fait connu; toutefois, nous ne savons rien de la nature de l'électricité et des composés chimiques, et, par suite, ce peut être encore une représentation bien imparfaite de ce qui se passe en réalité.

Action magnétique du courant.

239. Œrstedt a découvert qu'un aimant placé dans le voisinage d'un courant électrique rectiligne tend à se placer perpendiculairement au plan qui passe par l'aimant et le courant (*voir* n° 475).

Si un homme se plaçait dans la direction du courant, de façon que le courant qui va du cuivre au zinc par les fils le traversât de la tête

aux pieds, et s'il avait la figure tournée vers le milieu de l'aimant, c'est l'extrémité de l'aimant qui est dirigée vers le nord, qui tend à se diriger vers la droite de l'observateur lorsque le courant passe.

La nature et les lois de l'action électromagnétique seront discutées quand nous en viendrons à la quatrième Partie de ce Traité. Ce qui nous intéresse pour le moment, c'est ce fait que le courant électrique possède une action magnétique qui s'exerce en dehors du courant et qui peut servir à en révéler l'existence ou à mesurer l'intensité sans rompre le circuit ou sans rien introduire dans le courant lui-même.

On s'est assuré que la grandeur de l'action magnétique est exactement proportionnelle à l'intensité mesurée dans le voltamètre par les produits de l'électrolyse : l'intensité est donc entièrement indépendante de la nature du conducteur dans lequel passe le courant, que ce soit un métal ou un électrolyte.

240. On appelle *galvanomètre* un instrument qui indique l'intensité d'un courant électrique, au moyen de son effet magnétique.

En général, un galvanomètre consiste en une ou plusieurs bobines de fil recouvert de soie, à l'intérieur desquelles est suspendu un aimant dont l'axe est horizontal. Quand un courant traverse le fil, l'aimant tend à se placer l'axe perpendiculaire au plan des bobines. Si l'on suppose le plan des bobines parallèle au plan de l'équateur terrestre, et si l'on suppose le courant s'écoulant dans la bobine de l'est à l'ouest dans la direction du mouvement apparent du soleil, l'aimant tend à se placer de façon que son aimantation soit dirigée comme celle de la terre considérée comme un gros aimant, le pôle nord de la terre étant semblable à cette extrémité de l'aiguille d'une boussole, qui est dirigée vers le sud.

Le galvanomètre est le plus commode de tous les instruments pour mesurer l'intensité des courants électriques. Pour étudier les lois de ces courants, nous admettrons qu'il est possible de construire un pareil instrument, réservant pour la quatrième Partie la discussion des principes de cet appareil. Ainsi donc, quand nous dirons qu'un courant a une certaine intensité, nous supposerons la mesure faite au galvanomètre.

CHAPITRE II.

CONDUCTION ET RÉSISTANCE.

241. Si au moyen d'un électromètre on détermine le potentiel électrique en différents points d'un circuit dans lequel on entretient un courant électrique constant, on trouve que, dans une partie du circuit formée d'un seul métal partout à la même température, le potentiel d'un point quelconque surpasse le potentiel de tout autre point placé plus loin que lui dans le sens du courant, d'une quantité qui dépend de l'intensité du courant et de la nature et des dimensions de la partie du circuit qui est comprise entre ces deux points. On appelle *force électromotrice* agissant dans cette portion de circuit la différence des potentiels à ses extrémités.

Si la portion de circuit que l'on considère n'est pas homogène, mais au contraire renferme des passages d'une substance à une autre, d'un métal à un électrolyte, d'une partie chaude à une partie froide, il peut y avoir, en outre de la force électromotrice extérieure, des forces électromotrices intérieures, qu'il faut faire entrer en compte.

Les relations entre la force électromotrice, l'intensité et la résistance ont été étudiées pour la première fois par le Dr G.-S. Ohm, dans un Ouvrage publié en 1827, intitulé : *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet,* qui a été traduit dans les Mémoires scientifiques de Taylor. Le résultat de cette étude, dans le cas de conducteurs homogènes, est généralement connu sous le nom de *loi de Ohm.*

Loi de Ohm.

La force électromotrice qui agit entre les extrémités d'une portion quelconque de circuit est égale au produit de l'intensité du courant par la résistance de cette partie du circuit.

Ici s'introduit un terme nouveau, la résistance d'un conducteur, qui est définie le rapport de la force électromotrice à l'intensité du courant qu'elle produit. L'introduction de ce terme n'aurait aucun

avantage scientifique, si Ohm n'avait montré, ainsi qu'il l'a fait par l'expérience, que ce terme correspond à une quantité physique réelle, c'est-à-dire ayant une valeur définie ne changeant que si l'on change la nature du conducteur.

En premier lieu, la résistance d'un conducteur ne dépend pas de l'intensité du courant qui le traverse.

En second lieu, la résistance ne dépend pas du potentiel électrique auquel est porté le conducteur, ni de la densité de l'électricité distribuée à sa surface.

Elle ne dépend que de la nature de la substance dont est formé le conducteur, de l'état d'agrégation de ses parties et de sa température.

La résistance d'un conducteur peut se mesurer à une approximation de $\frac{1}{100}$, ou même de $\frac{1}{1000}$ de sa valeur, et l'on a étudié tant de conducteurs que, maintenant, nous pouvons considérer comme très certaine la vérité de la loi de Ohm. Nous indiquerons au Chapitre VI ses applications et ses conséquences.

Production de la chaleur par le courant.

242. Nous avons vu que, quand une force électromotrice détermine le passage d'un courant dans un conducteur, de l'électricité est transportée des points où le potentiel est plus élevé à ceux où il est moins élevé. Si ce transport avait été fait par convection, c'est-à-dire en transportant d'un point à l'autre des charges successivement données à une boule, du travail aurait été effectué par les forces électriques agissant sur la boule, et l'on aurait pu évaluer ce travail. On peut l'apprécier en partie dans ces circuits de piles sèches, où les électrodes sont formées de timbres, et où la boule véhicule oscille comme un pendule entre les deux timbres qu'elle frappe tour à tour : la force électrique sert à entretenir les oscillations du pendule et à propager à distance le son des timbres. Dans le cas d'un fil conducteur, nous avons de même transport d'électricité d'un point où le potentiel est élevé à un autre où il est bas, et cela sans qu'il s'accomplisse de travail extérieur. Le principe de la conservation de l'énergie nous conduit alors à rechercher dans le conducteur quelque travail intérieur. Dans un électrolyte, ce travail intérieur consiste en partie dans la séparation des éléments composants. Dans les autres conducteurs, il y a conversion totale en chaleur.

Dans ce cas, l'énergie convertie en chaleur est égale au produit de la force électromotrice par la quantité d'électricité qui passe dans le

circuit. Mais la force électromotrice est égale au produit de l'intensité par la résistance; la quantité d'électricité, au produit de l'intensité par le temps. Donc le produit de la quantité de chaleur par l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur est égal au produit du carré de l'intensité par la résistance et par le temps.

La chaleur engendrée par les courants électriques pendant qu'ils surmontent la résistance des conducteurs a été mesurée par le Dr Joule, qui, le premier, a établi que la chaleur produite dans un temps donné est proportionnelle au carré de l'intensité : ensuite, en faisant avec le plus grand soin la mesure absolue de toutes les quantités qui interviennent, il a vérifié la loi

$$JH = C^2Rt,$$

où J est l'équivalent mécanique de la chaleur, déterminé par Joule; H le nombre d'unités de chaleur; C l'intensité du courant; R la résistance du conducteur; t le temps pendant lequel passe le courant. L'explication complète de ces relations entre la force électromotrice, le travail et la chaleur, a été donnée pour la première fois par sir W. Thomson, dans un Mémoire sur l'application du principe de l'effet mécanique à la mesure de la force électromotrice (1).

243. L'analogie entre la théorie de la conduction de l'électricité et la théorie de la conduction de la chaleur est, à première vue, presque complète. Si nous prenons deux systèmes géométriquement semblables, et tels que la conductibilité calorifique d'une partie du premier soit proportionnelle à la conductibilité électrique de la partie correspondante du second, et si l'on fait la température de chaque partie du premier proportionnelle au potentiel électrique de la même partie du second, le flux de chaleur à travers une aire quelconque prise dans le premier sera proportionnel au flux d'électricité à travers l'aire correspondante dans le second.

Ainsi, dans la comparaison que nous faisons, et où le flux d'électricité correspond au flux de chaleur, et le potentiel électrique à la température, l'électricité tend à passer des points où le potentiel est haut à ceux où il est bas, comme la chaleur tend à passer des points où la température est haute à ceux où elle est basse.

244. La théorie du potentiel et celle de la température peuvent

(1) *Phil. Mag.*, déc. 1851.

donc servir à s'éclairer mutuellement; mais il y a une différence remarquable entre les phénomènes de l'électricité et ceux de la chaleur.

Suspendons par un fil de soie un corps conducteur dans un vase conducteur clos et chargeons ce vase d'électricité. Le potentiel du vase et de tout ce qu'il renferme va s'élever immédiatement; mais, si longtemps, si puissamment que le vase soit électrisé, et que le corps suspendu soit ou non mis en contact avec lui, aucun signe d'électrisation ne paraît à l'intérieur du vase, et le corps ne manifeste aucun effet électrique lorsqu'il a été retiré du vase.

Au contraire, si le vase est porté à une haute température, le corps qu'il renferme n'est élevé à la même température qu'au bout d'un temps considérable; et si alors on le retire, on trouve qu'il est chaud, et qu'il reste chaud jusqu'à ce qu'il ait perdu sa chaleur par radiation, au bout d'un certain temps.

La différence entre les phénomènes consiste donc dans ce fait : que les corps sont susceptibles d'absorber la chaleur et de l'émettre, tandis qu'ils n'ont point la propriété correspondante pour l'électricité. On ne peut échauffer un corps sans lui fournir une certaine quantité de chaleur dépendant de sa masse et de sa chaleur spécifique; le potentiel électrique, au contraire, peut être élevé à un degré quelconque, de la façon que nous avons déjà décrite, sans communiquer au corps aucune charge d'électricité.

245. Supposons encore un corps préalablement chauffé et placé à l'intérieur d'un vase clos. L'extérieur du vase sera d'abord à la température des objets environnants, s'échauffera bientôt et restera chaud tant que la chaleur du corps intérieur n'aura pas fini de s'échapper.

Il est impossible de faire l'expérience électrique correspondante. Il est impossible d'électriser un corps et de le placer dans un vase creux, de façon que l'extérieur du vase ne montre d'abord aucune trace d'électrisation et devienne ensuite électrisé. Ce sont des phénomènes de ce genre que Faraday a recherchés en vain sous le nom de *charge absolue d'électricité*.

La chaleur peut être cachée à l'intérieur d'un corps et n'avoir point d'action au dehors : mais il est impossible d'isoler une quantité d'électricité, de l'empêcher d'être constamment reliée par induction à une quantité égale d'électricité contraire.

Il n'y a donc rien dans les phénomènes électriques qui corresponde à la capacité calorifique. C'est ce qui résulte immédiatement de l'hy-

pothèse suivie dans cet Ouvrage, que l'électricité est soumise à la même condition de continuité que les fluides incompressibles. Il est donc impossible de donner à un corps une charge effective d'électricité, en forçant une quantité additionnelle d'électricité à pénétrer dans ce corps (*voir* les nos 61, 111, 329 et 334).

CHAPITRE III.

FORCE ÉLECTROMOTRICE PRODUITE ENTRE LES CORPS EN CONTACT.

Potentiels de substances différentes mises en contact.

246. Si nous définissons le potentiel d'un vase conducteur creux comme étant le potentiel de l'air qui est à l'intérieur de ce vase, nous pouvons déterminer ce potentiel au moyen de l'électromètre, ainsi qu'il a été expliqué dans la première Partie (*voir* n° 222).

Prenons maintenant deux vases creux faits de métaux différents, de cuivre et de zinc, par exemple ; mettons-les en contact métallique et mesurons le potentiel de l'air à l'intérieur de chaque vase. Le potentiel de l'air renfermé dans le vase de zinc est positif par rapport à celui de l'air renfermé dans le vase de cuivre. La différence des potentiels dépend de la nature des surfaces intérieures des vases: elle est maximum quand le zinc est bien net et que le cuivre est encore couvert d'oxyde.

Ainsi, lorsque deux métaux sont mis en contact, il y a en général une force électromotrice qui agit de l'un vers l'autre, de façon que le potentiel de l'un dépasse celui de l'autre d'une certaine quantité. Telle est la théorie de l'électricité de contact, de Volta.

Si l'on prend pour terme de comparaison un certain métal, le cuivre par exemple, et si F est le potentiel du fer mis en contact avec du cuivre au potentiel zéro, Z celui du zinc mis en contact avec du cuivre au potentiel zéro, le potentiel du zinc mis en contact avec du fer au potentiel zéro sera $Z - F$.

Ce résultat est vrai pour trois métaux quelconques; par suite, on voit que la différence des potentiels de deux métaux pris à la même température est la même, que ces métaux soient en contact direct ou séparés par un troisième métal : si donc on forme un circuit avec un nombre quelconque de métaux pris à la même température, il y aura équilibre électrique aussitôt que ces différents métaux auront atteint leur potentiel propre, et le courant ne continuera pas de passer dans le circuit.

247. Mais, si le circuit est formé de deux métaux et d'un électrolyte,

d'après la théorie de Volta, l'électrolyte tend à ramener à l'égalité les potentiels des métaux en contact, en sorte que, la force électromotrice qui réside à la jonction des métaux n'étant plus contrebalancée, il se produit un courant permanent. L'énergie de ce courant est fournie par l'action chimique qui s'établit entre l'électrolyte et les métaux.

248. Mais l'effet électrique peut aussi être produit sans action chimique, par tout autre moyen qui permet de ramener à l'égalité les potentiels des métaux en contact. Ainsi, dans une expérience due à Sir W. Thomson (1), un entonnoir de cuivre est mis en contact avec un cylindre vertical de zinc; on fait écouler par l'entonnoir des limailles de cuivre, de façon qu'elles quittent l'entonnoir et se séparent les unes des autres vers le milieu du cylindre de zinc, pour tomber ensuite dans un récipient isolé placé en dessous. On trouve que le récipient prend une charge négative qui augmente tant que la limaille continue d'y tomber. En même temps, le cylindre de zinc et l'entonnoir de cuivre qu'il renferme prennent une charge positive de plus en plus forte.

Si maintenant le récipient est relié par un fil au cylindre de zinc, ce fil sera traversé par un courant positif allant du cylindre au récipient. Le courant de limaille, dont chaque grain est chargé négativement par induction, constitue un courant négatif allant de l'entonnoir au récipient ou, en d'autres termes, un courant positif allant du récipient à l'entonnoir de cuivre. Le courant positif va donc du zinc au cuivre par l'air à travers les limailles, et du cuivre au zinc par les points de contact des métaux, de même que dans les dispositions voltaïques ordinaires; mais, dans le cas actuel, la force qui entretient le courant n'est plus l'action chimique, mais bien la gravité qui fait tomber les limailles malgré l'attraction électrique qui agit entre l'entonnoir chargé positivement et les limailles chargées négativement.

249. La théorie de l'électricité de contact a reçu une confirmation remarquable par la découverte de Peltier : si un courant électrique passe par le point de contact de deux métaux, ce contact s'échauffe si le courant est dans un sens, et se refroidit si le courant est en sens opposé. On doit se souvenir qu'un courant produit toujours de la chaleur en traversant un métal, parce qu'il rencontre de la résis-

(1) *North British Review*, p. 353, 1864; et *Proc. R. S.*, 20 juin 1867.

tance : l'effet de refroidissement de l'ensemble du conducteur doit donc être toujours inférieur à l'effet d'échauffement. Et nous devons distinguer la production de chaleur qui est due à la résistance ordinaire dans chaque métal de la production ou l'absorption de chaleur qui a lieu au point de contact des deux métaux. Nous dirons dans le premier cas que le courant produit de la chaleur de frottement, et nous avons vu que cette chaleur est proportionnelle au carré de l'intensité, et qu'elle est la même, quel que soit le sens positif ou négatif du courant. Le second phénomène peut être appelé *effet de Peltier*, et change de signe en même temps que le courant.

La chaleur totale produite dans un conducteur complexe formé de deux métaux peut s'exprimer par

$$H = \frac{R}{J} C^2 t - \Pi C t,$$

H étant la quantité de chaleur, J l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur, R la résistance du conducteur, C l'intensité, t le temps, Π le coefficient de l'effet de Peltier, c'est-à-dire la quantité de chaleur absorbée au point de contact par le fait du passage de l'unité de courant pendant l'unité de temps.

Or la chaleur engendrée est mécaniquement équivalente au travail accompli dans le conducteur à l'encontre des forces électriques; elle est donc égale au produit de l'intensité par la force électromotrice qui lui donne naissance. Donc, si E est la force électromotrice extérieure, qui détermine le passage du courant dans le conducteur,

$$JH = CEt = RC^2 t - J\Pi C t;$$

d'où

$$E = RC - J\Pi.$$

On voit par cette équation que la force électromotrice extérieure nécessaire pour faire passer le courant dans le conducteur complexe est inférieure à celle qui correspondrait à la seule résistance du conducteur de la force électromotrice $J\Pi$. Donc $J\Pi$ représente la force électromotrice de contact qui agit dans le sens positif à la jonction des deux métaux.

C'est à Sir W. Thomson (1) que l'on doit cette application de la théorie dynamique de la chaleur à la détermination d'une force électromotrice locale; elle a une grande importance scientifique, car on n'aurait pu faire usage de la méthode ordinaire qui consiste à relier

(1) *Proc. R. S. Edin.*, 15 décembre 1881; et *Proc. R. S. Edin.*, 1851.

par des fils deux points du conducteur complexe aux électrodes d'un galvanomètre ou d'un électroscope, précisément à cause des forces de contact qui se produisent à la jonction des fils avec les substances qui forment le conducteur complexe. Dans la méthode thermique, au contraire, nous savons que le courant électrique est la seule source d'énergie, et que, dans une certaine partie du circuit, il ne fait d'autre travail que d'échauffer cette portion de circuit. Si donc nous pouvons mesurer la quantité d'électricité qui passe, et la quantité de chaleur dégagée ou absorbée, nous pourrons déterminer la force électromotrice nécessaire pour émettre ce courant à travers cette partie du conducteur; et cette mesure est entièrement indépendante de l'effet des forces de contact dans les autres parties du circuit.

La force électromotrice produite à la jonction de deux métaux, et mesurée comme il vient d'être dit, ne suffit pas à rendre compte de la force électromotrice observée par Volta, et décrite au § 246. Cette dernière est en général bien plus grande que celle dont il s'agit ici, et elle est souvent de signe contraire. Donc il doit y avoir une erreur dans l'hypothèse que l'on peut mesurer le potentiel d'un métal par celui de l'air qui est en contact avec lui, et l'on doit chercher la majeure partie de la force électromotrice de Volta, non plus à la jonction des deux métaux, mais sur une des surfaces ou sur les deux qui séparent les métaux de l'air ou de l'autre milieu qui forme le troisième élément du circuit.

250. La découverte, due à Seebeck, des courants thermo-électriques qui se produisent dans les circuits de plusieurs métaux dont les jonctions sont à des températures différentes, montre que ces forces de contact ne se font pas toujours équilibre dans un circuit fermé. Mais il est bien clair que, dans un circuit fermé formé de différents métaux qui sont tous à une même température, les forces de contact doivent se faire équilibre. S'il en était autrement, il se formerait dans le circuit un courant que l'on pourrait employer à faire aller une machine, ou à produire de la chaleur dans le circuit, c'est-à-dire à exécuter du travail, sans dépenser en même temps d'énergie : car le circuit est tout entier à la même température, et il ne s'y produit aucun changement, chimique ou autre. Dès lors, représentant par Π_{ab} l'effet de Peltier à la jonction de deux métaux a et b, lorsque le courant passe de a à b, nous devons avoir pour un circuit de deux métaux à la même température

$$\Pi_{ab} + \Pi_{ba} = 0$$

et, pour un circuit de trois métaux, nous devons avoir

$$\Pi_{ab} + \Pi_{bc} + \Pi_{ca} = 0.$$

De cette équation, il résulte que les trois effets de Peltier ne sont pas indépendants, mais qu'un d'entre eux peut se déduire des deux autres. Si, par exemple, nous prenons le métal c pour terme de comparaison, et si nous posons

$$P_a = J\Pi_{ac}, \quad P_b = J\Pi_{bc},$$

on aura

$$J\Pi_{ab} = P_a - P_b.$$

La quantité P_a est une fonction de la température et dépend de la nature du métal a.

251. Magnus a également fait voir que, dans un circuit unimétallique, il ne se forme point de courant, quelles que soient les variations de section et de température aux différents points du conducteur.

Puisque, dans ce cas, il y a conduction de la chaleur, c'est-à-dire dissipation d'énergie, on ne peut plus considérer ce résultat comme évident, de même que le précédent. Ainsi, la force électromotrice entre deux points du circuit pourrait varier, suivant que le courant va d'une partie épaisse à une partie mince, ou inversement, selon qu'il passe rapidement ou lentement d'une partie chaude à une partie froide, ou inversement ; ce qui rendrait possible l'existence d'un courant dans un circuit unimétallique inégalement chaud en ces différents points.

Alors, en répétant le même raisonnement que dans le cas du phénomène de Peltier, on trouve que le passage d'un courant dans un conducteur unimétallique ne peut produire d'effet thermique changeant de signe en même temps que le courant, que si le courant passe des points où la température est haute à ceux où elle est basse, ou inversement ; et, appelant H la quantité de chaleur dégagée dans un conducteur unimétallique par un courant qui passe d'un point à température x à un point à température y, on a

$$JH = RC^2t - S_{xy}Ct,$$

S_{xy} est la force électromotrice qui tend à entretenir le courant. Or soient x, y, z les températures en trois points d'un circuit homogène, nous devons avoir, suivant Magnus,

$$S_{yz} + S_{zx} + S_{xy} = 0.$$

Si nous supposons que z soit la température zéro, et si nous posons

$$Q_x = S_{xz}, \quad Q_y = S_{yz},$$

nous trouvons

$$S_{xy} = Q_x - Q_y,$$

où Q_x est une fonction de la température x, dont la forme dépend de la nature du métal.

Si maintenant nous considérons un circuit formé de deux métaux, a et b, où la température est x, au point où le courant passe de a en b, et où la température est y au point où le courant passe de b en a, la force électromotrice sera

$$F = P_{ax} - P_{bx} + Q_{bx} - Q_{by} + P_{by} - P_{ay} + Q_{ay} - Q_{ax},$$

où P_{ax} représente la valeur de P pour le métal a et la température x, ou bien

$$F = P_{ax} - Q_{ax} - (P_{ay} - Q_{ay}) - (P_{bx} - Q_{bx}) + P_{by} - Q_{by}.$$

Et puisque, dans un circuit formé de plusieurs métaux à différentes températures, il y a en général des courants thermo-électriques, c'est que P et Q sont en général différents pour un même métal et à une même température.

252. C'est Sir W. Thomson qui, dans le Mémoire déjà cité, a démontré le premier l'existence de la quantité Q, en partant du phénomène de l'inversion électrique découvert par Cumming (1). Ce physicien a trouvé que l'ordre thermo-électrique de certains métaux n'est pas le même à haute et à basse température, en sorte qu'à une certaine température deux métaux peuvent être neutres l'un pour l'autre. Ainsi, dans un circuit formé de cuivre et de fer, dont on maintient une soudure à la température ordinaire, pendant que l'on élève la température de la seconde soudure, il s'établit un courant qui va du cuivre au fer par la soudure chaude; et la force électromotrice continue d'augmenter jusqu'à ce que la soudure chaude ait atteint une température T, qui, d'après Thomson, est d'environ 284°C. Si l'on continue d'élever la température de la soudure chaude, la force électromotrice diminue, et enfin, si l'on élève suffisamment la température, le courant change de sens. L'inversion du courant peut s'obtenir plus aisément en élevant la température de la soudure froide.

(1) *Cambridge Transactions*, 1823.

Si la température des deux contacts est supérieure à T, le courant s'établit du fer au cuivre par le contact chaud, c'est-à-dire en sens inverse du courant obtenu lorsque les deux contacts sont au-dessous de T.

Donc, si un des contacts est à la température neutre T, le courant s'établit du cuivre au fer par ce contact, que l'autre soudure soit plus chaude ou plus froide.

253. Thomson fait sur ces faits le raisonnement suivant : Supposons le second contact à une température inférieure à T. On peut employer le courant à actionner une machine ou à produire de la chaleur dans un fil, et cette dépense d'énergie doit être compensée par une transformation de chaleur en énergie électrique : de la chaleur doit donc disparaître en quelque point du circuit. Or le fer et le cuivre sont neutres l'un pour l'autre à la température T; il ne peut donc se produire au contact chaud d'effet thermique réversible, et, au contact froid, le courant doit, d'après le principe de Peltier, produire un dégagement de chaleur. Donc les seuls points où il puisse disparaître de la chaleur sont les parties en fer ou en cuivre du circuit : ainsi, un courant qui traverse le fer des points chauds aux points froids doit refroidir le fer, ou bien un courant qui traverse le cuivre des points froids aux points chauds doit refroidir le cuivre, ou bien enfin ces deux effets se produisent à la fois. Par une série compliquée d'ingénieuses expériences, Thomson a réussi à mettre en évidence l'action thermique réversible du courant qui passe entre des points à températures différentes, et il a reconnu que le courant produit des effets contraires dans le cuivre et dans le fer (1).

Lorsqu'un fluide matériel s'écoule le long d'un tuyau, en passant d'une partie chaude à une partie froide, il échauffe le tuyau; quand il passe d'une partie froide à une partie chaude, il refroidit le tuyau, et ces effets dépendent de la capacité calorifique spécifique du fluide. Si nous supposons que l'électricité, positive ou négative, soit un fluide matériel, nous pourrons mesurer sa chaleur spécifique par son effet thermique sur un conducteur inégalement chaud en ses différents points. Or les expériences de Thomson montrent que l'électricité positive dans le cuivre, l'électricité négative dans le fer, transportent de la chaleur des parties chaudes aux parties froides. Si donc nous supposons que l'électricité positive, ou bien la négative soit un fluide

(1) *On the electrodynamic qualities of metals* (*Phil. Trans.*, 1856).

capable de s'échauffer, de se refroidir et de céder de la chaleur à d'autres corps, nous trouvons ces hypothèses en défaut dans le cas du fer pour l'électricité positive, du cuivre pour l'électricité négative; il nous faut abandonner l'une et l'autre supposition.

Cette prédiction scientifique d'un effet réversible produit par le courant électrique dans un conducteur unimétallique inégalement échauffé est un exemple instructif de ce que peut l'application de la théorie de la conservation de l'énergie pour nous ouvrir de nouvelles voies de recherche scientifique. Thomson a également employé la seconde loi de la Thermodynamique pour établir les relations des quantités que nous avons appelées P et Q, et pour étudier les propriétés thermo-électriques que pourraient avoir des corps non isotropes. Il a aussi étudié expérimentalement dans quelles conditions de pression, d'aimantation, etc., peuvent se développer ces propriétés.

254. Le professeur Tait [1] a étudié dernièrement la force électromotrice des circuits thermo-électriques formés de métaux différents dont les contacts sont à des températures différentes. Il trouve que la force électromotrice d'un circuit peut se représenter très exactement par la formule

$$\mathrm{E} = a\,(t_1 - t_2)\left[t_0 - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)\right],$$

où t_1 est la température absolue du contact chaud, t_2 celle du contact froid, et t_0 celle où les deux métaux sont neutres l'un pour l'autre. Cette loi ayant été vérifiée entre des limites de température très étendues par lui-même et par ses élèves, il espère pouvoir se servir du circuit thermo-électrique comme d'un instrument thermométrique dans ses expériences sur la conduction de la chaleur, et dans d'autres cas où le thermomètre à mercure n'est pas d'un emploi commode, ou ne présente pas un champ de variations assez étendu.

D'après la théorie de Tait, la quantité que Thomson appelle *chaleur spécifique de l'électricité* est proportionnelle à la température absolue pour tout métal pur, sa grandeur et même son signe variant pour les différents métaux. De là il tire, au moyen des principes de la Thermodynamique, les résultats suivants : Soient $k_a t$, $k_b t$, $k_c t$ les chaleurs spécifiques de l'électricité dans trois métaux a, b et c; soient T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} les températures auxquelles les couples formés avec ces

---

[1] *Proc. R. S. Edin.*, session 1870-71, p. 308; et 18 décembre 1871.

métaux sont neutres; les équations

$$(k_b - k_c)T_{bc} + (k_c - k_a)T_{ca} + (k_a - k_b)T_{ab} = 0,$$
$$J\Pi_{ab} = (k_a - k_b)t(T_{ab} - t),$$
$$E_{ab} = (k_a - k_b)(t_1 - t_2)[T_{ab} - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)]$$

expriment les relations entre les températures de neutralisation, la valeur de l'effet de Peltier, et la force électromotrice, dans un circuit thermo-électrique.

CHAPITRE IV.

ÉLECTROLYSE.

Conduction électrolytique.

255. J'ai déjà dit que, quand un courant électrique traverse, en un point de son circuit, certaines substances composées appelées *électrolytes*, le passage du courant est accompagné d'une opération chimique appelée *électrolyse* : la substance se décompose en deux éléments ou ions; l'un d'eux, appelé *anion* ou élément électronégatif, paraît à l'anode, c'est-à-dire à l'endroit où le courant pénètre dans l'électrolyte; l'autre, appelé *cation* ou élément électropositif, paraît à la cathode, c'est-à-dire au point où le courant sort de l'électrolyte.

L'étude complète de l'électrolyse appartient autant à la Chimie qu'à l'Électricité. Nous la considérerons à un point de vue électrique, sans discuter ses applications à la théorie de la constitution des composés chimiques.

De tous les phénomènes électriques, l'électrolyse paraît être le plus propre à nous fournir des vues exactes sur la nature du courant électrique; car nous trouvons là des courants de matière ordinaire et des courants d'électricité qui sont parties essentielles d'un même phénomène.

Et c'est sans doute pour cette raison même que, dans l'état imparfait de nos connaissances présentes en électricité, nous n'avons que des théories si peu satisfaisantes de l'électrolyse.

Voici quelle est la loi fondamentale de l'électrolyse établie par Faraday et confirmée jusqu'à présent par les expériences de Beetz, de Hittorf et d'autres encore :

Le nombre des équivalents électrochimiques d'un électrolyte, qui sont décomposés dans un temps donné par le passage d'un courant électrique, est égal au nombre des unités d'électricité transportées par le courant dans le même espace de temps.

L'équivalent électrochimique d'une substance est la quantité de cette substance qui est décomposée par l'unité du courant traversant la substance pendant l'unité de temps ou, en d'autres termes, par le passage de l'unité d'électricité. Lorsque l'unité d'électricité est définie

en mesure absolue, la valeur absolue de l'équivalent électrochimique de chaque substance peut se déterminer en grains ou en grammes.

Les équivalents électrochimiques des différentes substances sont proportionnels à leurs équivalents chimiques ordinaires. Mais les équivalents chimiques ne sont rien que des rapports numériques suivant lesquels se combinent les corps, tandis que les équivalents électrochimiques sont des quantités de matière définies, dépendant de la définition de l'unité d'électricité.

Tout électrolyte est formé de deux éléments qui, pendant l'électrolyse, apparaissent aux points où le courant entre dans l'électrolyte et en sort, et en ces points seulement. Si donc nous concevons une surface quelconque décrite dans la masse de l'électrolyte, la grandeur de l'action électrolytique qui se produit à travers cette surface, mesurée par le nombre d'équivalents électrochimiques des deux composants qui sont transportés à travers cette surface dans des directions opposées, est proportionnelle au courant électrique total qui passe à travers la surface.

Le transport des ions dans des directions opposées, à travers la masse de l'électrolyte, fait donc partie intégrante du phénomène de la conduction des courants électriques à travers les électrolytes. En tout point de l'électrolyte où passe un courant électrique existent aussi deux courants matériels de sens contraires, l'un d'anion et l'autre de cation, dont les lignes de flux sont identiques à celles du courant électrique, et qui lui sont proportionnels en grandeur.

Il est donc naturel de supposer que les courants d'ions sont des courants électriques de convection, et, en particulier, que chaque molécule de cation est chargée d'une certaine quantité fixe d'électricité positive, la même pour les molécules de toute espèce de cation, et que chaque molécule d'anion est chargée d'une quantité égale d'électricité négative.

Les mouvements opposés des ions dans l'électrolyte nous donnent donc une représentation physique complète du courant électrique. On peut aussi comparer ce mouvement des ions au mouvement des liquides ou des gaz qui se mélangent par diffusion : il y a toutefois entre les deux phénomènes cette différence que, dans la diffusion, les différentes substances sont seulement mélangées et que le mélange n'est pas homogène; dans l'électrolyse les deux substances sont combinées chimiquement, et l'électrolyte est homogène. Dans la diffusion, la cause qui détermine le mouvement d'une substance dans une direction donnée est une diminution de la quantité de cette substance qui est renfermée dans l'unité de volume, dans cette direction; dans l'élec-

trolyse, le mouvement de chaque ion est dû à la force électromotrice qui agit sur les molécules électrisées.

256. Clausius (1), qui a beaucoup étudié la théorie de l'agitation moléculaire des corps, suppose que les molécules de tous les corps sont dans un état perpétuel de mouvement; dans les corps solides, la molécule ne s'écarte pas de sa position initiale au delà d'une certaine distance; au contraire, dans les fluides, une molécule qui s'est écartée à une certaine distance de sa position initiale est sollicitée tout autant à se mouvoir plus loin qu'à revenir en arrière. Les molécules d'un fluide qui semble en repos changent constamment de position et passent indifféremment d'un point à un autre du fluide. Clausius suppose que, dans un fluide composé, ce ne sont point seulement les molécules composées qui circulent de cette manière, mais que, dans les chocs qui se produisent entre ces molécules composées, les atomes dont elles sont formées se séparent fréquemment, s'associent à d'autres, et qu'ainsi un atome déterminé d'une certaine espèce est associé tantôt à un et tantôt à un autre des atomes de l'autre espèce. Ce phénomène se produirait de tout temps dans un liquide. Lorsqu'une force électromotrice agit sur le liquide, ces mouvements, qui s'effectuaient indifféremment dans toutes les directions, subissent l'influence de la force électromotrice : les molécules chargées positivement tendent à se mouvoir vers la cathode plutôt que vers l'anode, les molécules chargées négativement tendent à prendre un mouvement de sens inverse. Par suite, dans les instants où elles sont libres, les molécules de cation se précipitent vers la cathode; mais à chaque instant leur marche est arrêtée, parce que, rencontrant les molécules d'anion qui se précipitent en foule dans la direction opposée, elles s'unissent avec elles dans des groupements temporaires.

257. Cette théorie de Clausius nous permet de comprendre comment il faut une force électromotrice de grandeur finie pour effectuer la décomposition matérielle d'un électrolyte, et comment, au contraire, la conduction du courant dans l'électrolyte se fait d'après la loi de Ohm, en sorte que la force électromotrice, même la plus faible, produit dans une électrolyse un courant de grandeur proportionnée.

D'après la théorie de Clausius, la décomposition et la recomposition de l'électrolyte ont lieu constamment, lors même qu'il n'y a pas

(1) *Pogg. Ann.*, vol. CI, p. 338; 1857.

de courant, et la force électromotrice la plus minime suffit pour diriger ces opérations dans une certaine mesure et pour produire ainsi les courants d'ions et d'électricité qui font partie du même phénomène. Mais, à l'intérieur de l'électrolyte, les ions ne sont jamais mis en liberté en quantité finie, et c'est cette mise en liberté des ions qui exige une force électromotrice finie. Les ions s'accumulent aux électrodes; car, à mesure qu'elles y arrivent, les portions successives des ions n'y rencontrent pas des molécules de l'autre espèce, toutes prêtes à entrer en combinaison, mais elles sont poussées de force en compagnie de molécules de même espèce qu'elles-mêmes, auxquelles elles ne peuvent se combiner. La force électromotrice nécessaire pour produire cet effet est de grandeur finie, et elle donne naissance à une force électromotrice contraire qui produit un courant de sens inverse lorsque les autres forces électromotrices sont supprimées. Lorsque se manifeste cette force électromotrice inverse, due à l'accumulation des ions sur les électrodes, on dit que les électrodes sont polarisées.

258. Une des meilleures méthodes pour déterminer si un corps est ou non un électrolyte, consiste à le placer entre des électrodes de platine et le faire traverser, pendant quelque temps, par un courant; puis, détachant les électrodes de la pile voltaïque et les reliant à un galvanomètre, on observe si le galvanomètre est traversé par un courant inverse dû à la polarisation des électrodes. L'existence d'un pareil courant, étant due à l'accumulation sur les deux électrodes de substances différentes, démontre que la matière a subi une décomposition électrolytique sous l'action du courant initial de la pile. Cette méthode peut s'appliquer souvent dans des cas où les méthodes chimiques directes auraient peine à révéler la présence de produits de décomposition sur les électrodes. (*Voir* § 271.)

259. Jusqu'ici la théorie de l'électrolyse paraît très satisfaisante. Elle explique le courant électrique, dont nous ne comprenons pas la nature, par les courants des éléments matériels de l'électrolyte, dont les mouvements, pour n'être pas visibles à l'œil, n'en sont pas moins aisés à démontrer. Elle explique clairement, ainsi que l'a montré Faraday, pourquoi un électrolyte qui est conducteur à l'état liquide ne l'est plus à l'état solide; car, si les molécules ne peuvent circuler librement d'un point à un autre, il ne peut y avoir conduction électrolytique : donc, pour être conductrice, la substance doit être rendue liquide, par voie de fusion ou de solution.

Mais, si nous allons plus loin, si nous admettons que dans l'électro-

lyte les molécules des ions sont réellement chargées de quantités définies d'électricités positive et négative, en sorte que le courant électrolytique ne serait qu'un simple courant de convection, cette hypothèse séduisante nous amène sur un terrain bien difficile.

En premier lieu, il faut admettre que, dans tout électrolyte, chaque molécule de cation, au moment où elle est mise en liberté sur la cathode, cède à la cathode une charge d'électricité positive dont la grandeur est la même pour toutes les molécules, non seulement de ce cation, mais encore de tout autre cation. De même chaque molécule d'anion mise en liberté donne à l'anode une charge d'électricité négative, de même grandeur que la charge positive due à une molécule de cation, mais de signe contraire.

Si, au lieu d'une seule molécule, nous considérons un assemblage de molécules formant un équivalent électrochimique de l'ion, la charge totale de toutes ces molécules est, ainsi que nous l'avons vu, une unité d'électricité positive ou négative.

260. Nous ne savons pas encore combien il y a de molécules dans un équivalent électrochimique d'une substance, mais la théorie chimique moléculaire, qui est confirmée par un grand nombre de considérations physiques, suppose que le nombre de molécules contenues dans un équivalent électrochimique est le même pour toutes les substances. Nous pouvons donc, dans les considérations moléculaires, admettre que le nombre des molécules contenues dans un équivalent électrochimique est un certain nombre N, inconnu pour le moment, mais que plus tard on pourra trouver moyen de déterminer (1).

Alors chaque molécule, en se dégageant de l'état de combinaison, abandonne une charge dont la grandeur est $\frac{1}{N}$, charge qui est positive pour le cation et négative pour l'anion. C'est cette quantité déterminée d'électricité que nous appellerons *charge moléculaire*. Si on la connaissait, ce serait l'unité d'électricité la plus naturelle.

Jusqu'ici nous n'avons fait que préciser nos idées, en recourant à l'imagination pour nous représenter comment les molécules se chargent et se déchargent.

La mise en liberté des ions, la sortie de l'électricité positive de l'anode, son entrée dans la cathode sont des faits simultanés. Or les ions mis en liberté ne sont pas électrisés; donc, pendant qu'ils sont

(1) *Voir* la note au § 5.

combinés, leurs charges moléculaires sont telles qu'on vient de les décrire.

Mais, s'il est aisé d'en parler, il n'est pas aussi aisé de concevoir l'électrisation d'une molécule.

Nous savons que, si deux métaux sont mis en contact en un point, le reste de leur surface s'électrise; que, si ces métaux sont en forme de plateaux séparés par une couche d'air très mince, la charge de chaque plateau peut devenir considérable. On peut supposer qu'il se produit quelque chose d'analogue lorsque les deux éléments d'un électrolyte sont combinés; on peut supposer que, dans chaque couple de molécules, il y a un point de contact, et que le reste des surfaces est chargé par l'électricité due à la force électromotrice de contact.

Mais, pour expliquer le phénomène, il nous faut montrer pourquoi la charge produite ainsi dans chaque molécule a une grandeur constante; pourquoi, par exemple, une molécule de chlore étant combinée à une molécule de zinc, la charge moléculaire est la même que si la molécule de chlore est combinée à une molécule de cuivre, alors que la force électromotrice du couple chlore-zinc est bien plus grande que celle du couple chlore-cuivre. Si la charge des molécules est l'effet de la force électromotrice de contact, pourquoi des forces électromotrices d'intensités différentes produisent-elles des charges égales?

Supposons cependant que nous passions sur cette difficulté, nous bornant à affirmer ce fait que la charge moléculaire a une valeur constante; et, pour la facilité de l'élocution, appelons cette charge moléculaire constante *une molécule d'électricité*.

Cette expression, si imparfaite qu'elle soit, si peu en harmonie avec le reste de cet Ouvrage, nous permettra du moins d'énoncer clairement ce que l'on sait relativement à l'électrolyse, et d'apprécier les difficultés qui se présentent.

Tout électrolyte doit être considéré comme un composé binaire formé de l'anion et du cation. L'anion ou le cation, ou tous deux, peuvent être des corps composés, en sorte que la molécule d'anion ou de cation peut renfermer un nombre quelconque d'atomes simples. Une molécule d'anion et une molécule de cation combinées ensemble forment une molécule d'électrolyte.

Pour pouvoir fonctionner comme anion dans un électrolyte, la molécule qui joue ce rôle doit être chargée de ce que nous avons appelé une molécule d'électricité négative; pour fonctionner comme cation, la molécule doit être chargée d'une molécule d'électricité positive.

Ces charges ne sont liées aux molécules que quand celles-ci sont combinées comme anion et cation dans l'électrolyte.

Lorsque les molécules sont électrolysées, elles cèdent leurs charges aux électrodes, et, une fois dégagées de la combinaison, se présentent à l'état de corps non électrisés.

Si une même molécule est susceptible de fonctionner comme anion dans un électrolyte, comme cation dans un autre, et, en outre, d'entrer dans des combinaisons qui ne sont pas des électrolytes, il nous faut admettre que cette molécule reçoit une charge d'électricité positive quand elle agit comme cation, une charge négative quand elle agit comme anion, enfin qu'elle n'a point de charge quand elle est dans un corps non électrolyte.

Ainsi l'iode agit comme anion dans les iodures métalliques et l'acide iodhydrique et, comme cation, dit-on, dans le bromure d'iode.

Cette théorie des charges moléculaires peut servir à nous rappeler bon nombre de faits relatifs à l'électrolyse; mais il est très peu probable que, le jour où nous serons parvenus à comprendre la nature véritable de l'électrolyse, nous conservions rien de la théorie des charges moléculaires; car nous aurons alors acquis une base assurée pour édifier la véritable théorie des courants électriques, et nous rendre indépendants de ces théories provisoires.

261. Un des pas les plus importants que nous ayons faits dans la connaissance de l'électrolyse a été de distinguer les phénomènes chimiques secondaires qui sont produits par le dégagement des ions aux électrodes.

Dans bien des cas, les substances que l'on trouve aux électrodes ne sont pas les ions proprement dits de l'électrolyse, mais les produits de l'action de ces ions sur l'électrolyte.

Ainsi, lorsqu'une solution de sulfate de soude est décomposée par un courant qui traverse aussi de l'acide sulfurique étendu, il se dégage aux deux anodes des quantités égales d'oxygène, aux deux cathodes des quantités égales d'hydrogène, aussi bien dans le sulfate de soude que dans l'acide étendu.

Mais si l'électrolyse est effectuée dans des vases convenables, tubes en U ou vases munis d'un diaphragme poreux, de façon que l'on puisse examiner à part la substance qui entoure chaque électrode, on trouve qu'à l'anode du sulfate de soude il y a un équivalent d'acide sulfurique, en même temps qu'un équivalent d'oxygène, et à la cathode un équivalent de soude, en même temps que deux équivalents d'hydrogène.

Il semblerait donc à première vue que, conformément à l'ancienne théorie sur la constitution des sels, le sulfate de soude ait été décom-

posé en ses éléments : acide sulfurique et soude, et que l'eau de la solution ait été séparée en même temps en oxygène et hydrogène. Mais une pareille explication obligerait à admettre que le même courant, qui, en traversant l'acide sulfurique étendu, décompose un équivalent d'eau, peut, lorsqu'il traverse la solution de sulfate de soude, décomposer un équivalent de sel en même temps qu'un équivalent d'eau; ce qui est contraire à la loi des équivalents électrochimiques.

Mais supposons que les éléments du sulfate de soude sont, non pas SO^3 et NaO, mais SO^4 et Na, non pas de l'acide sulfurique et de la soude, mais du sulfion et du sodium: alors le sulfion va vers l'anode, et y est mis en liberté; mais, comme il ne peut exister à l'état libre, sa molécule se brise en acide sulfurique et oxygène, et il y a un équivalent de chacun. En même temps, le sodium mis en liberté à la cathode y décompose l'eau et forme un équivalent de soude et deux d'hydrogène.

Dans l'acide sulfurique étendu, les gaz que l'on recueille aux électrodes sont les éléments de l'eau, un volume d'oxygène, deux volumes d'hydrogène. La quantité d'acide sulfurique augmente aussi à l'anode, mais non d'une quantité égale à un équivalent.

On doute si l'eau pure est un électrolyte ou non : plus elle est pure, plus est grande la résistance qu'elle présente à la conduction électrolytique. Les moindres traces de matière étrangère suffisent à diminuer fortement sa résistance électrique. Les différents observateurs ont obtenu pour la résistance électrique de l'eau des valeurs si différentes que l'on ne saurait considérer cette quantité comme déterminée. Plus l'eau est pure, plus sa résistance est grande; et, si l'on pouvait obtenir de l'eau absolument pure, on peut douter qu'elle conduisît aucunement l'électricité.

Tant que l'eau était considérée comme un électrolyte, et qu'elle était même prise pour type des électrolytes, il y avait de fortes raisons de soutenir qu'elle est un composé binaire, et que deux volumes d'hydrogène sont chimiquement équivalents à un volume d'oxygène. Mais, si l'on admet que l'eau n'est pas un électrolyte, on est libre de supposer que des volumes égaux d'oxygène et d'hydrogène sont chimiquement équivalents.

La théorie dynamique des gaz nous conduit à supposer que, dans les gaz parfaits, des volumes égaux contiennent toujours un même nombre de molécules, et que la partie principale de la chaleur spécifique, celle qui dépend du mouvement d'agitation des molécules les unes autour des autres, est la même pour un même nombre de molécules de tous les gaz. Nous sommes donc conduits à préférer

un système chimique dans lequel on considère comme équivalents des volumes égaux d'hydrogène et d'oxygène, et où l'eau est considérée comme formée de deux équivalents d'hydrogène et d'un équivalent d'oxygène, c'est-à-dire comme un corps qui n'est sans doute pas susceptible d'être électrolysé directement.

L'électrolyse établit donc le rapport étroit des phénomènes électriques et des phénomènes de combinaison chimique, mais le fait que tous les composés chimiques ne sont point des électrolytes montre que la combinaison chimique est un phénomène plus complexe que les phénomènes purement électriques. Ainsi, les combinaisons des métaux entre eux, quoique formées d'éléments bons conducteurs et placés à des degrés différents de l'échelle d'électrisation par contact, ne sont pas décomposées par le courant, même à l'état fluide. La plupart des combinaisons entre substances qui fonctionnent comme anions ne sont pas conductrices, ni, par suite, électrolytes. Et, outre ceux-là, il y a encore un grand nombre de composés, qui, contenant les mêmes éléments que des électrolytes, mais en proportions différentes, ne sont pas conducteurs ni, par suite, électrolytes.

De la conservation de l'énergie dans l'électrolyse.

202. Considérons un circuit voltaïque formé d'une pile, d'un fil et d'un voltamètre.

Pendant qu'il passe une unité d'électricité dans chaque section du circuit, il y a électrolyse d'un équivalent électrochimique de chaque substance contenue dans les vases de la pile ou dans le voltamètre.

On peut déterminer la quantité d'énergie mécanique équivalente à une opération chimique donnée, en transformant en chaleur toute l'énergie due à cette opération et en exprimant cette chaleur en unités dynamiques : il n'y a qu'à multiplier le nombre des unités thermiques par l'équivalent mécanique de la chaleur, déterminé par Joule.

Dans le cas où cette méthode directe n'est pas applicable, on amène les substances à un même état final en prenant successivement pour point de départ l'état où elles étaient avant l'opération chimique, et celui où elles sont après cette opération; si l'on peut évaluer les quantités de chaleur dégagées dans ces deux cas, l'équivalent thermique de l'opération chimique est la différence de ces deux quantités.

Joule a reconnu que si l'action chimique, entretient un courant voltaïque, la quantité de chaleur dégagée dans les éléments de la pile est inférieure à la quantité de chaleur équivalente aux actions chi-

miques qui se produisent dans ces éléments, et que le reste de cette chaleur se développe dans les fils de communication, ou bien, s'il y a une machine électromagnétique dans le circuit, qu'elle se retrouve en partie dans le travail mécanique de cette machine.

Ainsi, les électrodes d'une pile voltaïque étant reliées d'abord par un fil gros et court, ensuite par un fil long et mince, la chaleur dégagée dans la pile, pendant que se dissout un gramme de zinc, est plus grande dans le premier cas que dans le second; mais la chaleur développée dans le fil est plus grande dans le second cas que dans le premier. Et la somme des chaleurs dégagées dans la pile et dans le fil pendant la dissolution d'un gramme de zinc est la même dans les deux cas. Ce résultat a été établi par Joule par des expériences directes.

Le rapport de la chaleur dégagée dans la pile à la chaleur dégagée dans le fil est égal au rapport des résistances de la pile et du fil. Si donc on fait le fil suffisamment résistant, presque toute la chaleur sera dégagée dans le fil; si on le fait suffisamment conducteur, presque toute la chaleur sera dégagée dans la pile.

Prenons un fil de grande résistance : la quantité de chaleur qui y est développée est égale, en mesure dynamique, au produit de la quantité d'électricité qui passe par la force électromotrice qui la fait mouvoir dans le fil.

263. Or, dans le temps qu'un équivalent électrochimique de la substance placée dans la pile subit l'opération chimique qui donne naissance au courant, il passe dans le fil une unité d'électricité. Donc, dans ce cas, la chaleur produite par le passage de l'unité d'électricité a pour mesure la force électromotrice. Mais cette chaleur est celle que développe, dans la pile ou dans le fil, un équivalent électrochimique de la substance, pendant qu'elle subit l'opération chimique considérée.

De là l'important théorème (1) qui suit, démontré pour la première fois par Thomson (*Phil. Mag.*, décembre 1851) :

La force électromotrice d'un système électrochimique est, en

(1) On ne peut considérer ce théorème comme établi qu'à condition de négliger les dégagements de chaleur qui ont lieu aux surfaces de contact des conducteurs qui composent le circuit, surfaces qui sont au moins au nombre de trois. Le rapport de la chaleur ainsi dégagée à la chaleur dégagée dans le fil extérieur ne tend pas nécessairement vers zéro quand on augmente indéfiniment la résistance du fil extérieur. [P.]

mesure absolue, égale à l'équivalent mécanique de l'action chimique effectuée sur un équivalent électrochimique de la substance.

Les équivalents thermiques d'un grand nombre de réactions chimiques ont été déterminés par Andrews, Hess, Favre, Silbermann, etc., et l'on en peut déduire les équivalents mécaniques en multipliant par l'équivalent mécanique de la chaleur.

Non seulement ce théorème nous permet d'évaluer, en partant des données purement thermiques, la force électromotrice des différents systèmes voltaïques, et de calculer les forces électromotrices nécessaires pour produire l'électrolyse dans différents cas, mais encore il nous donne le moyen de mesurer effectivement les affinités chimiques.

Depuis longtemps on sait que l'affinité chimique, c'est-à-dire la tendance à la production d'un certain changement chimique, est plus grande dans certains cas que dans d'autres; mais on ne pouvait en faire de mesure véritable jusqu'au jour où il a été démontré que, dans certaines circonstances, cette tendance est exactement équivalente à une force électromotrice, et, par suite, peut se mesurer d'après les mêmes principes que les forces électromotrices.

Et du moment que l'affinité chimique peut, dans certains cas, être soumise à la mesure, toute la théorie des actions chimiques, des proportions dans lesquelles elles s'établissent, du déplacement d'une substance par une autre, etc., devient bien plus aisée à comprendre que quand l'affinité chimique était considérée comme une qualité *sui generis*, impossible à mesurer numériquement.

Si les produits de l'électrolyse ont un plus grand volume que l'électrolyte, du travail est dépensé pendant l'électrolyse pour vaincre la pression. Si le volume d'un équivalent électrochimique de l'électrolyte s'accroît d'un volume v quand on le soumet à l'électrolyse sous la pression p, le travail dépensé pour vaincre la pression, pendant le passage de l'unité d'électricité vp, et la force électromotrice nécessaire pour produire l'électrolyse, doivent comprendre une partie égale à vp, se dépensant à exécuter ce travail mécanique.

Si les produits de l'électrolyse sont des gaz qui, comme l'oxygène et l'hydrogène, sont bien moins denses que l'électrolyte, et suivent très exactement la loi de Boyle, vp est à très peu près constant, la température restant la même, et la force électromotrice nécessaire pour produire l'électrolyse ne dépendra pas sensiblement de la pression. Ainsi, l'on a reconnu qu'il est impossible d'empêcher la décomposition de l'acide sulfurique étendu en renfermant dans un petit espace les gaz résultant de la décomposition.

Si les produits de l'électrolyse sont liquides ou solides, la quantité p augmente à mesure que la pression augmente : si donc r est positif, un accroissement de pression augmente la force électromotrice nécessaire pour produire l'électrolyse.

De même, tout autre travail, quel qu'il soit, qui s'effectue pendant l'électrolyse aura son effet sur la valeur de la force électromotrice : par exemple, si un courant vertical passe entre deux électrodes de zinc dans une solution de sulfate de zinc, il faudra une force électromotrice plus grande si, dans la solution, le courant va de bas en haut que s'il va de haut en bas; car, dans le premier cas, le zinc est transporté de l'électrode inférieure à l'électrode supérieure, et de l'électrode supérieure à l'électrode inférieure dans le second. La force électromotrice nécessaire de ce chef est inférieure à un millionième de celle de l'élément Daniell, par pied de distance entre les électrodes.

CHAPITRE V.

POLARISATION ÉLECTROLYTIQUE.

264. Lorsque l'on fait passer un courant électrique dans une électrolyte entre des électrodes métalliques, l'accumulation des ions sur les électrodes produit le phénomène appelé *polarisation,* lequel consiste dans le développement d'une force électromotrice agissant en sens inverse du courant et produisant une augmentation apparente de résistance.

Si l'on emploie un courant continu, la résistance semble augmenter rapidement à partir du moment où commence le courant et finit par atteindre une valeur à peu près constante. Si l'on change la forme du vase qui contient l'électrolyte, la résistance est modifiée, de même qu'un changement analogue dans la forme d'un conducteur métallique modifierait sa résistance; mais, en outre, il faut toujours ajouter à la résistance vraie de l'électrolyte une résistance apparente dépendant de la nature des électrodes.

265. Ces phénomènes ont conduit quelques personnes à supposer qu'il faut une force électromotrice finie pour faire passer un courant à travers un électrolyte. Mais il a été démontré, par les recherches de Lenz, de Neumann, de Beetz, de Wiedemann (1), de Paalzow (2), et, récemment par celles de MM. F. Kohlrausch et W. A. Nippoldt (3), que la conduction se fait dans l'électrolyte même, avec autant de précision que dans les conducteurs métalliques, et que cette résistance apparente que l'on observe à la surface de séparation des électrodes et de l'électrolyte est entièrement due à la polarisation.

266. Le phénomène appelé *polarisation* consiste, dans le cas d'un courant continu, en une diminution d'intensité, ce qui accuse l'existence d'une force s'opposant au passage du courant. La résistance se manifeste aussi comme une force opposée au courant; mais il est aisé

(1) *Galvanismus,* vol. I.
(2) *Monatsbericht,* Berlin, juillet 1868.
(3) *Pogg. Ann.,* vol. CXXXVIII, p. 286, octobre 1869.

de distinguer les deux phénomènes, en supprimant ou en inversant brusquement la force électromotrice.

La force de résistance est toujours dirigée en sens inverse du courant : la force électromotrice nécessaire pour la surmonter est proportionnelle à l'intensité du courant, et change de sens si l'on change le sens du courant. Si la force électromotrice extérieure devient nulle, le courant s'arrête purement et simplement.

Au contraire, la force électromotrice de polarisation a une direction fixe, en sens inverse du courant qui l'a produite. Si l'on supprime la force électromotrice qui produisait le courant, la polarisation donne lieu à un courant de sens inverse.

On peut comparer la différence entre ces deux phénomènes à la différence qu'il y a entre refouler de l'eau à travers un long tube capillaire et refouler de l'eau dans un réservoir par un tuyau de longueur modérée. Dans le premier cas, si l'on supprime la pression qui produit l'écoulement, le courant s'arrête, et c'est tout. Dans le second cas, si l'on supprime la pression, l'eau se met à refluer en dehors du réservoir.

Pour rendre plus complète cette analogie mécanique, il suffit de supposer que le réservoir a une médiocre profondeur, de façon qu'il déborde dès qu'on y a refoulé une certaine quantité d'eau. On représente ainsi ce fait, qu'il y a une valeur maximum de la force électromotrice totale de polarisation.

267. La cause de la polarisation paraît être la présence sur les électrodes des produits de décomposition électrolytique du fluide interposé. Les surfaces des électrodes sont ainsi rendues électriquement dissemblables, et il s'établit entre elles une force électromotrice dont la direction est opposée à celle du courant qui a produit la polarisation.

Les ions, dont la présence sur les électrodes produit les phénomènes de polarisation, ne sont pas dans un état de liberté parfaite, mais adhèrent aux électrodes avec une très grande force.

La force électromotrice de polarisation dépend de la densité du dépôt d'ion qui recouvre l'électrode; mais elle n'est pas proportionnelle à cette densité et ne croît pas aussi rapidement.

Le dépôt d'ion tend constamment à devenir libre et, alors, à se diffuser dans le liquide, ou à s'échapper à l'état gazeux, ou à se précipiter sous forme solide.

Cette polarisation se détruit avec une vitesse très faible pour les polarisations faibles, très rapidement pour les valeurs voisines de la limite de polarisation.

208. Nous avons vu, au § 202, que la force électromotrice qui intervient dans une électrolyse est numériquement égale à l'équivalent mécanique de cette opération évalué pour un équivalent électrochimique de la substance. Si l'opération correspond à une diminution de l'énergie intérieure de la substance soumise à l'opération, comme c'est le cas dans la pile voltaïque, la force électromotrice est dans le sens du courant. Mais, si l'opération détermine un accroissement de l'énergie intérieure des substances, comme c'est le cas dans un voltamètre, la force électromotrice est en sens inverse de celle du courant, et on l'appelle *force électromotrice de polarisation*.

Dans le cas d'un courant constant, qui produit continuellement une électrolyse où les ions se séparent à l'état de liberté sur les électrodes, nous n'avons qu'à mesurer par une méthode convenable l'énergie intérieure des ions séparés et à la comparer à celle de l'électrolyte, et nous pourrons calculer la force électromotrice nécessaire pour produire l'électrolyse. On a ainsi la polarisation maximum.

Mais, dans les premiers moments de l'électrolyse, les ions qui se déposent aux électrodes ne sont pas à l'état de liberté; leur énergie intérieure est moindre que quand ils sont libres et plus grande que quand ils sont combinés dans l'électrolyte. En fait, tant que le dépôt de l'ion sur l'électrode est très mince, l'ion se trouve dans un état comparable à celui d'une combinaison chimique avec l'électrode; à mesure que le dépôt augmente de densité, les portions successives ne sont plus si intimement combinées avec l'électrode, mais sont simplement adhérentes; et, à la fin, le dépôt s'échappe en bulles s'il est gazeux, se diffuse dans l'électrolyte s'il est liquide, forme un précipité s'il est solide.

En étudiant la polarisation, nous avons donc à considérer :

1° La densité superficielle du dépôt, que nous pouvons appeler σ. La quantité σ représente le nombre d'équivalents électrochimiques de l'ion déposés sur l'unité de surface. Et puisque chaque équivalent électrochimique déposé correspond à une unité d'électricité transmise par le courant, nous pouvons considérer σ comme représentant une densité superficielle de matière ou bien d'électricité.

2° La force électromotrice de polarisation, que nous pouvons appeler p. Cette quantité p est la différence des potentiels électriques des deux électrodes, lorsque le courant qui traverse l'électrolyte est si faible que la résistance propre de l'électrolyte ne donne lieu à aucune différence sensible entre ces potentiels.

A chaque instant, la force électromotrice p est égale numériquement à l'équivalent mécanique de l'opération électrolytique qui se

produit à cet instant, cette opération portant sur un équivalent électrochimique de l'électrolyte. Cette opération électrolytique consiste, on doit s'en souvenir, dans le dépôt des ions sur les électrodes, et l'état dans lequel se déposent ces ions dépend de l'état actuel des surfaces des électrodes, lesquelles peuvent avoir été modifiées par des dépôts antérieurs.

Donc, à chaque instant, la force électromotrice dépend de l'histoire antérieure de l'électrode. Plus exactement, elle est une fonction de la densité superficielle σ du dépôt, telle que $p = 0$ quand $\sigma = 0$; mais p approche de la limite bien plus rapidement que σ. D'ailleurs, il ne saurait être exact de dire que p est une fonction de σ; il serait plus correct de dire que p est une fonction de l'état chimique de la couche extérieure du dépôt, état qui est lié à la densité du dépôt par une loi où intervient le temps.

269. 3° La troisième chose dont nous devons tenir compte est la dissipation de la polarisation. Lorsque la polarisation est laissée à elle-même (1), elle décroît avec une vitesse qui dépend, en partie, de l'intensité de polarisation, c'est-à-dire de la densité du dépôt, en partie de la nature du milieu environnant, et des actions chimiques, mécaniques ou thermiques auxquelles est exposée la surface de l'électrode.

Si nous déterminons un temps T, tel qu'à la vitesse où se dissipe le dépôt il soit dissipé en entier dans le temps T, nous pouvons appeler T le module de durée de la dissipation. Si la densité du dépôt est très faible, T est très grand et peut s'évaluer en jours et en mois; si la densité du dépôt approche de sa valeur limite, T décroît très rapidement et n'est probablement qu'une petite fraction de seconde. En fait, la vitesse de dissipation augmente si rapidement que, la force du courant étant maintenue constante, les gaz provenant de la décomposition, au lieu de contribuer à augmenter la densité du dépôt, s'échappent en bulles à mesure qu'ils se forment.

270. Il y a donc une grande différence dans l'état de polarisation des électrodes d'un voltamètre, suivant que la polarisation est faible ou qu'elle atteint sa valeur maximum. Par exemple, si l'on dispose en série un certain nombre de voltamètres à électrodes de platine, renfermant de l'acide sulfurique étendu, et si l'on fait agir sur ce circuit une force électromotrice faible, comme celle d'un élément Daniell,

(1) C'est-à-dire les électrodes préalablement polarisées et abandonnées à elles-mêmes à circuit ouvert. [P.]

cette force électromotrice ne produira qu'un courant de très courte durée; car, au bout d'un temps très court, la force électromotrice, due à la polarisation des voltamètres, fera équilibre à celle de l'élément Daniell.

Dans le cas d'une polarisation aussi faible, la dissipation est très faible et se produit très lentement par absorption et diffusion des gaz dans le liquide. Le quantum de cette dissipation est indiqué par le courant extrêmement faible qui continue de passer sans que l'on voie se séparer aucun gaz.

Si nous négligeons cette dissipation pour la courte durée pendant laquelle s'établit l'état de polarisation, et si nous appelons Q la quantité totale d'électricité transportée pendant ce temps par le courant, et si nous désignons par A la surface d'une des électrodes et par σ la densité du dépôt supposé uniforme,

$$Q = A\sigma.$$

Si maintenant nous détachons de la pile Daniell les électrodes de ce système électrolytique, pour les relier à un galvanomètre susceptible de mesurer la décharge totale qui le traverse, une quantité d'électricité à peu près égale à Q aura passé dans la décharge quand la polarisation aura disparu.

271. On peut donc comparer l'action d'un appareil de ce genre, qui est une forme de la pile secondaire de Ritter, avec l'action d'une bouteille de Leyde.

La pile secondaire et la bouteille de Leyde peuvent toutes deux être chargées d'une certaine quantité d'électricité et en être ensuite déchargées. Pendant la décharge, il passe une quantité d'électricité à peu près égale à la charge, mais en sens inverse. La différence entre la charge et la décharge est due en partie à la dissipation, phénomène très lent dans le cas des petites charges, mais qui devient extrêmement rapide lorsque la charge dépasse une certaine limite. Elle tient encore au fait suivant : lorsque les électrodes ont été reliées assez longtemps pour produire une décharge en apparence complète, qu'on les sépare quelque temps et qu'on les relie de nouveau, on obtient une seconde décharge dans la même direction que la première. C'est ce qu'on appelle la *décharge résiduelle,* phénomène commun à la bouteille de Leyde et à la pile secondaire.

La pile secondaire peut donc être comparée, à divers égards, à la bouteille de Leyde : mais il y a certaines différences importantes. La charge d'une bouteille de Leyde est très exactement proportionnelle

à la force électromotrice de charge, c'est-à-dire à la différence de potentiels des deux surfaces, et l'on appelle *capacité de la bouteille* une quantité constante qui est la charge correspondant à l'unité de force électromotrice. La quantité correspondante, que l'on pourrait appeler la *capacité de la pile secondaire*, croît lorsque la force électromotrice augmente.

La capacité de la bouteille de Leyde dépend de l'aire des surfaces opposées, de leur écartement, de la nature de la substance qui les sépare, mais non de la nature des surfaces métalliques elles-mêmes. La capacité de la pile secondaire dépend de l'aire des électrodes, mais non de leur distance; elle dépend de la nature des surfaces de ces électrodes, aussi bien que de la nature du fluide qui les sépare. La différence de potentiels maximum qui peut subsister entre les électrodes d'un élément de pile secondaire est faible, si on la compare à la différence de potentiels maximum qui peut exister entre les armatures d'une bouteille de Leyde chargée : par suite, pour avoir une force électromotrice considérable, il faut employer une pile d'un grand nombre d'éléments.

D'autre part, dans la pile secondaire la densité superficielle de la charge est énormément plus considérable que la plus grande densité superficielle des charges que l'on peut accumuler sur la surface d'une bouteille de Leyde : c'est à ce point que M. C.-F. Varley (1), décrivant la construction d'un condensateur de grande capacité, recommande une série de feuilles d'or ou de platine plongées dans un acide étendu, comme bien préférables, au point de vue du bon marché, à des feuilles d'étain séparées par une matière isolante et agissant par induction.

La forme sous laquelle s'accumule l'énergie dans une bouteille de Leyde est un état de contrainte du diélectrique compris entre les surfaces conductrices, état que j'ai déjà décrit sous le nom de *polarisation électrique;* et, en signalant les phénomènes relatifs à cet état actuellement connus, je faisais remarquer combien est imparfaite notre connaissance de ce qui se passe en réalité (*voir* § 62 et 111).

L'énergie accumulée dans la pile secondaire réside dans l'état chimique de la couche matérielle répandue à la surface des électrodes. Cette couche est formée par les ions de l'électrolyte et par la substance même de l'électrode, unis dans une relation qui varie de la combinaison chimique à la condensation superficielle, l'adhérence mécanique ou la simple juxtaposition.

---

(1) Spécification de C.-F. Varley : *Electric Telegraphs,* etc.; janvier 1860.

Le siége de cette énergie est près de la surface des électrodes, non dans la masse entière de l'électrolyte : la forme sous laquelle elle existe peut être appelée *polarisation électrolytique*.

Après avoir étudié les rapports de la pile secondaire et de la bouteille de Leyde, le lecteur pourra aussi comparer la pile voltaïque à quelque forme de machine électrique, celle décrite au § 211, par exemple.

M. Varley (1) a trouvé dernièrement que la capacité d'un pouce carré de platine plongé dans l'acide sulfurique étendu varie de 175 à 542 microfarads, et au delà, et que cette capacité croît avec la force électromotrice, étant d'environ 175 pour 0,02 daniell, et de 542 pour 1,6 daniell.

Mais on peut pousser plus loin la comparaison de la pile secondaire et de la bouteille de Leyde, comme dans l'expérience suivante, due à Buff (2). C'est seulement quand il est froid que le verre de la bouteille est susceptible de retenir une charge. Le verre devient conducteur à une température inférieure à 100°C. Si, dans un vase de mercure, on place un tube à essais renfermant du mercure et qu'on relie deux électrodes, l'une au mercure intérieur, l'autre au mercure extérieur, cette disposition constitue une bouteille de Leyde qui, aux températures ordinaires, garde sa charge. Si les électrodes sont reliées à une pile voltaïque, il ne passe aucun courant tant que le verre est froid; mais, si l'on chauffe graduellement l'appareil, il commence à passer un courant, dont l'intensité croît rapidement à mesure que la température s'élève, quoique le verre reste, en apparence, aussi dur que jamais.

Ce courant est certainement électrolytique; car, si l'on détache les électrodes de la pile et qu'on les relie à un galvanomètre, il passe un courant inverse considérable, dû à la polarisation des surfaces du verre.

Si, pendant que la pile agit, on refroidit l'appareil, le verre froid arrête le courant comme précédemment, mais la polarisation des surfaces subsiste. On peut enlever le mercure, laver les surfaces à l'acide nitrique et à l'eau, introduire de nouveau mercure. Si alors on chauffe l'appareil, le courant de polarisation apparaît aussitôt que le verre est assez chaud pour le conduire.

Nous pouvons donc considérer le verre à 100°C. comme un électro-

---

(1) *Proc. R. S.*, 12 janvier 1871.

(2) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, vol. XC, p. 257; 1854.

lyte, quoiqu'il paraisse solide, et il y a de fortes raisons de croire que, dans la plupart des cas où un diélectrique manifeste un faible degré de conductibilité, le conducteur est électrolytique. L'existence de la polarisation peut être regardée comme une preuve concluante d'électrolyse, et, si la conductibilité d'une substance croît à mesure que la température s'élève, nous sommes bien fondés à supposer que la conduction est électrolytique.

Des éléments voltaïques constants.

272. Si l'on fait une série d'expériences avec une pile voltaïque, dans laquelle se produit de la polarisation, cette polarisation diminue pendant le temps que le courant ne circule pas; le courant est donc plus fort quand il commence à passer de nouveau que quand il circule déjà depuis un certain temps; si, d'autre part, on diminue la résistance du circuit en faisant passer le courant dans une dérivation à faible résistance, lorsqu'on envoie de nouveau le courant dans le circuit ordinaire, ce courant a d'abord une force inférieure à sa force normale, en raison de la forte polarisation qui résulte de l'emploi d'un court circuit.

Pour éliminer ces irrégularités du courant, extrêmement gênantes dans les expériences qui comportent des mesures exactes, il est nécessaire de supprimer la polarisation ou, du moins, de la réduire autant que possible.

Il ne semble pas qu'il y ait une forte polarisation à la surface de la lame de zinc, quand elle est plongée dans une solution de sulfate de zinc ou dans de l'acide sulfurique étendu. C'est à la surface du métal négatif qu'est le siège principal de la polarisation. Lorsque le liquide dans lequel est plongé le métal négatif est de l'acide sulfurique étendu, on voit le métal négatif se couvrir de bulles d'hydrogène provenant de la décomposition électrolytique du liquide : il est clair que ces bulles, en empêchant le liquide de toucher le métal, diminuent la surface de contact et augmentent la résistance du circuit. Mais, en outre de ces bulles visibles, il y a certainement une couche mince d'hydrogène adhérent au métal, dans un état qui n'est sans doute pas celui de liberté; et, comme nous avons vu que cette couche est susceptible de produire une force électromotrice en sens inverse, elle doit nécessairement diminuer la force électromotrice de la pile.

On a adopté différents moyens pour se débarrasser de cette couche d'hydrogène. On peut la réduire, dans une certaine mesure, par des moyens mécaniques, en agitant le liquide, en frottant la surface de la

plaque négative. Dans la pile de Smée, les plaques négatives sont verticales et couvertes de platine finement divisé, duquel les bulles d'hydrogène se détachent aisément : dans leur mouvement ascendant, elles déterminent dans le liquide un courant qui aide à balayer les autres bulles à mesure qu'elles se forment.

Une méthode bien plus efficace consiste dans l'emploi de moyens chimiques. Il y en a de deux sortes. Dans les piles de Bunsen et de Grove, les plaques négatives sont plongées dans un liquide riche en oxygène, auquel l'hydrogène se combine, au lieu de former une couche sur la plaque. Dans la pile de Grove, la plaque est en platine et plonge dans de l'acide nitrique fort. Dans la première pile de Bunsen, la plaque est en charbon et plonge dans le même acide. On emploie aussi pour le même usage l'acide chromique, qui a l'avantage de ne point émettre de vapeurs acides comme celles que produit la réduction de l'acide nitrique.

Un autre moyen de se débarrasser de l'hydrogène consiste à employer le cuivre comme métal négatif et à couvrir sa surface d'une couche d'oxyde. Mais cet oxyde disparaît rapidement quand on emploie le métal comme électrode négative. Pour le renouveler, Joule propose de donner aux plaques de cuivre la forme de disques à demi plongés dans le liquide et tournant lentement, de façon que l'air puisse agir sur les parties qui lui sont successivement exposées.

L'autre méthode est d'employer comme liquide un électrolyte dont le cation soit fortement négatif par rapport au zinc.

Dans la pile Daniell, une plaque de cuivre plonge dans une solution saturée de sulfate de cuivre. Lorsque le courant traverse la solution du zinc au cuivre, il n'apparaît pas d'hydrogène sur la plaque de cuivre, mais il s'y dépose du cuivre. Lorsque la solution est saturée et que le courant n'est pas trop énergique, le cuivre paraît agir comme un véritable cation, et l'anion SO^4 s'achemine vers le zinc.

Si ces conditions ne sont pas remplies, de l'hydrogène se dégage à la cathode, mais aussitôt il réagit sur la solution, précipite le cuivre et s'unit à SO^4 pour former de l'acide sulfurique. Lorsque les choses se passent ainsi, le sulfate de cuivre est remplacé auprès de la cathode par de l'acide sulfurique, le liquide se décolore, et la polarisation par l'hydrogène se produit de nouveau. Le cuivre ainsi déposé a une structure plus lâche et plus friable que le cuivre déposé par électrolyse proprement dite.

Pour être assuré que le liquide en contact avec le cuivre est toujours saturé de sulfate de cuivre, il faut mettre dans la solution, près du cuivre, des cristaux de sulfate de cuivre ; alors, si la solution se

dilue par dépôt d'une partie du cuivre, il se dissout une plus grande quantité de cristaux.

Nous avons vu qu'il est nécessaire que le liquide voisin du cuivre soit saturé de sulfate de cuivre. Il est encore plus essentiel que le liquide dans lequel plonge le zinc soit exempt de sulfate de cuivre. Si une trace de ce sel se fait jour jusqu'à la surface du zinc, elle y est aussitôt réduite, et du cuivre se dépose sur le zinc. Le zinc, ce cuivre et le liquide forment alors un court circuit où l'électrolyse marche très vite, et le zinc est rongé dans une action qui ne contribue en rien à l'effet utile de la pile.

Pour prévenir cet inconvénient, le zinc est plongé dans une solution d'acide sulfurique étendu ou de sulfate de zinc; et, pour empêcher la solution de sulfate de cuivre de se mêler à l'autre liquide, les deux liquides sont séparés par une cloison formée d'une vessie ou d'un vase de terre poreux, à travers lequel l'électrolyse peut se faire librement, mais qui empêche d'une manière efficace le mélange des liquides par des courants visibles.

Dans quelques piles, on emploie la sciure de bois pour empêcher le mélange par les courants. Mais les expériences de Graham prouvent que la diffusion s'opère presque aussi vite, que les liquides soient séparés par une cloison de ce genre ou qu'ils soient en contact direct, pourvu qu'il n'y ait pas de courants visibles : il est probable, d'ailleurs, que si l'on emploie une cloison qui retarde la diffusion, on accroît d'autant la résistance de l'élément, car la conduction électrolytique est un phénomène dont les lois mathématiques sont exactement les mêmes que celles de la diffusion, et tout ce qui contrarie l'une doit contrarier l'autre. La seule différence est que la diffusion se produit constamment, tandis que le courant ne passe que quand la pile fonctionne.

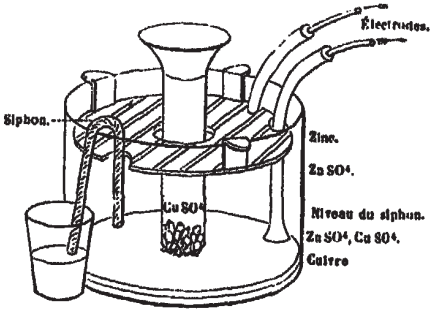
Dans toutes les formes des piles Daniell, le résultat final est que le sulfate de cuivre se fait jour jusqu'au zinc et détériore la pile. Pour retarder indéfiniment ce résultat, Sir W. Thomson (1) a construit une pile Daniell de la forme suivante (*fig.* 22).

Dans chaque élément, la plaque de cuivre est couchée horizontalement au fond du vase : on verse par-dessus une solution concentrée de sulfate de zinc. Le zinc est en forme de gril, et se trouve placé horizontalement près de la surface du liquide. Un tube de verre est placé verticalement dans la solution, son ouverture inférieure juste au-dessus de la plaque de cuivre. On jette dans ce tube des cristaux de

(1) *Proc. R. S.*, 19 janvier 1871.

sulfate de cuivre qui, se dissolvant, forment une solution plus dense que celle du sulfate de zinc pur : celui-ci ne peut donc arriver au zinc que par diffusion. Pour retarder ce phénomène de diffusion, on prend un siphon formé d'un tube de verre qui contient une mèche de coton, et on place une de ses extrémités à mi-distance du zinc et du cuivre, et l'autre dans un vase extérieur à l'élément, de sorte que le liquide est aspiré très lentement vers le milieu de sa hauteur. Pour le remplacer, on ajoute par le haut, quand il en est besoin, de l'eau ou une solution faible de sulfate de zinc. De cette façon, la plus grande partie du sulfate de cuivre qui s'élève dans le liquide par diffusion est aspirée avant d'atteindre le zinc; et le zinc est entouré d'une solution à peu près pure de sulfate de zinc, animé d'un mouvement très lent vers le bas du vase, ce qui retarde encore le mouvement d'ascension du sulfate de cuivre. Pendant que la pile fonctionne, du cuivre se dépose sur la plaque de cuivre, et SO^4 chemine lentement à tra-

Fig. 22.



vers le liquide jusqu'au zinc avec lequel il se combine, en formant du sulfate de zinc. Ainsi le liquide du fond devient moins dense par dépôt de cuivre, et celui de la surface devient plus dense par addition de zinc. Pour empêcher cette action de changer l'ordre de densité des couches et de produire ainsi de l'instabilité et des courants visibles dans le vase, on doit prendre soin de tenir le tube bien garni de cristaux de sulfate de cuivre, et de n'alimenter la pile qu'avec une solution de sulfate de zinc assez étendue pour être plus légère qu'aucune des autres couches liquides de la pile.

La pile Daniell est loin d'être la plus énergique de celles dont on se sert habituellement. La force électromotrice d'une pile de Grove est

de 192 000 000, celle d'un Daniell de 107 000 000, et celle d'un Bunsen de 188 000 000.

La résistance d'un Daniell est généralement plus grande que celle d'un Grove ou d'un Bunsen de mêmes dimensions.

Mais ces défauts sont plus que compensés dans tous les cas où il faut des mesures exactes, parce que la pile Daniell est supérieure à toute autre disposition connue, comme constance de la force électromotrice. Elle a aussi l'avantage de se maintenir longtemps en bon état de fonctionnement, et de ne point émettre de gaz.

CHAPITRE VI.

COURANTS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES.

Des systèmes de conducteurs linéaires.

273. Tout conducteur peut être traité comme un conducteur linéaire, s'il est ainsi disposé que le courant passe toujours de la même manière entre deux portions de sa surface appelées ses électrodes. Par exemple, on peut traiter comme un conducteur linéaire une masse de métal dont la surface est couverte d'une substance isolante en tous ses points, sauf deux par lesquels la surface libre du conducteur est en contact métallique avec deux électrodes faites d'une substance parfaitement conductrice. Car, si le courant entre par une de ces électrodes et sort par l'autre, les lignes de flux sont déterminées, et la relation entre la force électromotrice, l'intensité et la résistance est exprimée par la loi de Ohm, car l'intensité en chaque point de la masse est une fonction linéaire de E. Mais, s'il y a plus de deux électrodes, le conducteur peut être traversé par plusieurs courants indépendants qui peuvent n'être pas conjugués l'un à l'autre. (*Voir* au § 282.)

Loi de Ohm.

274. Soit E la force électromotrice qui agit dans un conducteur linéaire entre l'électrode A_1 et l'électrode A_2 (*voir* § 69). Soit C l'intensité du courant électrique dans le conducteur, c'est-à-dire le nombre C d'unités d'électricité qui traversent chaque section du conducteur dans la direction A_1A_2 par unité de temps; soit enfin R la résistance du conducteur : la loi de Ohm a pour expression

$$E = CR. \tag{1}$$

Conducteurs linéaires disposés en série.

275. Soient A_1, A_2 les électrodes du premier conducteur; plaçons le second conducteur de façon qu'une de ses électrodes soit en contact avec A_2, en sorte que les électrodes du second conducteur soient A_2 et A_3. Désignons par A_3 et A_4 les électrodes du troisième conducteur.

Désignons par E_{12}, E_{23}, E_{34} les forces électromotrices qui agissent le long de ces conducteurs, et de même pour les autres.

Soient

$$R_{12},\ R_{23},\ R_{34},\ \ldots$$

les résistances des conducteurs. Alors, puisque tous ces conducteurs sont disposés en série, en sorte qu'un même courant C les traverse tous, on a, d'après la loi de Ohm,

$$(2) \qquad E_{12} = CR_{12},\quad E_{23} = CR_{23},\quad E_{34} = CR_{34}.$$

Si E est la force électromotrice résultante et R la résistance totale du système, on doit avoir, par la loi de Ohm,

$$(3) \qquad E = CR.$$

Or

$$(1) \qquad E = E_{12} + E_{23} + E_{34};$$

la somme des forces électromotrice est égale à

$$C(R_{12} + R_{23} + R_{34}),$$

d'après les équations (2). Comparant ce résultat à (3), nous trouvons

$$R = R_{12} + R_{23} + R_{34}.$$

La résistance d'une série de conducteurs est égale à la somme des résistances des conducteurs pris séparément.

Potentiel en un point de la série.

Soient A et B les électrodes de la série, B un point intermédiaire, a, c, b les potentiels respectifs de ces points. Soient R_1 la résistance de la partie comprise entre A et B, R_2 celle de la partie comprise entre B et C, R la résistance totale de A à C. Alors, puisque

$$a - b = R_1 C,\quad b - c = R_2 C,\quad a - c = RC,$$

le potentiel en B est

$$b = \frac{R_2 a + R_1 c}{R},$$

ce qui détermine le potentiel de B, quand on connaît les potentiels de A et de C.

Résistance d'un conducteur multiple.

276. Soit un certain nombre de conducteurs ABZ, ACZ, ADZ, dis-

posés côte à côte, de façon que leurs extrémités soient en contact avec les deux mêmes points A et Z. On voit alors qu'ils sont disposés en arc multiple.

Soient R_1, R_2, R_3 les résistances respectives de ces conducteurs; C_1, C_2, C_3 les intensités; R la résistance totale du conducteur multiple, et C l'intensité totale.

Puisque les potentiels sont les mêmes en A et en Z pour tous les conducteurs, la différence des potentiels est la même pour tous, et nous pouvons l'appeler E. Nous avons alors

$$E = C_1 R_1 = C_2 R_2 = C_3 R_3 = CR;$$

mais

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

d'où

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \tag{7}$$

c'est-à-dire que :

L'inverse de la résistance d'un conducteur multiple est égal à la somme des inverses des résistances des conducteurs partiels.

Si nous appelons conductibilité d'un conducteur l'inverse de sa résistance, nous pouvons dire que *la conductibilité d'un conducteur multiple est la somme des conductibilités des conducteurs partiels.*

Intensité dans une branche d'un conducteur multiple.

Des équations du paragraphe précédent, il ressort que, si C_i est l'intensité dans une des branches de l'arc multiple et R_i la résistance de cette branche,

$$C_i = C \frac{R}{R_i}, \tag{8}$$

où C est l'intensité totale, et R la résistance du conducteur multiple, telle qu'on vient de la déterminer.

Résistance longitudinale des conducteurs à section uniforme.

277. Soit ρ la résistance qu'un cube de la substance donnée présente au passage d'un courant parallèle à une de ses arêtes, le côté du cube étant égal à l'unité de longueur; on appelle ρ *la résistance spécifique de la substance sous l'unité de volume.*

Considérons maintenant un conducteur prismatique, fait de la même

matière, de longueur l et de section égale à l'unité. Il est équivalent à l cubes disposés en série ; sa résistance est donc $l\rho$.

Enfin, considérons un conducteur de longueur l et de section uniforme s. Il est équivalent à s conducteurs semblables au précédent, disposés en arc multiple : sa résistance est donc

$$R = \frac{l\rho}{s}.$$

Si nous connaissons la résistance d'un fil uniforme et si nous pouvons mesurer sa longueur et sa section, nous pouvons mesurer la résistance spécifique de la substance dont il est fait.

Le moyen le plus exact de déterminer la section transversale des fils fins est de la calculer d'après la longueur, le poids et la densité de l'échantillon. Quelquefois il n'est pas aisé de déterminer la densité : alors on fait usage de la résistance du fil ayant l'unité de longueur et l'unité de masse : c'est ce qu'on appelle *la résistance spécifique sous l'unité de poids.*

Si r est cette résistance, l la longueur et m la masse d'un fil, on a

$$R = \frac{l^2 r}{m}.$$

Dimensions des quantités qui figurent dans ces équations.

278. La résistance d'un conducteur est le rapport de la force électromotrice qui agit sur lui à l'intensité produite. La conductibilité du conducteur est l'inverse de cette quantité, en d'autres termes, le rapport de l'intensité à la force électromotrice qui la produit.

Or nous savons que, dans le système de mesures électrostatiques, le rapport d'une quantité d'électricité au potentiel du conducteur sur lequel elle est répandue est la capacité du conducteur et a pour mesure une ligne. Si le conducteur est une sphère placée dans un champ illimité, cette ligne est le rayon même de la sphère.

Le rapport d'une quantité d'électricité à une force électromotrice est donc une ligne; mais le rapport d'une quantité d'électricité à une intensité est le temps pendant lequel passe le courant, pour transmettre cette quantité d'électricité. Donc le rapport d'une intensité à une force électromotrice est celui d'une ligne à un temps : c'est donc une vitesse.

Le fait que la conductibilité d'un conducteur est exprimée en mesure électrostatique par une vitesse peut être vérifié en supposant une sphère de rayon r, chargée au potentiel V et ensuite mise à la

terre par le conducteur donné. Faisons contracter la sphère, de façon que, l'électricité s'échappant par le conducteur, le potentiel de la sphère se maintienne toujours égal à V. A chaque instant la charge de la sphère est rV, et l'intensité du courant $\frac{d}{dt}(rV)$; mais, puisque V est constant, l'intensité est $V\frac{dr}{dt}$, et la force électromotrice qui agit à travers le conducteur est V.

La conductibilité du conducteur est le rapport de l'intensité à la force électromotrice, soit $\frac{dr}{dt}$, c'est-à-dire la *vitesse* avec laquelle doit diminuer le rayon de la sphère pour maintenir le potentiel constant, lorsque l'on fait passer la charge à la terre à travers le conducteur.

Donc, dans le système électrostatique, la conductibilité d'un conducteur est une vitesse, et ses dimensions sont $[LT^{-1}]$.

La résistance du conducteur a donc pour dimensions $[L^{-1}T]$.

La résistance spécifique par unité de volume a pour dimension $[T]$, et la conductibilité spécifique par unité de volume de dimension $[T^{-1}]$.

La grandeur numérique de ces coefficients ne dépend que de l'unité de temps qui est la même dans les différents pays.

La résistance spécifique par unité de poids a pour dimensions $[L^{-3}MT]$.

279. Nous trouverons plus tard que, dans le système de mesures électromagnétiques, la résistance d'un conducteur s'exprime par une vitesse, de sorte que dans ce système les dimensions de la résistance d'un conducteur sont $[LT^{-1}]$.

La conductibilité d'un conducteur est naturellement inverse de la résistance.

La résistance spécifique par unité de volume a, dans ce système, pour dimensions $[L^2T^{-1}]$, et la résistance spécifique par unité de poids a pour dimensions $[L^{-1}T^{-1}M]$.

Des systèmes de conducteurs linéaires, en général.

280. Le cas le plus général d'un système linéaire est celui de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, reliés deux à deux par $\frac{1}{2}n(n-1)$, conducteurs linéaires. Désignons par K_{pq} la conductibilité (ou l'inverse de la résistance) du conducteur qui relie deux points quelconques A_p et A_q; et par C_{pq} l'intensité du courant de A_p vers A_q. Soient P_p et P_q les potentiels électriques aux points A_p et A_q, et soit E_{pq} la force

électromotrice intérieure, s'il y en a une, qui agit le long du conducteur de A_p vers A_q.

L'intensité, de A_p vers A_q, est, d'après la loi de Ohm,

$$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q + E_{pq}). \tag{1}$$

Parmi ces quantités nous avons les séries de relations suivantes :

La conductibilité d'un conducteur est la même, quelle que soit la direction du courant, c'est-à-dire

$$K_{pq} = K_{qp}. \tag{2}$$

La force électromotrice et l'intensité sont des quantités dirigées, de sorte que

$$E_{pq} = -E_{qp} \quad \text{et} \quad C_{pq} = -C_{qp}. \tag{3}$$

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les potentiels en $A_1, A_2, \ldots, A_n$; et soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les quantités d'électricité qui pénètrent dans le système, dans l'unité de temps en chacun de ces points. Elles sont forcément soumises à la condition de continuité

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 0, \tag{4}$$

car l'électricité ne peut ni s'accumuler, ni se produire indéfiniment dans le système.

La condition de continuité en un point A_p est

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \ldots + C_{pn}. \tag{5}$$

Substituant ces valeurs des intensités dans les termes de l'équation (1), elle devient

$$\left\{\begin{aligned} Q_p = {} & (K_{p1} + K_{p2} + \ldots + K_{pn})P_p - (K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \ldots + K_{pn}P_n) \\ & + (K_{p1}E_{p1} + K_{p2}E_{p2} + \ldots + K_{pn}E_{pn}). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Le symbole K_{pp} ne paraît pas dans cette équation. Donnons-lui la valeur

$$K_{pp} = -(K_{p1} + K_{p2} + \ldots + K_{pn}), \tag{7}$$

c'est-à-dire supposons que K_{pp} soit égal et de signe contraire à la somme des conductibilités de tous les conducteurs qui se rencontrent en A_p. Nous pouvons alors écrire l'équation de continuité pour le point A_p

$$\left\{\begin{aligned} & K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + \ldots + K_{pp}P_p + \ldots + K_{pn}P_n \\ & = K_{p1}E_{p1} + \ldots + K_{pn}E_{pn} - Q_p. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

En substituant $1, 2, \ldots, n$ à p, dans cette équation, on obtient n équations de même forme, au moyen desquelles on peut déterminer les n potentiels $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Mais, si nous ajoutons les équations du système (8), le résultat est identiquement nul, d'après (3), (4) et (7); il n'y a donc que $n-1$ équations indépendantes, qui suffiront pour déterminer les différences de potentiel des points, mais non le potentiel absolu d'aucun deux. Cette connaissance n'est d'ailleurs pas nécessaire pour calculer les intensités du système.

Si nous désignons par D le déterminant

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1(n-1)} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2(n-1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K_{(n-1)1} & K_{(n-2)2} & \ldots & K_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix},$$

et par D_{pq} le mineur de K_{pq}, nous trouvons pour valeur de $P_p - P_n$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} (P_p - P_n)D = {} & (K_{11}E_{11} + \ldots - Q_1)D_{p1} + (K_{21}E_{21} + \ldots - Q_2)D_{p2} + \ldots \\ & + (K_{q1}E_{q1} + \ldots + K_{qn}E_{qn} - Q_n)D_{pq} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

On déterminerait de même l'excès de potentiel d'un autre point quelconque A_q sur le potentiel de A_p. On peut donc déterminer, par l'équation (1), l'intensité entre A_p et A_q, et le problème est complètement résolu.

281. Nous allons démontrer une propriété réciproque de deux conducteurs quelconques d'un système qui correspond à la propriété réciproque déjà démontrée en Électricité statique (*voir* § 88).

Le coefficient de Q_q dans l'expression de P_p est $\frac{D_{pq}}{D}$. Celui de Q_p, dans l'expression de P_q, est $\frac{D_{qp}}{D}$.

Or D_{pq} ne diffère de D_{qp} que par la substitution des symboles, tels que K_{pq} aux symboles K_{qp}. Mais ces deux symboles sont égaux, d'après l'équation (2), puisque la conductibilité d'un conducteur est la même dans les deux sens. Donc

$$(11) \qquad D_{pq} = D_{qp}.$$

Il résulte de là que la partie du potentiel de A_p qui est due à l'entrée d'un courant d'intensité 1 en A_q est égale à la partie du potentiel de A_q qui est due à l'entrée d'un courant d'intensité 1 en A_p.

De là, on peut déduire un énoncé plus aisé à appliquer de cette proposition.

Soient A, B, C, D quatre points quelconques d'un système, et supposons qu'un courant Q entrant dans le système en A et sortant en B ait pour effet d'établir un excès P du potentiel de C sur celui de D. Alors, si un courant égal Q entre dans le système en C et sort en D, le potentiel de A surpassera celui de B de la même quantité P.

Si une force électromotrice E, introduite dans le conducteur et agissant de A vers B, produit un courant C de X vers Y, la même force électromotrice E, introduite dans le conducteur entre X et Y, produira entre A et B un courant égal C.

La force électromotrice E peut être celle d'une pile voltaïque introduite entre les points désignés, pourvu que l'on ait soin que la résistance du conducteur soit la même, avant et après l'introduction de la pile.

282 *a*. Si une force électromotrice E_{pq} agit le long d'un conducteur A_pA_q, le courant produit dans un autre conducteur A_rA_s du système est, ainsi qu'on le trouve facilement,

$$\frac{K_{rs}K_{pq}E_{pq}(D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp})}{D}.$$

Il n'y a pas de courant si

$$D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp}=0. \tag{12}$$

Mais, d'après (11), la même équation subsistera si, la force électromotrice agissant suivant A_rA_s, il n'y a pas de courant dans A_pA_q. C'est en raison de cette relation réciproque que l'on dit que les deux conducteurs en question sont conjugués.

La théorie des conducteurs conjugués a été étudiée par Kirchhoff, qui a énoncé les conditions d'un système linéaire sous la forme suivante, où est évitée la considération du potentiel :

1° Condition de continuité : la somme de tous les courants qui convergent vers un point quelconque d'un système est nulle.

2° Dans tout circuit fermé, formé par des conducteurs, la somme des forces électromotrices, comptées en cheminant le long du circuit, est égale à la somme des produits des intensités dans chaque conducteur par la résistance de ces conducteurs.

On obtient ce résultat en additionnant les équations de la forme (1), relatives au circuit fermé : les potentiels disparaissent d'eux-mêmes

282 *b* (1). Si les fils conducteurs forment un réseau simple, et si nous supposons qu'un courant circule autour de chaque maille de ce réseau, le courant qui parcourt effectivement un fil appartenant à deux mailles consécutives est la différence des courants qui circulent dans les deux mailles, ces courants étant comptés positifs lorsqu'ils marchent en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Dans ce cas, il est facile d'établir la proposition suivante : Soient x l'intensité, E la force électromotrice et R la résistance totale pour une maille quelconque; soient $y, z, \ldots$ les courants qui circulent dans les mailles voisines ayant des parties communes avec la maille dans laquelle circule le courant x et soient $r, s, \ldots$ les résistances de ces parties communes. Alors

$$Rx - sy - tz - \ldots = E.$$

Pour montrer l'usage que l'on peut faire de cette règle, nous allons prendre la disposition connue sous le nom de *pont de Wheatstone,* en nous servant de la figure et des notations du § 347. Alors, en appliquant la règle aux trois circuits OBC, OCA, OAB, dans lesquels circulent les courants x, y, z, nous avons les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)x \quad & -\gamma y \quad & -\beta z = E, \\ -\gamma x + (b+\gamma+\alpha)y \quad & & -\alpha z = 0, \\ -\beta x \quad & -\alpha y + (c+\alpha+\beta)z = 0. \end{aligned}$$

D'après ces équations, on peut déterminer la valeur de $x - y$, qui est le courant dans la branche OA où est le galvanomètre; mais on renvoie le lecteur aux § 347 et suivants, où sont discutées cette questions et d'autres relatives au pont de Wheatstone.

Chaleur développée dans le système.

283. D'après le § 242, l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur développée par un courant C, passant pendant l'unité de temps dans un conducteur de résistance, est

$$JH = RC^2. \tag{13}$$

Nous avons donc à déterminer la somme des quantités telles que RC^2 pour tous les conducteurs du système.

---

(1) Tiré des Notes prises, au cours du professeur Maxwell, par M. J.-A. Fleming, B. A., St John's College.

Pour le conducteur qui va de A_p à A_q, la conductibilité est K_{pq}, et la résistance R_{pq}, ou

$$K_{pq} R_{pq} = 1. \tag{14}$$

D'après la loi de Ohm, l'intensité dans ce conducteur est

$$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q). \tag{15}$$

Mais supposons que l'intensité ne soit pas donnée par la loi de Ohm, et soit égale à X_{pq}, ou

$$X_{pq} = C_{pq} + Y_{pq}. \tag{16}$$

Pour déterminer la chaleur développée dans le système, nous avons à trouver la somme de toutes les quantités telles que

$$R_{pq} X_{pq}^2,$$

c'est-à-dire

$$JH = \Sigma(R_{pq} C_{pq}^2 + 2 R_{pq} C_{pq} Y_{pq} + R_{pq} Y_{pq}^2). \tag{17}$$

Donnant à C_{pq} sa valeur et tenant compte de la relation entre R_{pq} et K_{pq}, il vient

$$\Sigma[(P_p - P_q)(C_{pq} + 2 Y_{pq}) + R_{pq} Y_{pq}^2]. \tag{18}$$

Or, C et X doivent satisfaire à la condition de continuité au point A_p : nous avons donc

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \ldots + C_{pn},$$
$$Q_p = X_{p1} + X_{p2} + \ldots + X_{pn}.$$

Par suite,

$$0 = Y_{p1} + Y_{p2} + \ldots + Y_{pn}.$$

Ajoutant donc tous les termes de (18), nous trouvons

$$\Sigma(R_{pq} X_{pq}^2) = \Sigma P_p Q_p + \Sigma R_{pq} Y_{pq}^2.$$

Or R est toujours positif, et Y^2 est essentiellement positif; le dernier terme de l'équation est donc essentiellement positif. Donc le premier membre est minimum quand Y est nul dans tous les conducteurs, c'est-à-dire quand l'intensité dans tous les conducteurs est celle qui répond à la loi de Ohm.

D'où le théorème suivant :

284. *Dans tout système de conducteurs qui ne renferme pas de forces électromotrices intérieures, la chaleur engendrée par des courants distribués conformément à la loi de Ohm est moindre que*

si les courants avaient été distribués de quelque autre manière compatible avec les conditions obligatoires d'arrivée et d'écoulement du courant.

La chaleur développée lorsque la loi de Ohm est satisfaite est mécaniquement équivalente à $\Sigma P_p Q_q$, c'est-à-dire à la somme des produits des quantités d'électricité fournies à chacune des électrodes extérieures, par le potentiel auquel sont fournies ces quantités d'électricité.

CHAPITRE VII.

CONDUCTION DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

Notation des courants électriques.

285. En un point quelconque, prenons un élément de surface dS normal à l'axe des x, et soit Q le nombre des unités d'électricité qui le traversent dans l'unité de temps, en allant du côté positif au côté négatif; si $\frac{Q}{dS}$ devient à la limite égal à u, lorsque dS décroît indéfiniment, on dit que u est la composante du courant électrique parallèle à l'axe des x au point donné.

On peut déterminer de même les composantes v et w du courant dans le sens des y et des z.

286. Pour déterminer la composante du courant dans une autre direction OR passant par le point O, soient l, m, n les cosinus directeurs de OR. Si nous prenons sur les axes des x, des y et des z des longueurs égales à

$$\frac{r}{l}, \frac{r}{m}, \frac{r}{n},$$

finissant en A, B, C, le plan du triangle ABC sera normal à OR.

L'aire du triangle ABC sera

$$dS = \frac{1}{2}\frac{r^2}{lmn},$$

et, si l'on fait décroître r, cette aire décroît indéfiniment.

La quantité d'électricité qui sort du tétraèdre ABCO par le triangle ABC doit être égale à la quantité qui entre par les trois autres triangles OBC, OCA, OAB.

L'aire du triangle OBC est $\frac{1}{2}\frac{r^2}{mn}$; la composante du courant normale à ce plan est u; la quantité d'électricité qui entre par le triangle est donc

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{u}{mn}.$$

Les quantités qui entrent par les triangles OCA et OAB sont

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{v}{nl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} r^2 \frac{w}{lm}.$$

Si γ est la composante du courant dans la direction de OR, la quantité qui sort du tétraèdre par le triangle ABC est

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\gamma}{lmn}.$$

Puisqu'elle est égale à la quantité qui entre par les trois autres triangles,

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\gamma}{lmn} = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{u}{mn} + \frac{v}{nl} + \frac{w}{lm} \right),$$

et, en multipliant par $\frac{2lmn}{r^2}$, nous avons

$$\gamma = lu + mv + nw. \tag{1}$$

Si nous posons

$$\Gamma^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

et que nous prenions l', m', n' tels que

$$u = l'\Gamma, \quad v = m'\Gamma, \quad w = n'\Gamma,$$

nous avons alors

$$\gamma = \Gamma(ll' + mm' + nn'), \tag{2}$$

Donc, si nous définissons l'intensité résultante comme étant un vecteur de grandeur Γ, dont les cosinus directeurs sont l', m', n'; et si γ est la composante de l'intensité dans une direction faisant l'angle θ avec la direction de l'intensité résultante

$$\gamma = \Gamma \cos\theta, \tag{3}$$

ce qui montre que la loi de composition des intensités est la même que celle des vitesses, des forces et de tous les autres vecteurs.

287. Soit à déterminer la condition pour qu'une surface donnée soit une surface de flux.

Soit

$$F(x, y, z) = \lambda \tag{4}$$

l'équation d'une famille de surfaces; on obtient l'une d'elles en parti-

culier en faisant λ constant; alors, si nous posons

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{N^2}, \tag{5}$$

les cosinus directeurs de la normale comptée dans le sens de l'accroissement de λ sont

$$l=N\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad m=N\frac{\partial\lambda}{\partial y},\quad n=N\frac{\partial\lambda}{\partial z}. \tag{6}$$

Donc, si γ est la composante de l'intensité normale à la surface,

$$\gamma=N\left(u\frac{\partial\lambda}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Si $\gamma=0$, il n'y a pas de courant à travers la surface, et la surface peut être appelée *surface de flux*, puisque le mouvement s'effectue suivant des lignes tracées sur cette surface.

288. L'équation d'une surface de flux est donc

$$u\frac{\partial\lambda}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0. \tag{8}$$

Si cette équation est vérifiée pour toutes les valeurs de λ, toutes les surfaces de cette famille sont des surfaces de flux.

289. Soit une autre famille de surfaces dont le paramètre est λ' : si ce sont aussi des surfaces de flux, nous aurons

$$u\frac{\partial\lambda'}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda'}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda'}{\partial z}=0. \tag{9}$$

S'il y a une troisième famille dont le paramètre soit λ'', on aura

$$u\frac{\partial\lambda''}{\partial x}+v\frac{\partial\lambda''}{\partial y}+w\frac{\partial\lambda''}{\partial z}=0. \tag{10}$$

En éliminant entre ces trois équations, u, v et w disparaissent, et il reste

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} & \frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda'}{\partial x} & \frac{\partial\lambda'}{\partial y} & \frac{\partial\lambda'}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda''}{\partial x} & \frac{\partial\lambda''}{\partial y} & \frac{\partial\lambda''}{\partial z} \end{vmatrix}=0, \tag{11}$$

c'est-à-dire que

$$\lambda' = \varphi(\lambda, \lambda'), \tag{12}$$

ou que λ' est une fonction de λ et de λ'.

290. Considérons les quatre surfaces dont les paramètres sont λ, $\lambda + \delta\lambda$, λ' et $\lambda' + \delta\lambda'$. Ces quatre surfaces comprennent un espace tubulaire à quatre faces, que l'on peut appeler $\delta\lambda.\delta\lambda'$. Puisque ce tube est limité par des surfaces à travers lesquelles il n'y a point d'écoulement, on peut l'appeler *un tube de flux*. Si nous prenons deux sections transversales de ce tube, la quantité qui pénètre dans le tube par une des sections doit être égale à celle qui sort par l'autre; et, puisque cette quantité est la même pour toutes les sections du tube, nous pouvons l'appeler $L\,\delta\lambda\,\delta\lambda'$, L étant une certaine fonction des paramètres λ et λ', qui définissent le tube particulier considéré.

291. Si l'on désigne par δS la section d'un tube du flux par un plan normal aux x, nous avons par la théorie des changements de variable indépendante

$$\delta\lambda\,\delta\lambda' = \delta S \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right), \tag{13}$$

et par la définition des composantes de l'intensité

$$u\,\delta S = L\,\delta\lambda\,\delta\lambda'; \tag{14}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} u &= L\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right) \\ &\text{et de même} \\ v &= L\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\lambda'}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right), \\ w &= L\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda'}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

292. Si l'on connaît l'une des deux fonctions λ ou λ', il est toujours possible de déterminer l'autre, de façon que L soit égal à l'unité. Par exemple, prenons le plan des yz, et traçons-y une série de lignes équidistantes représentant les sections par ce plan des surfaces de la famille λ'. En d'autres termes, déterminons la fonction λ' par la condition que, pour $x = 0$, $\lambda' = z$.

Si alors nous faisons L = 1 et, par suite, pour $x = 0$,

$$\lambda = \int u\, dy,$$

la quantité d'électricité qui passe à travers une portion quelconque du plan $x = 0$, sera

$$\iint u\, dy\, dz = \iint d\lambda\, d\lambda'. \tag{16}$$

Étant déterminée la nature des sections des surfaces de flux par le plan des yz, la forme des surfaces est déterminée en tout point par les conditions (8) et (9). Les deux fonctions λ et λ' ainsi déterminées suffisent à déterminer l'intensité en un point quelconque, au moyen des équations (15), où l'on a substitué l'unité à la place de L.

Des lignes de flux.

293. Considérons deux séries de valeurs de λ et de λ', telles que dans chaque série les différences successives soient égales à l'unité. Les deux séries de surfaces définies par ces valeurs divisent l'espace en un système de tubes à quatre faces, dans chacun desquels passe l'unité de courant. En prenant une unité suffisamment petite, on peut représenter au moyen de ces tubes toutes les particularités du courant avec telle exactitude que l'on veut. Ainsi l'intensité du courant qui traverse une surface quelconque rencontrant le système de tubes est exprimée par le nombre des tubes coupés, puisque chaque tube amène un courant d'intensité égale à l'unité.

Les intersections des surfaces peuvent être appelées *lignes de flux*. Si l'on prend une unité suffisamment petite, le nombre des lignes de flux qui rencontrent une surface est approximativement égal au nombre des tubes de flux qui coupent cette surface. On peut donc considérer les lignes de flux comme représentant non seulement la direction du courant, mais aussi son intensité, chacune des lignes de flux qui passent par une section donnée correspondant à un courant d'intensité égale à l'unité.

Des nappes de courants et des fonctions d'intensité.

294. On appelle *nappe de courant* la couche d'un conducteur qui est comprise entre deux surfaces de flux consécutives appartenant à un même système, soit λ'. Dans cette nappe, les tubes de flux sont déterminés par la fonction λ. Si λ_A et λ_P désignent les valeurs de λ aux

points A et P, l'intensité du courant qui va de droite à gauche à travers une ligne tracée sur la nappe entre A et P est $\lambda_P - \lambda_A$. Si AP est un élément ds d'une courbe tracée sur la nappe, le courant qui coupe cet élément de droite à gauche est

$$\frac{d\lambda}{ds}\,ds.$$

Cette fonction λ, qui détermine entièrement la distribution de l'intensité dans la nappe, est appelée *fonction d'intensité*.

Toute feuille mince de métal ou de matière conductrice, limitée sur ses deux faces par de l'air ou par quelque autre milieu non conducteur, peut être traité comme une nappe de courant, et la distribution de l'intensité peut y être exprimée au moyen d'une fonction d'intensité. (*Voir* § 647.)

Équation de continuité.

295. Si nous différentions les trois équations (15) par rapport à x, y et z respectivement, nous souvenant que L est une fonction de λ et λ' (1), nous trouvons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

L'équation correspondante en Hydrodynamique est appelée *équation de continuité*. La continuité qu'elle exprime est celle de l'existence; en d'autres termes, elle énonce ce fait qu'une substance matérielle ne peut partir d'un point de l'espace et arriver à un autre sans traverser tout l'espace intermédiaire. Elle ne peut simplement disparaître en un point, et paraître en un autre; mais il faut qu'elle suive un chemin continu, de sorte que, si l'on trace une surface fermée qui comprenne un des points et soit extérieure à l'autre, la substance matérielle ne peut passer d'un point à l'autre sans traverser la surface. La forme la plus générale de cette équation en Hydrodynamique est

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

où ρ désigne le rapport de la quantité de matière au volume qu'elle occupe, ce volume étant, dans le cas présent, un élément différen-

---

[(1) Il est inutile de passer par les fonctions λ, λ' pour établir l'équation (17); la notion de continuité a déjà été introduite § 286 pour déterminer γ et établir l'existence des fonctions λ et des surfaces de flux. P.]

tiel de volume; et ρu, ρv, ρw le rapport de la quantité de matière qui traverse un élément de surface dans l'unité de temps, à cet élément de surface, lequel est pris successivement normal aux axes des x, des y et des z. Ainsi entendue, l'équation s'applique à toute espèce de matière, solide ou fluide, animée d'un mouvement continu ou discontinu, pourvu que l'existence des parties de cette matière soit continue. Si quelque chose, même autre que de la matière, est soumis à cette condition de la continuité de son existence dans le temps et dans l'espace, cette condition est exprimée par l'équation. Dans d'autres parties de la Physique, dans la théorie des quantités électriques et magnétiques par exemple, on rencontre des équations de même forme que nous appellerons aussi des *équations de continuité* pour rappeler leur forme; sans que nous puissions attribuer aux quantités en question ni les propriétés de la matière, ni même une existence continue dans le temps et dans l'espace.

L'équation (17) à laquelle nous sommes arrivés, dans le cas des courants électriques, est identique à (18), si nous faisons $\rho = 1$, c'est-à-dire si nous supposons la substance homogène et incompressible. Dans le cas des fluides, l'équation peut s'établir par l'une ou l'autre des méthodes données dans les Traités d'Hydrodynamique. Dans une de ces méthodes, on suit la marche et la déformation d'un élément déterminé du liquide, pendant son mouvement. Dans l'autre, on fixe son attention sur un élément de l'espace, et l'on fait le compte de ce qui entre et de ce qui sort. La première de ces méthodes ne peut s'appliquer aux courants électriques, parce que nous ne savons pas avec quelle vitesse l'électricité se meut dans les corps, ni même si elle se meut dans le sens du courant positif ou du courant négatif. Tout ce que nous connaissons se réduit à la valeur algébrique de la quantité qui traverse l'unité d'aire pendant l'unité de temps, quantité qui correspond à (ρu) de l'équation (18). Nous n'avons pas le moyen de déterminer la valeur de l'un ou l'autre des facteurs ρ ou u, et, par suite, nous ne pouvons suivre une masse particulière d'électricité dans son mouvement à travers le corps. L'autre méthode de recherche, où on fait le compte de ce qui passe à travers les faces d'un élément de volume, s'applique aux courants électriques; et peut-être est-elle préférable, au point de vue de la forme, à celle que nous avons donnée; mais, comme on la trouve dans tous les Traités d'Hydrodynamique, il n'était pas nécessaire de la répéter ici.

Quantité d'électricité qui passe à travers une surface donnée.

290. Soit Γ l'intensité résultante en un point de la surface. Soient dS un élément de surface, et ε l'angle de Γ et de la normale à la surface; le courant total qui passe à travers la surface sera

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS,$$

l'intégration s'étendant sur toute la surface.

Comme au § 21, nous pouvons mettre cette intégrale sous la forme

$$\iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz, \tag{19}$$

si la surface est fermée, les limites de l'intégrale triple étant alors déterminées par la surface. C'est là une expression du flux total qui sort de la surface fermée. Comme dans tous les cas de courants permanents, cette quantité doit s'annuler, quelles que soient les limites de l'intégration, la quantité sous le signe $\int$ doit être égale à 0, et nous retrouvons ainsi l'équation de continuité (17).

CHAPITRE VIII.

RÉSISTANCE ET CONDUCTIBILITÉ DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

Des relations les plus générales entre l'intensité et la force électromotrice.

207. Soient u, v et w les composantes de l'intensité en un point quelconque.

Soient X, Y, Z les composantes de la force électromotrice.

La force électromotrice en un point est la force résultante qui agit sur une unité d'électricité positive placée en ce point; elle peut être due :

1° A une action électrostatique, auquel cas, V étant le potentiel, on a

$$(1) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

2° A l'induction électromagnétique dont les lois seront examinées plus loin;

3° A une action thermo-électrique ou électrochimique en ce point même, tendant à produire un courant de direction donnée.

Nous supposerons, en général, que X, Y, Z représentent les composantes de la force électromotrice résidant au point donné, quelle que soit l'origine de cette force; et nous examinerons, en particulier, ce que l'on obtient en supposant la force électromotrice uniquement due à une différence de potentiels.

D'après la loi de Ohm, l'intensité est proportionnelle à la force électromotrice. Donc X, Y et Z doivent être des fonctions linéaires de u, v et w. Nous pouvons donc prendre comme équations de résistance

$$(2) \qquad \begin{cases} X = R_1 u + Q_3 v + P_2 w, \\ Y = P_3 u + R_2 v + Q_1 w, \\ Z = Q_2 u + P_1 v + R_3 w. \end{cases}$$

Nous pouvons appeler les coefficients R coefficients de résistance longitudinale dans la direction des axes de coordonnées; et les coefficients P et Q coefficients de résistance transversale; ils indiquent la

force électromotrice qui doit agir dans une direction pour produire un courant dans une autre direction.

Si nous sommes libres de supposer qu'un solide peut être traité comme un système de conducteurs linéaires, il est aisé de faire voir, d'après la propriété réciproque de deux conducteurs d'un système linéaire (§ 281), que la force électromotrice dirigée suivant les x, qui est nécessaire pour donner l'unité d'intensité parallèlement aux y, est égale à la force électromotrice parallèle aux y nécessaire pour donner l'unité d'intensité dans la direction des x. Cela revient à démontrer que $P_1 = Q_1$, et de même que $P_2 = Q_2$ et $P_3 = Q_3$. Si ces conditions sont satisfaites, on dit que le système des coefficients est symétrique. Si elles ne le sont pas, on dit que le système est gauche.

Nous avons de fortes raisons de croire que le système est symétrique dans tous les cas qui se présentent en réalité; mais nous examinerons quelques-unes des conséquences qui résulteraient de l'hypothèse d'un système gauche.

298. Les quantités u, v, w peuvent s'exprimer comme fonctions linéaires de X, Y, Z, par un système d'équations que l'on peut appeler *équations de conductibilité*,

$$(3)\qquad \begin{cases} u = r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ v = q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ w = p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{cases}$$

Nous pouvons appeler les coefficients r coefficients de conductibilité longitudinale, et les coefficients p et q coefficients de conductibilité transversale.

Les coefficients de résistance sont les inverses des coefficients de conductibilité. Cette relation peut être définie comme il suit :

Soient [PQR] le déterminant des coefficients de résistance et $[pqr]$ celui des coefficients de conductibilité.

Alors

$$(4)\quad [PQR] = P_1P_2P_3 + Q_1Q_2Q_3 + R_1R_2R_3 - P_1Q_1R_1 - P_2Q_2R_2 - P_3Q_3R_3,$$

$$(5)\quad [pqr] = p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3 + r_1r_2r_3 - p_1q_1r_1 - p_2q_2r_2 - p_3q_3r_3,$$

$$(6)\qquad [PQR][pqr] = 1,$$

$$(7)\qquad \begin{cases} [PQR]p_1 = (P_2P_3 - Q_1R_1), & [pqr]P_1 = (p_2p_3 - q_1r_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Les autres équations s'obtiennent en faisant une formation circulaire des symboles P, Q, R, p, q, r, et des indices 1, 2 et 3.

Production de chaleur.

299. Pour trouver le travail accompli dans l'unité de temps par le courant qui surmonte une résistance et produit ainsi de la chaleur, nous multiplions les composantes de l'intensité par les composantes correspondantes de la force électromotrice. Nous obtenons ainsi les expressions suivantes de W, la quantité de travail dépensé dans l'unité de temps :

$$(8)\quad W = Xu + Yv + Zw,$$

$$(9)\quad = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2 + (P_1+Q_1)vw + (P_2+Q_2)wu + (P_3+Q_3)uv,$$

$$(10)\quad = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2 + (p_1+q_1)YZ + (p_2+q_2)ZX + (p_3+q_3)XY.$$

Par un choix d'axes convenables, on peut faire disparaître de l'une ou l'autre des deux dernières équations les termes contenant les rectangles de u, v, w ou de X, Y, Z. Mais le système d'axes qui ramène W à la forme

$$W = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2$$

n'est pas, en général, le même qui le réduit à la forme

$$W = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2.$$

Les deux systèmes d'axes ne coïncident que si les coefficients P_1, P_2, P_3 sont respectivement égaux à Q_1, Q_2, Q_3.

Si nous posons, avec Thomson [1],

$$(11)\quad \begin{cases} P = S + T, & Q = S - T, \\ p = s + t, & q = s - t, \end{cases}$$

nous avons

$$(12)\quad \begin{cases} [PQR] = R_1R_2R_3 + 2S_1S_2S_3 - S_1^2R_1 - S_2^2R_2 - S_3^2R_3 \\ \qquad + 2(S_1T_2T_3 + S_2T_3T_1 + S_3T_1T_2) + R_1T_1^2 + R_2T_2^2 + R_3T_3^2 \end{cases}$$

et

$$(13)\quad \begin{cases} [PQR]r_1 = R_2R_3 - S_1^2 + T_1^2, \\ [PQR]s_1 = T_2T_3 + S_2S_3 - R_1S_1, \\ [PQR]t_1 = -R_1T_1 + S_2T_3 + S_3T_2. \end{cases}$$

Si donc nous faisons disparaître S_1, S_2 et S_3, s_1 ne disparaîtra que si les coefficients T sont nuls.

---

[1] *Trans. R. S. Edin.*, 1853-54, p. 165.

Condition de stabilité.

300. Puisque l'équilibre électrique est stable, le travail dépensé pour entretenir le courant doit toujours être positif. La condition pour que W soit positif, est que les trois coefficients R_1, R_2, R_3 et les trois expressions

$$(14)\qquad \begin{cases} 4R_2R_3-(P_1+Q_1)^2, \\ 4R_3R_1-(P_2+Q_2)^2, \\ 4R_1R_2-(P_3+Q_3)^2 \end{cases}$$

soient positifs.

Il y a des conditions semblables pour les coefficients de conductibilité.

Équation de continuité dans un milieu homogène.

301. Si nous exprimons les composantes de la force électromotrice comme dérivées du potentiel V, l'équation de continuité

$$(15)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

devient, pour un milieu homogène,

$$(16)\quad r_1\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+r_2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+r_3\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+2s_1\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+2s_2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}+2s_3\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Si le milieu n'est pas homogène, il s'introduit des termes dus à la variation des coefficients de conductibilité quand on passe d'un point à un autre.

Cette équation correspond à l'équation de Laplace pour les milieux isotropes.

302. Si nous posons

$$(17)\qquad [rs]=r_1r_2r_3+2s_1s_2s_3-r_1s_1^2-r_2s_2^2-r_3s_3^2$$

et

$$(18)\qquad [AB]=A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2,$$

où

$$(19)\qquad \begin{cases} [rs]A_1=r_2r_3-s_1^2, \\ [rs]B_1=s_2s_3-r_1s_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

et ainsi de suite, le système A, B est inverse du système r, s; et si

nous posons

$$(20)\qquad A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2zx+2B_3xy=[AB]\rho^2,$$

nous trouvons que

$$(21)\qquad V=\frac{\sigma}{4\pi}\frac{1}{\rho}$$

est une solution de l'équation.

Si les coefficients T sont nuls, les coefficients A et B deviennent identiques à R et S. Mais ce n'est plus le cas si T n'est pas nul.

Donc, dans le cas où l'électricité s'écoule à partir d'un centre placé dans un milieu infini, homogène, mais non isotrope, les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes pour chacun desquels ρ est constant. Les axes de ces ellipsoïdes sont dirigés suivant les axes principaux de conductibilité, lesquels ne coïncident avec les axes principaux de résistance que si le système est symétrique.

En transformant cette équation, on peut prendre pour axes les axes principaux de conductibilité. Les coefficients de la forme s ou de la forme B se réduisent alors à zéro, et chacun des coefficients de la forme A est l'inverse du coefficient correspondant de la forme r. L'expression de ρ est

$$(22)\qquad \frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}=\frac{\rho^2}{r_1r_2r_3}.$$

303. La théorie du système complet des équations de résistance et de conductibilité est celle des fonctions linéaires à trois variables, dont on trouve des exemples dans la théorie des déformations élastiques (1) et dans d'autres branches de la Physique (2). La forme la plus convenable pour traiter cette théorie est celle que Hamilton et Tait appliquent aux fonctions linéaires et vectorielles d'un vecteur. Toutefois nous n'introduirons pas formellement la notation des quaternions.

On peut regarder les coefficients T_1, T_2 et T_3 comme les composantes rectangulaires d'un vecteur T, dont la grandeur absolue et la direction dans le corps sont fixes et indépendantes du choix des axes de coordonnées. La même chose est vraie de t_1, t_2 et t_3, composantes d'un autre vecteur t.

En général, les directions des vecteurs T et t ne coïncident pas.

---

(1) *Voir* Thomson et Tait, *Natural Philosophy*, § 154.

(2) [Ces équations sont identiques aussi à celles de la propagation de la chaleur. (Cf. Lamé, *Théorie de la chaleur.*) P.

Prenons l'axe des z, de façon qu'il coïncide avec le vecteur T, et transformons, en conséquence, les équations de résistance; elles prendront la forme

$$(23)\qquad \begin{cases} X = R_1 u + S_3 v + S_2 w - Tv, \\ Y = S_3 u + R_2 v + S_1 w + Tu, \\ Z = S_2 u + S_1 v + R_3 w. \end{cases}$$

De ces équations il résulte que nous pouvons considérer la force électromotrice comme la résultante de deux forces : l'une ne dépendant que des coefficients R et S, et l'autre ne dépendant que de T. La partie qui dépend de R et S est liée à l'intensité par la même relation qui existe entre la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent à un ellipsoïde et le rayon vecteur. L'autre partie, qui dépend de T, est égale au produit de T par la composante de l'intensité perpendiculaire à l'axe T; sa direction est perpendiculaire à l'axe T et à la composante de l'intensité, dans le sens où serait amenée cette composante par une rotation de 90° autour de T dans le sens positif.

Si nous considérons l'intensité et T comme des vecteurs, la partie de la force électromotrice due à T est la partie vectorielle du produit T × intensité.

Le coefficient T peut être appelé *coefficient de rotation*. Nous avons lieu de croire qu'il n'existe pour aucune substance connue. S'il existait quelque part, ce serait dans les aimants (1), qui ont dans une certaine direction une polarité due sans doute à quelque phénomène de rotation à l'intérieur de la substance.

304. Admettant qu'il n'y ait point de coefficient de rotation, nous allons étendre le théorème de Thomson donné au § 100, et démontrer que la chaleur développée par un courant dans un système en un temps donné est un minimum unique.

Pour simplifier les opérations algébriques, prenons les axes de manière à réduire à trois termes l'expression (9), et, par suite, dans le cas actuel, l'expression (10); on a alors pour l'équation générale caractéristique (16)

$$(24)\qquad r_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + r_3 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Soient aussi a, b, c trois fonctions de x, y, z satisfaisant à la con-

(1) [Ou dans les substances soumises à l'action d'un champ magnétique. P.]

dition

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \tag{25}$$

et soient

$$\begin{cases} a = -r_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} + u, \\ b = -r_2 \dfrac{\partial V}{\partial y} + v, \\ c = -r_3 \dfrac{\partial V}{\partial z} + w. \end{cases} \tag{26}$$

Enfin prenons l'intégrale triple

$$W = \iiint (R_1 a^2 + R_2 b^2 + R_3 c^2)\, dx\, dy\, dz \tag{27}$$

pour des espaces définis comme dans l'énoncé du § 100, c'est-à-dire tels que V soit constant dans certaines parties, et que la composante du vecteur a, b, c suivant la normale aux surfaces limites des autres parties soit donnée et assujettie, en outre, à la restriction que son intégrale prise sur l'ensemble de la surface limite soit nulle; alors W sera minimum si

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

En effet, nous avons

$$r_1 R_1 = 1, \quad r_2 R_2 = 1, \quad r_3 R_3 = 1;$$

donc, d'après l'équation (26),

$$\begin{cases} W = \iiint \left[r_1 \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + r_2 \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + r_3 \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz \\ \quad + \iiint (R_1 u^2 + R_2 v^2 + R_3 w^2)\, dx\, dy\, dz \\ \quad - 2 \iiint \left(u \dfrac{\partial V}{\partial x} + v \dfrac{\partial V}{\partial y} + w \dfrac{\partial V}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \end{cases} \tag{28}$$

Mais, puisque

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \tag{29}$$

le troisième terme s'annule en vertu des conditions aux limites.

Le premier terme de (28) est donc l'unique minimum de W.

305. Comme cette proposition a une grande importance dans la théorie de l'électricité, il peut être utile de donner la démonstration

suivante du cas le plus général, sous une forme exempte d'opérations analytiques.

Considérons la propagation de l'électricité dans un conducteur de forme quelconque, homogène ou hétérogène.

Nous savons que :

1° Une ligne, menée suivant la direction et dans le sens du courant, va des points où le potentiel est plus élevé à ceux où il est moins élevé.

2° Si en tous les points du système le potentiel est changé dans le même rapport, l'intensité est changée dans le même rapport : c'est la loi de Ohm.

3° Si une certaine distribution des potentiels donne lieu à une certaine distribution des intensités, et si une autre distribution des potentiels donne une autre distribution des intensités, une troisième distribution où le potentiel est la somme ou la différence des potentiels dans la première et la seconde distribution donne lieu à une distribution des intensités telle que l'intensité du courant qui, dans ce troisième cas, passe à travers une surface finie donnée, est égale à la somme ou à la différence des intensités des courants qui traversent cette surface dans le premier et le second cas. Car, d'après la loi de Ohm, l'intensité additionnelle due à une variation des potentiels ne dépend pas de l'intensité primitive due à la distribution primitive des potentiels.

4° Si le potentiel est constant sur l'ensemble d'une surface fermée ne renfermant ni électrodes, ni forces électromotrices intérieures, il n'y a point de courant à l'intérieur de la surface fermée, et le potentiel en un point intérieur quelconque est égal au potentiel sur la surface.

En effet, s'il y a des courants à l'intérieur de la surface fermée, ils décrivent des courbes fermées, ou bien ils commencent et finissent en des points situés à l'intérieur de la surface ou sur cette surface.

Mais, puisque les courants passent toujours des points où le potentiel est plus élevé aux points où le potentiel est moins élevé, ils ne peuvent décrire des courbes fermées.

Puisqu'il n'y a point d'électrodes à l'intérieur de la surface, le courant ne peut commencer ni finir en un point intérieur de la surface; puisque le potentiel est le même en tous les points de la surface, il ne peut y avoir de courant suivant des lignes tracées d'un point à un autre de la surface.

Donc, il n'y a point de courants à l'intérieur de la surface, et, par suite, pas de différence de potentiels; car une pareille différence don-

nerait lieu à des courants. Donc, le potentiel en tous les points intérieurs est le même que sur la surface fermée.

5° S'il n'y a point de courant électrique qui traverse une partie quelconque de la surface fermée, et s'il n'y a à l'intérieur de cette surface ni électrodes, ni forces électromotrices intérieures, il n'y a point de courant dans la surface, et le potentiel y est partout le même.

6° Si le potentiel est uniforme sur une partie d'une surface fermée, et qu'il ne passe point de courant à travers le reste de la surface, le potentiel à l'intérieur de la surface est uniforme pour les mêmes raisons.

7° Si l'on connaît le potentiel pour chacun des points d'une partie d'une surface fermée et l'intensité du courant qui traverse la surface en chacun des points du reste de cette surface, il ne peut exister pour les points intérieurs du corps qu'une seule distribution des potentiels.

Car, si pour un point quelconque intérieur au corps il y avait deux valeurs, dont V_1 fût la première et V_2 la seconde, nous pouvons concevoir un troisième cas dans lequel le potentiel de chaque point sera l'excès de la première valeur sur la seconde. Pour la partie de la surface où l'on connaît le potentiel, le potentiel deviendra nul dans ce troisième cas; de même, l'intensité sera nulle pour les autres parties de la surface; par suite, d'après (6), le potentiel sera nul pour tout point à l'intérieur de la surface : il ne doit donc point exister de différence entre V_1 et V_2. Il n'y a donc qu'une seule distribution des potentiels possible. Cette proposition est vraie, que le solide soit limité par une ou par plusieurs surfaces fermées.

Calcul approché de la résistance d'un conducteur de forme donnée.

306. Le conducteur que nous considérons ici a sa surface partagée en trois portions : sur l'une, le potentiel est maintenu à une valeur constante; sur l'autre, il a une valeur constante différente de la première; tout le reste de la surface est impénétrable à l'électricité. Nous pouvons supposer que l'on remplit les conditions relatives à la première et à la seconde partie, en appliquant sur le conducteur deux électrodes faites d'une substance parfaitement conductrice, et celle qui est relative au reste de la surface, en le couvrant d'une couche de matière parfaitement isolante.

Dans ces conditions, l'intensité en chaque point du conducteur est proportionnelle à la différence des potentiels aux électrodes. Appelant cette différence *force électromotrice*, l'intensité totale de l'une des

électrodes à l'autre est le produit de la force électromotrice par la conductibilité du conducteur entier, et la résistance du conducteur est l'inverse de sa conductibilité.

C'est seulement quand un conducteur se trouve à peu près dans les conditions ainsi définies que l'on peut dire que, pris dans son ensemble, il a une résistance ou une conductibilité déterminée. Une bobine de résistance, formée d'un fil fin se terminant par de grosses masses de cuivre, satisfait à peu près à ces conditions; car le potentiel est sensiblement constant dans ces électrodes massives, les différences de potentiels qui peuvent exister entre les différents points d'une même électrode pouvant être négligées devant la différence des potentiels aux deux électrodes.

Une méthode très utile pour calculer la résistance de pareils conducteurs a été donnée pour la première fois, à ma connaissance, dans un Mémoire de lord Rayleigh sur la *Théorie de la Résonance* (1).

Elle est fondée sur les considérations suivantes : si la résistance spécifique d'une partie du conducteur change, celle du reste du conducteur demeurant invariable, la résistance du conducteur total augmente ou diminue, suivant que la résistance de cette partie augmente ou diminue.

Ce principe peut être considéré comme évident; il est aussi aisé de faire voir que la valeur de l'expression qui donne la résistance d'un système de conducteurs entre deux points choisis comme électrodes croît à mesure que croît la résistance de chacun des éléments du système.

Il résulte de là que si, dans la masse du conducteur, nous traçons une surface de forme quelconque, et si nous supposons que cette surface soit une nappe infiniment mince, formée d'une substance parfaitement conductrice, la résistance du conducteur total sera diminuée, à moins que la surface ne soit une surface équipotentielle lorsque le corps est dans son état naturel; car alors, cette surface étant déjà en équilibre électrique, aucun effet ne sera produit quand on la rendra parfaitement conductrice.

Traçons donc dans l'intérieur du conducteur une série de surfaces : la première coïncidant avec la première électrode, la dernière avec la seconde électrode, les surfaces intermédiaires étant limitées par la surface non conductrice et ne se coupant point les unes les autres; supposons que chacune de ces surfaces soit une nappe infiniment

(1) *Phil. Trans.*, 1871.

mince, d'une substance parfaitement conductrice. Nous aurons ainsi constitué un système dont la résistance n'est certainement pas supérieure à la résistance du conducteur proposé, et ne lui devient égale que si les surfaces que nous avons choisies sont les surfaces équipotentielles naturelles.

Mais calculer la résistance du système artificiel est une opération bien plus aisée que le problème primitif; car la résistance de l'ensemble est la somme des résistances de toutes les couches comprises entre les surfaces successives, et l'on peut trouver, ainsi qu'il suit, la résistance de chaque couche.

Soient

dS un élément de surface de la couche,

ν l'épaisseur de la couche perpendiculairement à cet élément,

ρ la résistance spécifique,

E la différence de potentiels des deux surfaces parfaitement conductrices,

dC l'intensité du courant qui passe à travers dS;

alors

$$dC = E\,\frac{1}{\rho\nu}\,dS, \tag{1}$$

et l'intensité du courant total qui traverse la couche est

$$C = E\iint \frac{1}{\rho\nu}\,dS, \tag{2}$$

l'intégration s'étendant à toute la couche limitée par la surface non conductrice du conducteur.

D'où la conductibilité de la couche est

$$\frac{C}{E} = \iint \frac{1}{\rho\nu}\,dS \tag{3}$$

et la résistance de la couche est l'inverse de cette quantité.

Si la couche est limitée par deux surfaces pour lesquelles une fonction F a des valeurs F et $F + dF$, on a

$$\frac{dF}{\nu} = \nabla F = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

et la résistance de la couche est

$$\frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho}\,\nabla F\,dS}. \tag{5}$$

Pour trouver la résistance de l'ensemble du conducteur, nous n'avons qu'à intégrer par rapport à F, et nous trouvons

$$R_1 = \int \frac{dF}{\iint \frac{1}{\rho} \nabla F \, dS}. \tag{6}$$

La résistance R du conducteur, dans son état naturel, est plus grande que la valeur ainsi trouvée, à moins que les surfaces choisies ne soient les surfaces équipotentielles naturelles. D'ailleurs, comme la vraie valeur de R est le maximum absolu des valeurs de R_1 et peut être ainsi obtenue, une légère différence entre les surfaces choisies et les surfaces équipotentielles exactes ne produira sur R qu'une erreur comparativement faible.

Cette méthode pour déterminer une limite inférieure de la valeur de la résistance est évidemment d'une généralité parfaite, et peut s'appliquer à des conducteurs de forme quelconque, lors même que la résistance spécifique ρ varierait d'une manière quelconque dans l'intérieur du conducteur.

L'exemple le plus familier de cette méthode est la façon dont on détermine habituellement la résistance d'un fil métallique tendu, de section variable. Dans ce cas, les surfaces que l'on choisit sont des plans perpendiculaires à l'axe du fil; les couches ont des faces parallèles, et la résistance d'une couche de section S et d'épaisseur ds est

$$dR_1 = \frac{\rho ds}{S}. \tag{7}$$

et la résistance de tout un fil de longueur s est

$$R_1 = \int \frac{\rho ds}{S}, \tag{8}$$

S étant la section transversale, laquelle est fonction de s.

Dans le cas des fils dont la section varie lentement avec la longueur, cette méthode donne des résultats très voisins de la vérité; mais ce n'est, en réalité, qu'une limite inférieure, et la résistance vraie est toujours plus grande, sauf dans le cas où la section est parfaitement uniforme.

307. Pour trouver une limite supérieure de la résistance, supposons que l'on trace dans le corps une surface et qu'on rende cette surface impénétrable à l'électricité. L'effet sera d'augmenter la résistance du conducteur, à moins que la surface ne soit une surface naturelle de

flux. Au moyen de deux systèmes de surfaces, nous pouvons former une série de tubes qui déterminent complètement le flux; et l'effet de ce système de surfaces impénétrables, s'il y a un effet produit, est d'accroître la résistance du conducteur au delà de sa valeur naturelle.

La résistance de chaque tube peut être calculée par la méthode que l'on a donnée pour un fil fin, et la résistance du conducteur est l'inverse de la somme des inverses des résistances de tous les tubes. La résistance ainsi trouvée est plus grande que la résistance véritable, à moins que les tubes ne suivent les lignes naturelles de flux.

Dans le cas déjà considéré d'un conducteur en forme de solide de révolution allongé, comptons les x suivant l'axe, et soit b le rayon de la section faite en un point quelconque. Prenons pour l'une des séries de surfaces impénétrables des plans passant par l'axe, pour chacun desquels φ est constant; pour l'autre, des surfaces de révolution, pour lesquelles

$$y^2 = \psi b^2, \tag{9}$$

ψ étant une quantité numérique comprise entre o et 1.

Considérons une portion de tube limitée par les surfaces φ et $\varphi + d\varphi$, ψ et $\psi + d\psi$, et x et $x + dx$.

La section du tube perpendiculaire à l'axe est

$$y\,dy\,d\varphi = \tfrac{1}{2} b^2\,d\psi\,d\varphi. \tag{10}$$

Si θ est l'angle du tube avec l'axe

$$\operatorname{tang}\theta = \psi^{\frac{1}{2}} \frac{db}{dx}. \tag{11}$$

La vraie grandeur de l'élément de tube est $dx\,\sec\theta$, et sa vraie section est

$$\tfrac{1}{2} b^2\,d\psi\,d\varphi\cos\theta,$$

de sorte que la résistance est

$$2\rho \frac{dx}{b^2\,d\varphi\,d\psi}\sec^2\theta = 2\rho \frac{dx}{b^2\,d\varphi\,d\psi}\left[1 + \psi\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Soient

$$\mathrm{A} = \int \frac{\rho}{b^2}\,dx, \quad \mathrm{B} = \int \frac{\rho}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 dx, \tag{13}$$

l'intégration s'étendant à toute la longueur x du conducteur; alors la résistance du tube $d\varphi\,d\psi$ est

$$\frac{2}{d\psi\,d\varphi}(\mathrm{A} + \psi\mathrm{B}),$$

et sa conductibilité

$$\frac{d\psi d\varphi}{2(A+\psi B)}.$$

Pour trouver la conductibilité de tout le conducteur, laquelle est la somme des conductibilités des différents tubes, nous devons intégrer cette équation depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et de $\psi = 0$ à $\psi = 1$. Le résultat est

$$\frac{1}{R'} = \frac{\pi \log\left(1+\frac{B}{A}\right)}{B}; \tag{14}$$

il peut être inférieur, mais non supérieur à la conductibilité vraie du conducteur.

Si $\frac{db}{dx}$ est toujours une petite quantité, $\frac{B}{A}$ est aussi petit, et nous pouvons développer l'expression de la conductibilité sous la forme

$$\frac{1}{R'} = \frac{\pi}{A}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{B}{A} + \frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{4}\frac{B^3}{A^3} + \cdots\right). \tag{15}$$

Le premier terme $\frac{\pi}{A}$ est celui que l'on aurait trouvé, par la première méthode, comme limite supérieure de la conductibilité. Donc la conductibilité vraie est inférieure au premier terme, mais supérieure à la série tout entière. La limite supérieure de la résistance est l'inverse de celle-ci, soit

$$R' = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{B}{A} - \frac{1}{12}\frac{B^2}{A^2} + \frac{1}{24}\frac{B^3}{A^3} - \cdots\right). \tag{16}$$

Si nous avions supposé non seulement que le flux est dirigé par les surfaces φ et ψ, mais encore que le flux dans chaque tube est proportionnel à $d\varphi d\psi$, on aurait obtenu, comme valeur de la résistance, sous cette restriction supplémentaire,

$$R' = \frac{1}{\pi}(A + \tfrac{1}{2}B), \tag{17}$$

laquelle est évidemment supérieure à la première valeur, ainsi qu'elle devait l'être en raison de cette restriction additionnelle. Dans le Mémoire de lord Rayleigh, cette supposition est faite, et la limite supérieure de la résistance qui y est donnée a la valeur (17), un peu plus grande que celle obtenue en (16).

308. Nous allons maintenant appliquer cette même méthode à la

recherche de la correction qu'il faut appliquer à la longueur d'un conducteur cylindrique de rayon a, lorsque son extrémité est mise en contact avec une électrode massive, que nous supposerons faite d'un métal différent.

Pour trouver la limite inférieure, nous pouvons supposer que l'on interpose entre le bout du cylindre et l'électrode massive un disque infiniment mince d'une substance parfaitement conductrice, de façon que le potentiel soit partout le même au bout du cylindre. Alors le potentiel dans le cylindre ne sera plus fonction que de sa longueur; et, si nous supposons que la surface de contact de l'électrode et du cylindre soit à peu près plane et que l'électrode ait des dimensions considérables relativement au diamètre du cylindre, la distribution du potentiel sera la même que celle qui est produite sur un conducteur en forme de disque placé dans un milieu infini. (*Voir* § 151 et 177.)

Si E est la différence entre le potentiel du disque et celui des parties les plus éloignées de l'électrode, C l'intensité du courant qui va de la surface du disque à l'électrode, et si ρ' est la résistance spécifique de l'électrode; si enfin Q est la quantité d'électricité répandue sur le disque et que nous supposons distribuée comme au § 151, nous avons

$$\rho' C = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\pi Q = 2\pi \frac{a E}{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{4} a E, \tag{18}$$

d'après le § 151.

Si donc le fil présente une longueur L depuis un point donné jusqu'à l'électrode, et si sa résistance spécifique est ρ, sa résistance, depuis le point choisi jusqu'à un point de l'électrode non situé dans le voisinage de la jonction, est

$$R = \rho \frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a},$$

ce qui peut s'écrire

$$R = \frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{\rho'}{\rho}\frac{\pi a}{4}\right); \tag{19}$$

le second terme de la parenthèse est une quantité que l'on doit ajouter à la longueur du cylindre ou du fil quand on calcule sa résistance, et qui est évidemment une très petite correction.

Pour comprendre la nature de l'erreur dont il s'agit, il faut remarquer que nous avons toujours supposé le flux uniforme dans toute la section du fil, y compris le disque; mais le flux du disque à l'électrode n'est plus uniforme : en chaque point, il est inversement proportionnel à la corde *minimum* passant par ce point. Dans le cas

actuel, le flux à travers le disque n'est pas uniforme; mais il n'est pas non plus aussi différent d'un point à un autre que nous le supposons ici. Dans le cas actuel, le potentiel du disque n'est pas uniforme, mais varie et diminue quand on va du milieu vers les bords.

309. Nous allons maintenant déterminer une quantité plus grande que la vraie résistance, en astreignant le flux à être uniforme en tous les points du disque. Nous pouvons supposer que les forces électromotrices introduites à cet effet agissent perpendiculairement à la surface du disque.

La résistance du fil sera la même que précédemment; mais la quantité de chaleur produite dans l'électrode sera l'intégrale de surface du produit du flux par le potentiel. Or le flux, en un point quelconque, est

$$\frac{C}{\pi a^2},$$

et le potentiel est le même que celui d'une surface électrisée pour laquelle la densité superficielle σ est

$$2\pi\sigma = \frac{C\rho'}{\pi a^2}, \tag{20}$$

ρ' étant la résistance spécifique.

Nous avons donc à déterminer l'énergie potentielle de la charge d'un disque dont la densité superficielle est uniforme et égale à σ.

(1) On trouve aisément que sur les bords d'un disque où la densité superficielle est uniforme et égale à σ, le potentiel est

$$4a\sigma.$$

Le travail effectué, si l'on ajoute à la circonférence du disque une bande d'épaisseur da, est

$$2\pi a\sigma da 4a\sigma,$$

et l'énergie potentielle totale du disque est l'intégrale de cette expression, soit

$$P = \frac{8\pi}{3} a^3\sigma^2. \tag{21}$$

Dans le cas de la conduction électrique, le travail effectué dans une

(1) *Voir* un Mémoire du professeur Cayley, *London Math. Soc. Proc.*, VI, p. 47.

électrode de résistance R' est

$$C^2 R';$$

mais, d'après l'équation générale de conduction, l'intensité du courant qui passe à travers l'unité d'aire du disque est de la forme

$$-\frac{1}{\rho'}\frac{dV}{dv}$$

ou

$$\frac{4\pi}{\rho'}\sigma.$$

Donc la quantité de travail effectué est

$$\frac{4\pi}{\rho'}P.$$

Nous avons donc

$$C^2 R' = \frac{4\pi}{\rho'}P; \tag{22}$$

d'où, en vertu de (20) et de (21),

$$R' = \frac{8\rho'}{3\pi^2 a},$$

et la correction qu'il faut faire subir à la longueur du cylindre est

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{8}{3\pi}a,$$

cette correction étant supérieure à la vraie valeur. La correction vraie à faire sur la longueur est donc $\frac{\rho'}{\rho}an$, où n est un nombre compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{8}{4\pi}$, c'est-à-dire entre 0,785 et 0,849.

Par une deuxième approximation, lord Rayleigh a réduit à 0,8282 la limite supérieure de n (1).

(1) *Phil. Mag.*, nov. 1872. Plus tard, lord Rayleigh a obtenu pour limite supérieure 0,8242. (Voir *London Math. Soc. Proc.*, VIII, p. 74.)

CHAPITRE IX.

CONDUCTION DANS LES MILIEUX HÉTÉROGÈNES.

Des conditions qui doivent être satisfaites à la surface de séparation de deux milieux conducteurs.

310. Il y a deux conditions auxquelles doit satisfaire, en général, toute distribution de courants : la condition de continuité du potentiel et la condition de continuité des courants électriques.

La première de ces conditions exige que deux points infiniment voisins, mais situés de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux, soient à des potentiels égaux. Il est entendu que les potentiels sont mesurés avec un électromètre relié au point considéré par une électrode faite d'un métal donné. Mais, si les potentiels sont mesurés par la méthode décrite aux § 222 et 246, où les électrodes viennent aboutir dans une cavité pleine d'air, creusée dans le conducteur, les potentiels de deux points voisins pris sur des métaux différents devront différer d'une certaine quantité qui dépend de la nature et de la température des deux métaux.

L'autre condition à la surface est que le courant qui passe à travers un élément quelconque de la surface de séparation ait la même valeur, quel que soit celui des milieux dans lequel on le mesure.

Ainsi, V_1 et V_2 étant les potentiels dans les deux milieux, en un point quelconque de la surface de séparation,

$$V_1 = V_2, \tag{1}$$

et, si u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 sont les composantes de l'intensité dans les deux milieux, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface de séparation,

$$lu_1 + mv_1 + nw_1 = lu_2 + mv_2 + nw_2. \tag{2}$$

Dans le cas le plus général, u, v et w sont des fonctions linéaires des dérivées de V et sont représentées par des équations de la forme

$$\begin{cases} u = r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ v = q_3 X - r_2 Y + p_1 Z, \\ w = p_2 X + q_1 Y + r_3 Z, \end{cases} \tag{3}$$

où X, Y, Z sont les dérivées partielles de V, par rapport à x, y et z.

Considérons le cas où la surface sépare un milieu qui a ces coefficients de conduction d'un milieu isotrope, où le coefficient de conduction est r.

Soient X', Y', Z' les valeurs de X, Y, Z dans le milieu isotrope; nous avons à la surface

$$V = V' \tag{4}$$

ou

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = X'\,dx + Y'\,dy + Z'\,dz, \tag{5}$$

quand

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0. \tag{6}$$

Cette condition donne

$$X' = X + 4\pi\sigma l, \quad Y' = Y + 4\pi\sigma m, \quad Z' = Z + 4\pi\sigma n, \tag{7}$$

σ étant la densité superficielle.

Nous avons aussi, dans le milieu isotrope,

$$u' = rX', \quad v' = rY', \quad w' = rZ', \tag{8}$$

et à la surface la condition du flux est

$$u'l + v'm + w'n = ul + vm + wn \tag{9}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} r(lX' + mY' + nZ') = {} & l(r_1X + p_3Y + q_2Z) \\ & + m(q_3X + r_2Y + p_1Z) + n(p_2X + q_1Y + r_3Z); \end{aligned}\right. \tag{10}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\sigma r = {} & [l(r_1 - r) + mq_3 + np_2]X + [lp_3 + m(r_2 - r) + nq_1]Y \\ & + [lq_2 + mp_1 + n(r_3 - r)]Z. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

La quantité σ représente la densité superficielle de la charge, à la surface de séparation. Dans les substances cristallines ou organisées, elle dépend de la direction de la surface, aussi bien que de la force qui est normale à cette surface. Dans les substances isotropes, p et q sont nuls, et tous les coefficients r sont égaux, de sorte que

$$4\pi\sigma = \left(\frac{r_1}{r} - 1\right)(lX + mY + nZ), \tag{12}$$

où r_1 est la conductibilité de la substance, et r celle du milieu exté-

rieur, et l, m, n les cosinus directeurs de la normale dirigée vers le milieu dont la conductibilité est r.

Si les deux milieux sont isotropes, les conditions peuvent être bien simplifiées; car, k étant la résistance spécifique par unité de volume,

$$(13) \qquad u = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial z},$$

et si ν est la normale menée en un point de la surface de séparation, du premier milieu vers le second, la condition de continuité est

$$(14) \qquad \frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial \nu} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial \nu}.$$

Si θ_1 et θ_2 sont les angles que font, avec la normale à la surface de séparation, les lignes de flux dans le premier et dans le second milieu, les tangentes à ces lignes de flux sont dans le plan qui contient la normale et sont situées de part et d'autre de cette normale, et

$$(15) \qquad k_1 \operatorname{tang}\theta_1 = k_2 \operatorname{tang}\theta_2.$$

C'est ce qu'on peut appeler la *loi de la réfraction des lignes de flux*.

311. Pour donner un exemple des conditions qui doivent être satisfaites lorsque l'électricité traverse la surface de séparation de deux milieux, nous allons considérer une surface sphérique de rayon a, la résistance spécifique étant k_1 à l'intérieur de la sphère et k_2 à l'extérieur.

Développons en harmoniques solides le potentiel de l'intérieur et celui de l'extérieur de la surface, et soient

$$(1) \qquad V_1 = [A_i r^i + B_i r^{-(i+1)}]S_i,$$

$$(2) \qquad V_2 = [A_2 r^i + B_2 r^{-(i+1)}]S_i,$$

les parties qui, pour l'intérieur et pour l'extérieur de la sphère, dépendent de l'harmonique de surface S_i.

A la surface de séparation, où $r = a$, nous devons avoir

$$(3) \qquad V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial r}.$$

De ces conditions, nous tirons les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} (A_1 - A_2)a^{2i+1} + (B_1 - B_2) = 0, \\ \left(\frac{1}{k_1}A_1 - \frac{1}{k_2}A_2\right)ia^{2i+1} - \left(\frac{1}{k_1}B_1 - \frac{1}{k_2}B_2\right)(i+1) = 0. \end{cases}$$

Si nous connaissons deux des quatre quantités A_1, A_2, B_1, B_2, ces équations suffisent pour déterminer les deux autres.

Supposons connus A_1 et B_1, nous trouvons les expressions suivantes de A_2 et B_2 :

$$(5)\quad \begin{cases} A_2 = \dfrac{[k_1(i+1)+k_2 i]A_1 + (k_1-k_2)(i+1)B_1 a^{-(2i+1)}}{k_1(2i+1)}, \\ B_2 = \dfrac{(k_1-k_2)iA_1 a^{2i+1} + [k_1 i + k_2(i+1)]B_1}{k_1(2i+1)}. \end{cases}$$

On peut ainsi trouver les conditions auxquelles doit satisfaire chaque terme du développement harmonique du potentiel, pour un nombre quelconque de couches limitées par des surfaces sphériques concentriques.

312. Soient a le rayon de la première surface sphérique, a_2 le rayon d'une deuxième surface sphérique plus grande, au delà de laquelle la résistance spécifique est k_3. S'il n'y a à l'intérieur de ces sphères ni sources, ni pertes d'électricité, il n'y a point de valeurs infinies de V, et nous aurons

$$B_1 = 0.$$

Nous trouvons alors, pour les coefficients A_3 et B_3 du milieu extérieur,

$$(6)\quad \begin{cases} A_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \Big\{ [k_1(2i+1)+k_2 i][k_2(i+1)+k_3 i] \\ \qquad\qquad + i(i+1)(k_1-k_2)(k_2-k_3)\left(\dfrac{a_1}{a^2}\right)^{2i+1} \Big\} A_1, \\ B_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \Big\{ i[k_1(i+1)+k_2 i](k_2-k_3)a_1^{2i+1} \\ \qquad\qquad + i(k_1-k_2)[k_2 i + k_3(i+1)]a_1^{2i+1} \Big\} A_1. \end{cases}$$

La valeur du potentiel dans le milieu extérieur dépend en partie des sources extérieures d'électricité qui produisent les courants, indépendamment de l'existence de la sphère de matière non homogène introduite dans le champ de ces sources, et en partie de la perturbation causée par l'introduction de cette sphère hétérogène.

La première partie dépend seulement d'harmoniques solides de degré positif, car elle ne peut avoir de valeurs infinies à l'intérieur de la sphère.

La seconde partie ne doit dépendre que d'harmoniques de degrés négatifs, car elle doit s'annuler à une distance infinie du centre de la sphère.

Donc, le potentiel dû aux forces électromotrices extérieures doit être développable en une série d'harmoniques solides, de degré positif. Soit $A_3 S_i r^i$ le coefficient de l'un d'eux, de la forme

$$A_3 S_i r^i;$$

nous pouvons trouver A_1, le coefficient correspondant pour la sphère intérieure, par l'équation (6), et de celui-là déduire A_2, B_2 et B_3. De ceux-ci, B_3 représente l'effet produit sur le potentiel du milieu extérieur par l'introduction des sphères hétérogènes.

Supposons maintenant $k_3 = k_1$; nous serons dans le cas d'une enveloppe creuse, pour laquelle $k = k_2$, qui sépare un milieu intérieur d'un milieu extérieur semblable, dans lequel $k = k_1$.

Si nous posons

$$C = \frac{1}{(2i+1)^2 k_1 k_2 + i(i+1)(k_2-k_1)^2 \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right]},$$

alors

$$(7)\quad \begin{cases} A_1 = k_1 k_2 (2i+1)^2 C A_3, \\ A_2 = k_2 (2i+1)[k_1(i+1) + k_2 i] C A_3, \\ B_2 = k_2 i (2i+1)(k_1 - k_2) a_1^{2i+1} C A_3, \\ B_3 = i(k_2 - k_1)[k_1(i+1) + k_2 i](a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) C A_3. \end{cases}$$

La différence entre A_3, le coefficient non troublé, et sa valeur A_1 dans la cavité intérieure de l'enveloppe sphérique, est

$$(8)\quad A_3 - A_1 = (k_2 - k_1)^2 i(i+1)\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right] C A_3.$$

Puisque cette quantité est toujours positive, quelles que soient les valeurs de k_1 et k_2, il résulte que l'action électrique, dans l'espace compris à l'intérieur de l'enveloppe, est moindre qu'il n'eût été autrement, que la couche sphérique conduise mieux ou plus mal que le reste du milieu. Si l'enveloppe conduit mieux que le reste du milieu, elle tend à égaliser le potentiel dans toute l'étendue de la sphère intérieure. Si elle conduit moins bien, elle tend à empêcher absolument les courants électriques d'atteindre la sphère intérieure.

Le cas d'une sphère massive peut être déduit de celui-ci, en faisant $a_1 = 0$, ou peut être étudié directement.

313. Le terme le plus important dans le développement harmonique

est celui dans lequel $i = 1$; on a

$$(9)\qquad \begin{cases} C = \dfrac{1}{9k_1k_2 + 2(k_1-k_2)^2\left[1-\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^3\right]}, \\ A_1 = 9k_1k_2CA_3, \\ A_2 = 3k_2(2k_1+k_2)CA_3, \\ B_2 = 3k_2(k_1-k_2)a_1^3CA_3, \\ B_3 = (k_2-k_1)(2k_1+k_2)(a_2^3-a_1^3)CA_3. \end{cases}$$

Le cas d'une sphère massive de résistance k_2 peut s'en déduire en faisant $a_1 = 0$. On a alors

$$(10)\qquad A_2 = \frac{3k_2}{k_1+2k_2}A_3, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{k_2-k_1}{k_1+2k_2}a_2^3A_3.$$

Il est aisé de faire voir, au moyen des expressions générales, que la valeur de B_3 est la même dans le cas d'une sphère creuse formée d'un noyau de résistance k_1 entouré d'une enveloppe de résistance k_2, et, dans le cas d'une sphère massive et homogène, ayant pour rayon le rayon de la surface extérieure et présentant une résistance K, où

$$(11)\qquad K = \frac{(2k_1+k_2)a_2^3 + (k_1-k_2)a_1^3}{(2k_1+k_2)a_2^3 - 2(k_1-k_2)a_1^3}k_2.$$

314. Si l'on a n sphères de rayon a_1 et de résistance k_1, réparties dans un milieu de résistance k_2, et écartées les unes des autres à des distances telles que l'on puisse considérer comme indépendants les effets de perturbation qu'elles exercent sur la marche des courants, et si ces sphères sont toutes contenues dans une sphère de rayon a_2, le potentiel, en un point très éloigné du centre de cette sphère, sera de la forme

$$(12)\qquad V = \left(Ar + nB\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,$$

la valeur de B étant

$$(13)\qquad B = \frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}a_1^3A.$$

Le rapport du volume des n petites sphères à celui de la sphère qui les contient est

$$(14)\qquad p = n\frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

La valeur du potentiel, en un point éloigné du centre de la sphère,

pourra donc être mise sous la forme

$$V = A\left(r + pa^3 \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2} \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{15}$$

Or, si toute la sphère avait été faite d'une substance ayant la résistance spécifique K, on aurait

$$V = A\left(r + a^3 \frac{K - k_2}{2K + k_2} \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta. \tag{16}$$

Pour que l'une de ces expressions soit équivalente à l'autre, il faut que

$$K = \frac{2k_1 + k_2 + p(k_1 - k_2)}{2k_1 + k_2 - 2p(k_1 - k_2)}. \tag{17}$$

Telle est donc la résistance spécifique du milieu composé, formé d'une substance de résistance k_2, dans lequel sont disséminées de petites sphères de résistance k_1, le rapport du volume des petites sphères au volume de la masse totale étant égal à p. Pour qu'il ne se produise pas d'effets dus aux réactions mutuelles de ces sphères, il faut que leurs rayons soient petits en comparaison de leurs distances, ou que p soit une fraction assez faible.

Ce résultat peut aussi être obtenu par d'autres méthodes; mais celle qui est donnée ici ne fait que revenir sur le résultat déjà obtenu dans le cas d'une seule sphère.

Si la distance des sphères n'est pas grande relativement à leur rayon et si $\frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}$ est considérable, d'autres termes s'introduisent dans le résultat que nous allons examiner maintenant. En raison de l'existence de ces termes, certaines distributions des sphères donnent lieu à des résistances du milieu composé variables dans les différentes directions.

Application du principe des images.

315. Prenons pour exemple le cas de deux milieux séparés par une surface plane, et supposons que, dans le premier milieu, à une distance a de la surface, il y ait une source S d'électricité, qui émet une quantité d'électricité S dans l'unité de temps.

Si le premier milieu s'étendait indéfiniment, le courant aurait, en un point quelconque P, la direction SP, et le potentiel en P serait $\frac{E}{r_1}$, où $E = \frac{Sk_1}{4\pi}$ et $r_1 = SP$.

Dans le cas actuel, les conditions sont remplies, si l'on prend un point I, image de S dans le second milieu, de sorte que le plan de séparation des deux milieux divise normalement IS en deux parties égales. Soit r_1 la distance d'un point quelconque au point I; à la surface de séparation

$$r_1 = r_2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \nu} = -\frac{\partial r_2}{\partial \nu}. \tag{2}$$

Soit V_1 le potentiel en un point du premier milieu, dû à une quantité E d'électricité placée en S, et à une autre quantité E_2 fictivement placée en I; soit V_2 le potentiel en un point du second milieu, dû à une quantité E_1 fictivement placée en S. Alors, si

$$V_1 = \frac{E}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{E_1}{r_1}, \tag{3}$$

la condition à la surface $V_1 = V_2$ donne

$$E + E_2 = E_1, \tag{4}$$

et la condition

$$\frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial \nu} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial \nu} \tag{5}$$

donne

$$\frac{1}{k_1}(E - E_2) = \frac{1}{k_2}E_1, \tag{6}$$

d'où

$$E_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}E, \quad E_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}E. \tag{7}$$

Le potentiel dans le premier milieu est donc égal à celui que produiraient dans l'air, d'après la théorie électrostatique, une charge E placée en S et une charge E_2 placée en I; et le potentiel dans le second milieu est égal à celui que produirait dans l'air une charge E placée en S.

En un point quelconque du premier milieu, l'intensité est égale à celle que produiraient la source S et une source $\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}$ S placée en I, agissant dans le premier milieu supposé infini; et l'intensité dans le second milieu est égale à celle que produirait une source $\frac{2k_2}{k_1 + k_2}$ S placée en S, dans le second milieu supposé infini.

Nous avons ainsi une théorie complète des images électriques dans

le cas de deux milieux séparés par une surface plane. Quelle que soit la nature des forces électromotrices qui agissent dans le premier milieu, le potentiel qu'elles y produisent peut se calculer en combinant leur effet direct à l'effet de leur image.

Si nous supposons le second milieu parfaitement conducteur, $k_2 = 0$, et l'image I est égale et de signe contraire à la source S. Tel est le cas des images électriques dans la théorie électrostatique de Thomson.

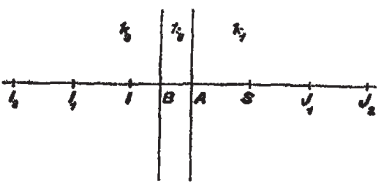
Si nous supposons le second milieu parfaitement isolant, k_2 est infini, et l'image I est égale à la source S et de même signe. Tel est le cas des images en hydrocinétique, lorsque le fluide est limité par une surface plane rigide.

316. La méthode d'inversion, si utile en Électrostatique où l'on suppose que la surface de séparation est celle d'un corps parfaitement conducteur, ne s'applique plus au cas plus général d'une surface séparant deux milieux présentant des résistances électriques inégales. Toutefois, on peut appliquer la méthode d'inversion dans le plan, ainsi que la méthode, plus générale, de transformation dans le plan donné au § 190 (1).

Conduction dans une plaque séparant deux milieux.

317. Considérons une plaque d'épaisseur AB, faite d'une substance de résistance k_2, qui sépare deux milieux de résistances k_1 et k_3 (*fig.* 24), et voyons comment elle fait varier le potentiel dû à une

Fig. 24.



source S placée dans le premier milieu.

Le potentiel sera égal à celui qui serait dû dans l'air à une série de charges placées en certains points sur la normale menée par S à la plaque.

---

(1) *Voir* KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.*, LXIV, 497, et LXVII, 344; QUINCKE, *Pogg.*, XCVII, 382, et SMITH, *Proc. R. S. Edin.*, 1869-70, p. 79.

Faisons

$$AI = SA, \quad BI_1 = SB, \quad AJ_1 = I_1A, \quad BI_2 = J_1B, \quad AJ_2 = I_2A, \quad \ldots,$$

nous avons ainsi deux séries de points écartés les uns des autres au double de l'épaisseur de la plaque.

318. Le potentiel en un point quelconque P du premier milieu est égal à

$$\frac{E}{PS} + \frac{I}{PI} + \frac{I_1}{PI_1} + \frac{I_2}{PI_2} + \ldots, \tag{8}$$

le potentiel en un point P′ du second milieu est

$$\frac{E'}{P'S} + \frac{I'}{P'I'} + \frac{I'_1}{P'I'_1} + \frac{I'_2}{P'I'_2} + \ldots + \frac{J'_1}{P'J'_1} + \frac{J'_2}{P'J'_2} + \ldots ; \tag{9}$$

le potentiel en un point P″ du troisième milieu sera

$$\frac{E''}{P''S} + \frac{J_1}{P''J_1} + \frac{J_2}{P''J_2} + \ldots, \tag{10}$$

où I, I′, ... représentent les charges fictivement placées aux points I, I′, ..., et où les accents indiquent que le potentiel doit être pris à l'intérieur de la plaque.

Alors, d'après le paragraphe précédent, nous avons, pour la surface passant par A,

$$I = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} E, \quad E' = \frac{2k_2}{k_2 + k_1} E. \tag{11}$$

Pour la surface passant par B, nous avons

$$I'_1 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} E', \quad E'' = \frac{2k_2}{k_2 + k_3} E'. \tag{12}$$

De même, pour la surface passant par A,

$$J'_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} I'_1, \quad I_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} I'_1 ; \tag{13}$$

pour la surface passant par B,

$$I'_2 = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} J'_1, \quad J_1 = \frac{2k_3}{k_3 + k_2} J'_1 ; \tag{14}$$

et, si nous faisons

$$\rho = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \rho' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2},$$

nous trouvons pour le potentiel dans le premier milieu

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} V = \frac{E}{PS} - \rho\frac{E}{PI} + (1-\rho^2)\rho'\frac{E}{PI_1} + \rho'(1-\rho^2)\rho'^2\frac{E}{PI_2} + \cdots \\ + \rho'(1-\rho^2)(\rho\rho')^{n-1}\frac{E}{PI_n}. \end{aligned} \right.$$

Pour le potentiel dans le troisième milieu, nous trouvons

$$(16)\qquad V = (1+\rho')(1-\rho)E\left[\frac{1}{PS} + \frac{\rho\rho'}{PI_1} + \cdots + \frac{(\rho\rho')^n}{PI_n}\right].$$

Si le premier milieu est le même que le troisième, $k_1 = k_3$ et $\rho = \rho'$, et le potentiel, sur l'autre côté de la plaque, sera

$$(17)\qquad V = (1-\rho^2)E\left(\frac{1}{PS} + \frac{\rho^2}{PI_1} + \cdots + \frac{\rho^{2n}}{PI_n}\right).$$

Si la plaque conduit bien mieux que le reste du milieu, ρ est très voisin de 1. Si la plaque est un isolant presque parfait, ρ est presque égal à -1; et, si le pouvoir conducteur de la plaque diffère peu de celui du reste du milieu, ρ est une quantité très petite, positive ou négative.

La théorie de ce cas a été donnée, pour la première fois, par Green, dans sa *Théorie de l'induction magnétique* (*Essay*, p. 65). Mais son résultat n'est exact que si ρ est presque égal à 1 (1). La quantité g qu'il emploie est liée à ρ par les équations

$$g = \frac{2\rho}{3-\rho} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + 2k_2},$$
$$\rho = \frac{3g}{2+g} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Si nous posons $\rho = \frac{4\pi k}{1+2\pi\varkappa}$, nous avons la solution du problème de l'induction magnétique produite par un pôle magnétique dans une plaque indéfinie dont le coefficient d'aimantation est $\varkappa$.

Des conducteurs stratifiés.

319. Soit un conducteur formé de couches alternatives d'épaisseurs c et c', de deux substances dont les coefficients de conductibilité sont

(1) *Voir* Sir W. Thomson, *Note sur l'induction magnétique dans une plaque.* (*Camb. and Dub. Math. Journ.*, nov. 1845, ou *Reprint*, art. IX, § 156.)

différents. On demande de trouver les coefficients de résistance et de conductibilité du conducteur composé.

Prenons le plan des couches normal aux x, et distinguons par un accent les symboles relatifs à la couche de la deuxième espèce, par un trait placé au-dessus les symboles relatifs au conducteur composé : ainsi $\overline{X}$. Alors

$$\overline{X} = X = X', \quad (c+c')\overline{u} = cu + c'u',$$
$$\overline{Y} = Y = Y', \quad (c+c')\overline{v} = cv + c'v',$$
$$(c+c')Z = c\overline{Z} + c'Z', \quad \overline{w} = w = w'.$$

Nous devons d'abord déterminer u, u', v, v', Z et Z' en fonction de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\overline{w}$, d'après les équations de résistance du § 207 ou celles de conductibilité du § 208. Si nous désignons par D le déterminant des coefficients de résistance, nous trouvons

$$ur_1 D = R_2\overline{X} - Q_3\overline{Y} + \overline{w}q_2 D,$$
$$vr_2 D = R_1\overline{Y} - P_3\overline{X} + \overline{w}p_1 D,$$
$$Zr_3 = -p_2\overline{X} - q_1\overline{Y} + \overline{w}.$$

Des équations semblables, où les symboles sont accentués, donnent les valeurs de u', v' et Z'. Ayant trouvé $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{w}$ en fonction de $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, nous pouvons poser les équations de conductibilité du conducteur stratifié. Si nous faisons

$$h = \frac{c}{r_2} \quad \text{et} \quad h' = \frac{c'}{r'_2},$$

nous trouvons

$$\overline{p_1} = \frac{hp_1 + h'p'_1}{h+h'}, \quad \overline{q_1} = \frac{hq_1 + h'q'_1}{h+h'},$$
$$\overline{p_2} = \frac{hp_2 + h'p'_2}{h+h'}, \quad \overline{q_2} = \frac{hq_2 + h'q'_2}{h+h'},$$
$$\overline{p_3} = \frac{cp_3 + c'p'_3}{c+c'} - \frac{hh'(q_1-q'_1)(q_2-q'_2)}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{q_3} = \frac{cq_3 + c'q'_3}{c+c'} - \frac{hh'(p_1-p'_1)(p_2-p'_2)}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{r_1} = \frac{cr_1 + c'r'_1}{c+c'} - \frac{hh'(p_2-p'_2)(q_2-q'_2)}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{r_2} = \frac{cr_2 + c'r'_2}{c+c'} - \frac{hh'(p_1-p'_1)(q_1-q'_1)}{(h+h')(c+c')},$$
$$\overline{r_3} = \frac{c+c'}{h+h'}.$$

320. Si aucune des substances dont sont formées les couches ne possède la propriété rotatoire du § 303, la valeur d'un quelconque des P ou p sera égale à celle du Q ou q correspondant. D'où il résulte que, dans un conducteur stratifié, on a aussi

$$\overline{p_1} = \overline{q_1}, \quad \overline{p_2} = \overline{q_2}, \quad \overline{p_3} = \overline{q_3};$$

c'est-à-dire que la stratification ne développe point de propriété rotatoire, s'il n'en existe déjà dans les substances employées.

321. Si nous supposons maintenant qu'il n'y ait point de propriété rotatoire, et que les axes des x, des y et des z soient des axes principaux, les coefficients p et q s'annulent, et

$$\overline{r_1} = \frac{cr_1 + c'r'_1}{c + c'}, \quad r_2 = \frac{cr_2 + c'r'_2}{c + c'}, \quad r_3 = \frac{c + c'}{\frac{c}{r_3} + \frac{c'}{r'_3}}.$$

Si donc nous employons deux substances isotropes, l'effet de la stratification sera de rendre la résistance maximum dans la direction de la normale aux couches; la résistance sera la même dans toutes les directions parallèles au plan des couches.

322. Prenons une substance isotrope de conductibilité r; coupons-la en tranches très minces, d'épaisseur a, et faisons alterner ces tranches avec d'autres d'une substance de conductibilité s et d'épaisseur $k_1 a$.

Supposons ces tranches normales aux x. Coupons maintenant ce conducteur en tranches d'épaisseur plus grande b, normales aux y, et faisons alterner ces tranches avec des tranches de conductibilité s et d'épaisseur $k_2 b$.

Enfin, coupons ce nouveau conducteur en tranches d'épaisseur plus grande encore c, et faisons-les alterner avec des tranches de conductibilité s et d'épaisseur $k_3 c$.

Le résultat de ces trois opérations est de partager la matière de conductibilité r en parallélépipèdes rectangles, dont les dimensions sont a, b et c, b étant très petit relativement à c, et a très petit relativement à b, et de noyer ces parallélépipèdes dans la substance de conductibilité s, leur écartement étant de $k_1 a$ dans le sens des x, de $k_2 b$ dans le sens des y et de $k_3 c$ dans le sens des z. On trouve la conductibilité du conducteur ainsi formé, dans le sens des x, des y et des z, en appliquant trois fois successivement les résultats du § 321. On ob-

tient ainsi

$$r_1 = \frac{[(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)]r + (k_2+k_3+k_2k_3)s}{(1+k_2)(1+k_3)(k_1r+s)}s,$$

$$r_2 = \frac{(1+k_3+k_2k_3)r + (k_1+k_3+k_1k_3+k_1k_2+k_1k_2k_3)s}{(1+k_3)[k_2r+(1+k_1+k_1k_2)s]}s,$$

$$r_3 = \frac{(1+k_3)r + (k_1+k_2+k_1k_2)s}{k_3r+(1+k_1+k_2+k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2+k_1k_2k_3)s}s.$$

L'exactitude de cette étude tient à ce que les trois dimensions des parallélépipèdes sont d'ordres de grandeur différents, en sorte que l'on peut négliger les conditions à remplir sur les angles et sur les arêtes. Si l'on fait k_1, k_2 et k_3 tous égaux à l'unité,

$$r_1 = \frac{5r+3s}{4r+4s}s, \quad r_2 = \frac{3r+5s}{2r+6s}s, \quad r_3 = \frac{2r+6s}{r+7s}s.$$

Si $s = 0$, c'est-à-dire si le milieu dans lequel sont placés les parallélépipèdes est un isolant parfait,

$$r_1 = \tfrac{3}{4}s, \quad r_2 = \tfrac{5}{6}s, \quad r_3 = \tfrac{6}{7}s.$$

Si $r = \infty$, c'est-à-dire si les parallélépipèdes sont des conducteurs parfaits,

$$r_1 = \tfrac{5}{4}s, \quad r_2 = \tfrac{3}{2}s, \quad r_3 = 2s.$$

Dans tous les cas, pourvu que $k_1 = k_2 = k_3$, on peut montrer que r_1, r_2 et r_3 sont dans l'ordre des grandeurs croissantes, et que la conductibilité la plus grande se présente dans le sens de la dimension la plus grande, la résistance la plus grande dans le sens de la dimension la plus petite des parallélépipèdes.

323. Dans un parallélépipède rectangle formé d'une substance conductrice, perçons d'un sommet au sommet opposé un passage conducteur : ce sera, par exemple, un fil métallique recouvert d'une substance isolante, de dimensions transversales assez petites pour que la conductibilité de la masse ne soit changée que par le courant qui passe le long du fil.

Soient a, b, c les dimensions du parallélépipède dans les directions des axes; et soit Kabc la conductibilité du passage qui s'étend de l'origine au point (abc).

La force électromotrice qui agit entre les extrémités du passage est

$$aX + bY + cZ$$

et, si C′ est l'intensité le long du passage,

$$C' = K abc(aX + bY + cZ).$$

Le courant qui traverse la face bc du parallélépipède est bcu, et il se compose du courant dû à la conductibilité de la masse et du courant dû à la conductibilité du passage, ou bien

$$bcu = bc(r_1 X + p_3 Y + q_2 Z) + K abc(aX + bY + cZ)$$

ou bien

$$u = (r_1 + Ka^2)X + (p_3 + (Kab)Y + (q_2 + Kac)Z.$$

On trouverait de même les valeurs de v et w. Les coefficients de conductibilité, modifiés par l'effet du passage, seront

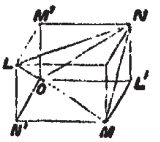
$$\begin{array}{lll} r_1 + Ka^2, & r_2 + Kb^2, & r_3 + Kc^2, \\ p_1 + Kbc, & p_2 + Kca, & p_3 + Kab, \\ q_1 + Kbc, & q_2 + Kca, & q_3 + Kab. \end{array}$$

Dans ces expressions, les termes ajoutés à p_1, ..., par l'effet du passage, sont égaux aux termes ajoutés à q_1, ... Donc les valeurs de p_1 et de q_1 ne peuvent être rendues inégales par l'introduction de passages linéaires dans chacun des éléments de volume du solide; et la propriété rotatoire du § 303 ne peut être créée par de tels moyens, si elle n'existe pas préalablement.

324. *Construire un système de conducteurs linéaires ayant des coefficients de conductibilité donnés quelconques et formant un système symétrique.*

Divisons l'espace en petits cubes égaux, et soit l'un d'eux représenté par la *fig.* 25.

Fig. 25.



Supposons que les coordonnées des points O, L, M, N et leurs potentiels soient

	x.	y.	z.	Potentiel.
O	0	0	0	$X + Y + Z$
L	0	1	1	X
M	1	0	1	Y
N	1	1	0	Z

Relions ces quatre points par les six conducteurs

OL, OM, ON, MN, NL, LM,

dont les conductibilités sont

$$A, B, C, P, Q, R.$$

Les forces électromotrices qui agissent le long de ces conducteurs seront

$$Y + Z,\ Z + X,\ X + Y,\ Y - Z,\ Z - X,\ X - Y,$$

et les intensités

$$A(Y + Z),\ B(Z + X),\ C(X + Y),\ P(Y - Z),\ Q(Z - X),\ R(X - Y).$$

De ces intensités, celles qui apportent de l'électricité dans le sens positif des x sont celles des courants dirigés suivant LM, LN, OM et ON, et la quantité transportée est

$$u = (B + C + Q + R)X + (C - R)Y + (B - Q)Z.$$

De même,

$$v = (C - R)X + (C + A + R + P)Y + (A - P)Z,$$
$$w = (B - Q)X + (A - P)Y + (A + B + P + Q)Z;$$

d'où l'on tire, par comparaison avec les équations de conduction du § 298,

$$4A = r_2 + r_3 - r_1 + 2p_1, \quad 4P = r_2 + r_3 - r_1 - 2p_1,$$
$$4B = r_3 + r_1 - r_2 + 2p_2, \quad 4Q = r_3 + r_1 - r_2 - 2p_2,$$
$$4C = r_1 + r_2 - r_3 + 2p_3; \quad 4R = r_1 + r_2 - r_3 - 2p_3.$$

CHAPITRE X.

CONDUCTION DANS LES DIÉLECTRIQUES.

325. Nous avons vu qu'une force électromotrice agissant sur un milieu diélectrique y détermine ce que nous avons appelé un *état de polarisation électrique*. Nous nous sommes représenté cet état comme consistant en un déplacement électrique s'effectuant à travers le milieu dans une direction qui, pour les milieux isotropes, est la même que celle de la force électromotrice, et en une charge superficielle de chacun des éléments en lesquels on peut supposer le diélectrique partagé, charge qui est négative du côté vers lequel agit la force, et positive du côté d'où agit cette force.

Si la force électromotrice agit sur un milieu conducteur, elle produit aussi ce qu'on appelle un *courant électrique*.

Or les milieux diélectriques, sauf de bien rares exceptions, si tant est qu'il y en ait, sont aussi des conducteurs plus ou moins imparfaits, et bien des milieux qui ne sont pas de bons isolants donnent lieu aux phénomènes de l'induction diélectrique. Nous sommes donc conduits à étudier l'état d'un milieu où se produisent à la fois l'induction et la conduction.

Pour plus de simplicité, nous supposerons le milieu isotrope en chaque point, mais sans qu'il soit nécessairement homogène en ses différents points. Alors l'équation de Poisson devient, d'après le § 83,

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0,$$

où K est le pouvoir inducteur spécifique.

L'équation de continuité des courants électriques devient

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)-\frac{\partial \rho}{\partial t}=0,$$

où r est la résistance spécifique rapportée à l'unité de volume.

Si K ou r sont discontinus, ces équations doivent être transformées en celles qui correspondent aux surfaces de discontinuité.

Dans un milieu entièrement homogène, K et r sont des constantes,

et l'on trouve

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\rho}{K} = r \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{3}$$

d'où

$$\rho = Ce^{-\frac{4\pi}{Kr}t} \tag{4}$$

ou, si nous posons $T = \frac{Kr}{4\pi}$,

$$\rho = Ce^{-\frac{t}{T}}. \tag{5}$$

Ce résultat nous montre que, sous l'action de forces électriques extérieures quelconques, un milieu homogène dont l'intérieur était chargé d'électricité d'une manière quelconque voit ces charges intérieures se dissiper suivant une loi qui ne dépend pas des forces extérieures; par suite, il finira par ne plus y avoir de charge électrique dans le milieu, et alors aucune force extérieure ne pourra ni produire, ni maintenir une charge en un point intérieur du milieu, aussi longtemps du moins que les relations entre la force électromotrice, la polarisation électrique et la conduction resteront les mêmes. S'il se produit une décharge disruptive, ces relations cessent d'être vraies, et il peut se produire une charge intérieure.

Conduction à travers un condensateur.

326. Soient C la force de capacité d'un condensateur, R sa résistance, E la force électromotrice qui agit sur lui, c'est-à-dire la différence de potentiels qui existe entre ses électrodes métalliques.

La quantité d'électricité répandue sur l'armature du côté d'où agit la force électromotrice est CE, et le courant qui se produit à travers la masse du condensateur, dans la direction de la force électromotrice, est $\frac{E}{R}$.

Si l'on admet que l'électrisation est produite par une force électromotrice E agissant dans un circuit dont fait partie le condensateur, et si $\frac{dQ}{dt}$ représente l'intensité dans ce circuit,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt}. \tag{6}$$

Introduisons dans ce circuit une pile de force électromotrice E_0 et de résistance r_1, alors

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E_0 - E}{r_1} = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt}; \tag{7}$$

donc, à une époque quelconque t_1,

$$E(=E_1)=E_0\frac{R}{R+r_1}\left(1-e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right), \tag{8}$$

où

$$T_1=\frac{CRr_1}{R+r_1}.$$

Coupons le circuit r_1 pendant un temps t_2,

$$E(=E_2)=E_1e^{-\frac{t_2}{T_2}}, \tag{9}$$

où

$$T_2=CR.$$

Enfin, pendant un temps t_3, relions les armatures du condensateur par un fil de résistance r_2,

$$E(=E_3)=E_2e^{-\frac{t_3}{T_3}}, \tag{10}$$

où

$$T_3=\frac{CRr_2}{R+r_2}.$$

Si Q_3 est la décharge totale qui se produit à travers ce fil pendant un temps t_3,

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_2)}\left(1-e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right)e^{-\frac{t_2}{T_2}}\left(1-e^{-\frac{t_3}{T_3}}\right). \tag{11}$$

On peut ainsi calculer la décharge qui se produit à travers un fil au moyen duquel on relie les armatures d'un condensateur chargé pendant un temps t_1, puis isolé pendant un temps t_2. Si, comme il arrive d'ordinaire, la durée de charge est suffisante pour que l'on obtienne la charge totale, et la durée de décharge assez longue pour que la décharge puisse être complète, l'expression se réduit à

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_2)}e^{-\frac{t_2}{CR}}. \tag{12}$$

327. Dans un pareil condensateur, chargé d'abord d'une manière quelconque, déchargé ensuite à travers un fil de faible résistance, puis isolé, il n'apparaît point de nouvelle charge. Mais, dans la plupart des condensateurs dont nous disposons effectivement, nous voyons se développer peu à peu, après la décharge et l'isolement, une nouvelle charge de même nature que la première, mais d'intensité moindre : c'est ce qu'on appelle la *charge résiduelle*. Pour nous expliquer son

existence, nous sommes donc obligés d'admettre que la constitution du milieu diélectrique n'est point telle que nous venons de l'admettre. Mais nous allons trouver que cette propriété existe pour un milieu formé de l'assemblage de petites parties constituées elles-mêmes par différents diélectriques simples.

Théorie des diélectriques composés.

328. Supposons, pour plus de simplicité, que le diélectrique consiste en une série de couches planes formées de diverses substances, de surface égale à l'unité, et que les forces électriques agissent suivant une direction normale aux couches.

Soient

$a_1, a_2, \ldots$ les épaisseurs des différentes couches;

$X_1, X_2, \ldots$ les forces électriques résultantes qui agissent dans l'intérieur des différentes couches entre des points pris à l'unité de distance sur la direction normale aux couches;

$p_1, p_2, \ldots$ les intensités des courants dus à la conduction à travers les couches;

$f_1, f_2, \ldots$ les déplacements électriques;

$u_1, u_2, \ldots$ les intensités totales, dues en partie à la conduction, en partie à la variation du déplacement;

$r_1, r_2 \ldots$ les résistances spécifiques par unité de volume;

$K_1, K_2, \ldots$ les pouvoirs inducteurs spécifiques;

$k_1, k_2, \ldots$ les inverses des pouvoirs inducteurs spécifiques;

E la force électromotrice due à une pile voltaïque placée dans la partie du circuit qui va de la dernière couche à la première, couches que l'on suppose formées de substances conductrices;

Q la quantité totale d'électricité qui a passé dans cette partie du circuit jusqu'à l'instant t;

R_0 la résistance de la pile et de ses fils de communication;

σ_{12} la densité superficielle de l'électricité à la surface de séparation de la première et de la seconde couche.

Dans la première couche nous avons : par la loi de Ohm,

$$X_1 = r_1 p_1; \tag{1}$$

par la théorie du déplacement électrique,

$$X_1 = 4\pi k_1 f_1; \tag{2}$$

par la définition de l'intensité totale,

$$u_1 = p_1 + \frac{df_1}{dt}. \tag{3}$$

On a des équations semblables pour les autres couches, les différentes quantités étant affectées de l'indice correspondant à la couche considérée.

Pour déterminer la densité superficielle sur une couche, nous avons une équation de la forme

$$\sigma_{12} = f_2 - f_1 \tag{4}$$

et, pour déterminer sa variation,

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2. \tag{5}$$

En différentiant (4) par rapport à t et égalant le résultat à (5), nous avons

$$p_1 + \frac{df_1}{dt} = p_2 + \frac{df_2}{dt} = u, \quad \text{par exemple,} \tag{6}$$

ou, en tenant compte de (3),

$$u_1 = u_2 = \ldots = u, \tag{7}$$

c'est-à-dire que, dans toutes les couches, l'intensité totale est la même et égale à l'intensité dans la pile et dans ses fils de communication.

Nous avons aussi, en vertu des équations (1) et (2),

$$u = \frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{dX_1}{dt}; \tag{8}$$

d'où nous pouvons tirer X_1, en effectuant sur u l'opération inverse

$$X_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1} u. \tag{9}$$

La force électromotrice totale E est

$$E = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots \tag{10}$$

ou bien

$$E = \left[a_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1} + a_2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{4\pi k_2}\frac{d}{dt}\right)^{-1} + \cdots\right] u, \tag{11}$$

équation entre la force électromotrice extérieure E_1 et l'intensité extérieure u.

Si le rapport de r à k est le même dans toutes les couches, l'équation se réduit à

$$\text{(12)} \qquad E + \frac{r}{4\pi k}\frac{dE}{dt} = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots)u,$$

ce qui est le cas que nous avons déjà examiné et dans lequel nous avons trouvé qu'il ne peut se produire aucun phénomène de décharge résiduelle.

S'il y a n substances, pour lesquelles le rapport de r à k est différent, l'équation générale (11), une fois débarrassée des opérations inverses qui y sont figurées, sera une équation différentielle linéaire d'ordre n en E et d'ordre $(n-1)$ en u, t étant la variable indépendante.

De la forme de cette équation, il ressort clairement que l'ordre des couches est indifférent, et que, s'il y a plusieurs couches formées d'une même substance, on peut les supposer réunies en une seule, sans changer en rien les phénomènes.

329. Supposons d'abord que $f_1, f_2, \dots$ soient tous nuls et que l'on fasse agir subitement une force électromotrice E et soit à en trouver l'effet instantané.

Intégrant (8) par rapport à t, nous trouvons

$$\text{(13)} \qquad Q = \int u\,dt = \frac{1}{r_1}\int X_1\,dt + \frac{1}{4\pi k_1} X_1 + \text{const.}$$

Or, puisque dans ce cas X_1 est toujours fini, $\int X_1\,dt$ doit être inappréciable lorsque t est très petit; par suite, la valeur initiale de X_1 étant nulle, l'effet instantané sera

$$\text{(14)} \qquad X_1 = 4\pi k_1 Q;$$

d'où, d'après l'équation (10),

$$\text{(15)} \qquad E = 4\pi(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots)Q,$$

et si C est la capacité électrique du système mesurée par cette méthode instantanée,

$$\text{(16)} \qquad C = \frac{Q}{E} = \frac{1}{4\pi(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots)}.$$

Ce résultat est le même que l'on aurait obtenu, si l'on avait négligé la conductibilité des couches.

Supposons maintenant que la force électromotrice uniforme E con-

tinue d'agir pendant un temps infiniment long, ou, du moins, jusqu'à ce qu'il se soit établi à travers le système un courant uniforme p.

Nous avons alors

$$X_1 = r_1 p_1, \quad \ldots,$$

et, par suite, d'après (10),

$$E = (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots) p, \tag{17}$$

et si R est la résistance totale du système,

$$R = \frac{E}{p} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots. \tag{18}$$

Dans cet état, nous avons par (2)

$$f_1 = \frac{r_1}{4\pi k_1} p,$$

de sorte que

$$\sigma_{12} = \left(\frac{r_2}{4\pi k_2} - \frac{r_1}{4\pi k_1} \right) p. \tag{19}$$

Si maintenant nous relions subitement les couches extrêmes par un conducteur de faible résistance, E passe brusquement de la valeur initiale E_0 à la valeur zéro, et une quantité d'électricité Q traverse le conducteur.

Pour déterminer Q, nous observons que la nouvelle valeur de X_1 sera, d'après (13),

$$X'_1 = X_1 - 4\pi k_1 Q; \tag{20}$$

d'où, en faisant $E = 0$ dans l'équation (10),

$$0 = a_1 X_1 + \ldots + 4\pi (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots) Q \tag{21}$$

ou encore

$$0 = E_0 + \frac{1}{C} Q; \tag{22}$$

d'où

$$Q = - C E_0,$$

où C est la capacité donnée par l'équation (16). La décharge instantanée est donc égale à la charge instantanée.

Supposons qu'aussitôt après cette décharge on rompe la communication; nous aurons alors $u = 0$, et, d'après l'équation (8),

$$X_1 = X' e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t}, \tag{23}$$

X' étant la valeur initiale après la décharge.

Donc, au bout d'un temps t quelconque,

$$X_1 = E_0\left(\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C\right) e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t}.$$

La valeur de E à un moment quelconque est donc

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} E = E_0 \Bigg[&\left(\frac{a_1 r_1}{R} - 4\pi a_1 k_1 C\right) e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t} \\ &+ \left(\frac{a_2 r_2}{R} - 4\pi a_2 k_2 C\right) e^{-\frac{4\pi k_2}{r_2} t} + \dots \Bigg], \end{aligned}\right.$$

et la décharge instantanée, après un temps quelconque t, est EC : c'est là ce que l'on appelle la *décharge résiduelle*.

Si le rapport de r à k est le même pour toutes les couches, la valeur de E se réduit à zéro. Si ce rapport n'est pas le même pour toutes les couches, ordonnons les termes suivant les valeurs décroissantes de ce rapport.

La somme de tous les coefficients est évidemment nulle, de sorte que $E = 0$ quand $t = 0$. L'ordre est aussi celui des grandeurs décroissantes pour les coefficients et pour les termes exponentiels où t est positif; donc, si t est positif, E est toujours positif, c'est-à-dire que la décharge résiduelle est de même signe que la décharge primaire.

Si t est infiniment grand, tous les termes disparaissent, à moins que l'une des couches ne constitue un isolant parfait; alors r_1 est infini pour cette couche, R est infini pour le système entier, et la valeur finale de E n'est pas zéro, mais

$$(25)\qquad E = E_0(1 - 4\pi a_1 k_1 C).$$

Si donc certaines couches, mais non toutes, sont des isolants parfaits, le système peut conserver une charge résiduelle permanente.

330. Nous allons maintenant déterminer la décharge totale qui se produit à travers un fil de résistance R_0, mis en communication permanente avec les couches extrêmes, dans l'hypothèse que le système a d'abord été chargé par l'application prolongée d'une force électromotrice E.

A chaque instant, nous avons

$$(26)\qquad E = a_1 r_1 p_1 + a_2 r_2 p_2 + \dots + R_0 u = 0$$

et aussi, d'après (3),

$$(27)\qquad u = p_1 + \frac{df_1}{dt};$$

donc

$$(28) \qquad (R + R_0)u = a_1 r_1 \frac{df_1}{dt} + a_2 r_2 \frac{df_2}{dt} + \dots$$

En intégrant, par rapport à t, pour obtenir Q, nous trouvons

$$(29) \qquad (R + R_0)Q = a_1 r_1 (f'_1 - f_1) + a_2 r_2 (f'_2 - f_2) + \dots,$$

où f_1 est la valeur initiale, et f'_1 la valeur finale de f_1.

Or, dans le cas présent, $f'_1 = 0$ et, d'après (2) et (20),

$$f_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{4\pi k_1 R} - C \right);$$

d'où

$$(30) \qquad (R + R_0)Q = -\frac{E_0}{4\pi R} \left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1} + \frac{a_2 r_2^2}{k_2} + \dots \right) + E_0 CR,$$

$$(31) \qquad = -\frac{CE_0}{R} \Sigma\Sigma \left[a_1 a_2 k_1 k_2 \left(\frac{r_1}{k_1} + \frac{r_2}{k_2} \right)^2 \right],$$

la sommation étant étendue à toutes les quantités de cette forme correspondant aux différents couples de couches qu'on peut former.

On voit que Q est toujours négatif, c'est-à-dire en sens inverse du courant qui a servi à charger le système.

L'étude qui vient d'être faite montre qu'un diélectrique formé de couches de diverses natures peut donner lieu aux phénomènes connus sous le nom d'*absorption électrique* et de *décharge résiduelle*, lors même qu'aucune des substances dont sont formées ces couches ne donnerait lieu à ces phénomènes, lorsqu'elle est prise isolément. L'étude des cas où les substances sont disposées autrement qu'en couches conduirait à des résultats analogues, mais les calculs seraient plus compliqués. Notre conclusion doit donc être qu'il faut s'attendre à des phénomènes d'absorption électrique dans le cas de substances faites d'éléments de natures diverses, quand même ces éléments seraient de dimensions microscopiques.

Il ne s'ensuit pas le moins du monde que toute substance qui présente ces phénomènes soit ainsi composée; car ces phénomènes peuvent être l'indice d'une nouvelle espèce de polarisation électrique, dont seraient susceptibles les substances homogènes, et qui, dans certains cas, pourrait ressembler bien plus à une polarisation électrochimique qu'à une polarisation diélectrique.

L'objet de cette étude est seulement d'indiquer le caractère mathématique véritable de ce qu'on appelle l'*absorption électrique*, et de montrer quelle différence fondamentale la distingue de phénomènes calorifiques qui paraissent analogues à première vue.

331. Prenons une plaque épaisse d'une substance quelconque, et chauffons-la d'un côté, de manière à produire un flux de chaleur à travers sa masse; puis, refroidissons brusquement le côté chauffé à la température du côté froid, et abandonnons la plaque à elle-même. Le côté chauffé redeviendra plus chaud que l'autre par conduction, à partir de l'intérieur.

Or on peut produire un phénomène électrique exactement analogue, et, de fait, il se produit sur les câbles télégraphiques; mais ses lois mathématiques, exactement semblables à celles de la chaleur, sont entièrement différentes de celles du condensateur stratifié.

Dans le cas de la chaleur, il y a une véritable absorption de chaleur par la substance, dont l'effet est d'échauffer cette substance. Il est impossible de produire en électricité un phénomène véritablement analogue, mais on peut l'imiter de la manière suivante et lui donner la forme d'une expérience de cours.

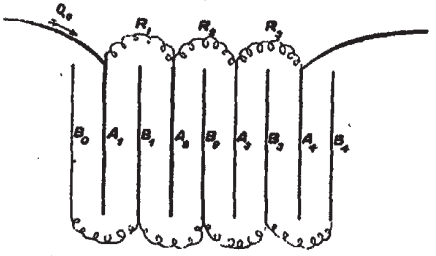
Soient A_1, A_2, ... les armatures intérieures d'une série de condensateurs dont B_1, B_2, ... sont les armatures extérieures.

Relions A_1, A_2, ... en série par des fils de communication, de résistance R, et faisons passer un courant dans cette série, de gauche à droite.

Supposons d'abord les armatures B isolées et non électrisées. La quantité totale d'électricité sur chacune des plaques B doit rester nulle, et, puisque dans tous les cas la charge des plaques A doit être égale et opposée à celle des surfaces opposées, ces plaques ne se chargent pas et l'on n'observe pas de changement dans le courant.

Mais mettons à la terre les plaques B individuellement ou réunies ensemble. Alors, le potentiel de A_1 étant positif, tandis que celui des plaques B est zéro, A_1 prendra une charge positive et B_1 (*fig.* 26)

Fig. 26.



une charge négative.

Si P_1, P_2, ... sont les potentiels des plaques A_1, A_2, ..., C la capa-

cité de chacune d'elles, et si Q_0 est la quantité d'électricité qui passe dans le fil de gauche, Q_1 celle qui passe dans le fil R_1, ..., la quantité qui est sur la plaque A_1 est $Q_0 - Q_1$, et nous avons

$$Q_0 - Q_1 = C_1 P_1.$$

De même

$$Q_1 - Q_2 = C_2 P_2,$$

et ainsi de suite.

Mais, par la loi de Ohm, nous avons

$$P_1 - P_2 = R_1 \frac{dQ_1}{dt},$$

$$P_2 - P_3 = R_2 \frac{dQ_2}{dt}.$$

Si nous supposons que la valeur de C soit la même pour toutes les plaques, et celle de R pour tous les fils, nous aurons une série d'équations de la forme

$$Q_0 - 2Q_1 + Q_2 = RC \frac{dQ_1}{dt},$$

$$Q_1 - 2Q_2 + Q_3 = RC \frac{dQ_2}{dt}.$$

Et, s'il y a n quantités d'électricité à déterminer et que l'on donne la force électromotrice totale ou quelque autre condition quelconque, l'équation différentielle qui détermine chacune d'elles est linéaire d'ordre n.

Dans un appareil disposé de cette manière, M. Varley a réussi à imiter les effets électriques d'un câble de 1200 milles de longueur.

Lorsqu'on fait agir une force électromotrice sur la gauche du fil, l'électricité qui s'écoule d'abord dans le système sert surtout à charger les différents condensateurs en commençant par A_1, et une fraction très faible du courant n'apparaît à l'extrémité de droite qu'au bout d'un temps considérable. Si l'on place des galvanomètres dans le circuit en R_1, R_2, ..., ils ne seront influencés par le courant que l'un après l'autre, et l'intervalle entre les instants où ils donnent des indications égales augmente à mesure que l'on s'avance vers la droite.

332. Dans un câble télégraphique, le fil conducteur est séparé des conducteurs extérieurs par une enveloppe cylindrique de gutta-percha ou de quelque autre matière isolante. Chaque partie du câble devient donc un condensateur dont l'armature extérieure est toujours au potentiel zéro. Donc, dans une partie déterminée d'un câble, la quantité d'électricité qui est libre à la surface du fil conducteur est égale au

produit du potentiel par la capacité de cette partie de câble considérée comme un condensateur.

Si a_1 et a_2 sont les rayons intérieurs et extérieurs de la couche isolante et si K est son pouvoir inducteur spécifique, la capacité de l'unité de longueur du câble est, d'après le § 126,

$$c = \frac{K}{2 \log \frac{a_1}{a_2}}. \tag{1}$$

Soit v le potentiel en un point quelconque du fil, auquel nous pouvons supposer la même section en tous les points.

Soit Q la quantité totale d'électricité qui a traversé dans cette section depuis que le courant a commencé de passer. La quantité d'électricité qui existe au temps t, entre les sections x et $x + \partial x$, est

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right)$$

ou

$$- \frac{\partial Q}{\partial x} dx,$$

ce qui est égal, ainsi que nous l'avons dit, à $cv\partial x$. Donc

$$cv = - \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Dans une section quelconque, la force électromotrice est $- \frac{\partial v}{\partial x}$, et, d'après la loi de Ohm,

$$- \frac{\partial v}{\partial x} = k \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{3}$$

k étant la résistance de l'unité de longueur du conducteur et $\frac{\partial Q}{\partial t}$ l'intensité du courant. Éliminant Q entre (2) et (3), nous trouvons

$$ck \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Telle est l'équation aux différences partielles qu'il faut résoudre pour obtenir à chaque instant le potentiel aux différents points du câble. Elle est identique à l'équation donnée par Fourier pour déterminer la température en un point d'une couche à travers laquelle la chaleur se propage dans une direction normale à la couche. Dans le cas de la chaleur, c représente la capacité de l'unité de volume ou ce que Fourier désigne par CD, et k représente l'inverse de la conductibilité.

Si l'enveloppe n'est pas un isolant parfait, et qu'on représente par k_1

la résistance que l'unité de longueur de cette enveloppe oppose à la conduction dans la direction du rayon, et par ρ_1 la résistance spécifique de la matière isolante, il est aisé de faire voir que

$$k_1 = \frac{1}{2\pi}\rho_1 \log_e \frac{a_1}{a_2}. \tag{5}$$

L'équation (2) n'est plus vraie, car l'électricité n'est plus dépensée seulement à donner au fil la charge cv, mais aussi à fournir un écoulement dont le débit est représenté par $\frac{v}{k_1}$. La dépense d'électricité est donc

$$-\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = c\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{k_1}v, \tag{6}$$

ce qui, par comparaison avec (3), nous donne

$$ck\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{k}{k_1}v, \tag{7}$$

ce qui est l'équation donnée par Fourier pour la propagation de la chaleur dans une tige ou dans un anneau (1).

333. Si nous avions supposé qu'un corps porté à un potentiel élevé est électrisé dans toute sa masse, comme si l'on y avait comprimé de l'électricité, nous serions arrivés à une équation de cette même forme. Il est remarquable que Ohm lui-même, trompé par l'analogie de l'électricité et de la chaleur, se faisait une idée de ce genre; et c'est ainsi que, par une conception erronée, il fut conduit à employer les équations de Fourier pour représenter les vraies lois de la conduction de l'électricité dans un long fil, bien avant que l'on pût soupçonner la raison véritable pour laquelle ces équations se prêtent à cet usage.

Exemple mécanique pour faire comprendre les propriétés des diélectriques.

334. Cinq tubes, de même section, A, B, C, D et P, sont disposés bout à bout, comme le montre la *fig.* 27; A, B, C et D sont égaux et verticaux, P est horizontal.

Les parties inférieures de A, B, C et D sont remplies de mercure; les parties supérieures, ainsi que P, sont remplies d'eau.

Un tube à robinet Q réunit la partie inférieure de A et B à celle

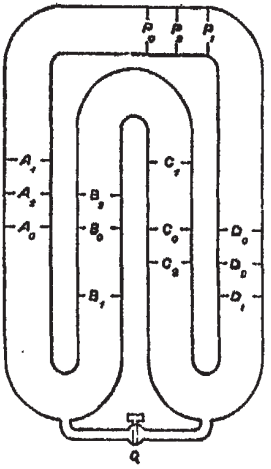
(1) *Théorie de la chaleur*, § 105.

de G et D_1 et l'on fait glisser dans le tube horizontal un piston P.

Supposons d'abord que le niveau de mercure soit le même dans les quatre tubes et soit indiqué par A_0, B_0, C_0, D_0, que le piston soit en P_0 et que le robinet soit fermé.

Déplaçons le piston de P_0 en P_1, sur une longueur a; puisque les sections de tous les tubes sont égales, le niveau de mercure montera

Fig. 27.



d'une hauteur a dans A et C, en A_1 et C_1, et descendra d'une hauteur égale a dans B et D, en B_1 et D_1.

La différence des pressions sur les deux côtés du piston sera représentée par $4a$.

Cette disposition peut servir à représenter l'état d'un diélectrique sur lequel agit une force électromotrice $4a$.

L'excès d'eau dans le tube D peut représenter une charge positive sur une face du diélectrique; l'excès de mercure dans le tube A, une charge négative sur l'autre face; enfin, l'excès de pression qui s'exerce dans le tube P sur le côté du piston tourné vers D, l'excès de potentiel sur la face positive du diélectrique.

Si le piston est libre de se mouvoir, il reviendra en arrière jusqu'en P_0 où il se trouvera en équilibre : ceci représente la décharge totale du diélectrique.

Pendant la décharge, il se produit dans tout le tube un mouve-

ment inverse des liquides, figurant ce changement dans le déplacement électrique que nous avons supposé se produire dans un diélectrique.

Enfin tout le système de tubes est supposé rempli de liquides incompressibles, pour figurer cette propriété des déplacements électriques, qu'il n'y a jamais en aucun point accumulation effective d'électricité.

Considérons maintenant quel effet se produit quand on ouvre le robinet Q pendant que le piston P est en P_1.

Les niveaux de A_1 et D_1 ne changent pas, mais ceux de B et C deviennent égaux et coïncident avec B_0 et C_0.

L'ouverture du robinet Q correspond à l'existence dans le diélectrique de parties ayant un faible pouvoir conducteur, ces parties ne s'étendant pas dans tout le diélectrique, car alors il donnerait un libre passage à l'électricité.

Les charges qui existent sur les deux faces du diélectrique restent isolées, mais leur différence de potentiels diminue.

En fait, la différence des pressions exercées sur les deux faces du piston tombe de $4a$ à $2a$, lorsque le liquide passe par le robinet Q.

Si maintenant on ferme le robinet Q et qu'on laisse le piston P se mouvoir librement, il prend une position d'équilibre P_2, et la décharge semble n'être que de la moitié de la charge.

Le niveau de mercure dans A et dans B est de $\frac{1}{2}\,a$ au-dessus de son niveau primitif, et de $\frac{1}{2}\,a$ au-dessous du niveau primitif dans B et C. C'est ce qu'indiquent les niveaux A_2, B_2, C_2, D_2.

Si alors on fixe le piston et qu'on ouvre le robinet, du mercure passe de B en C, jusqu'à ce que le niveau dans les deux tubes soit encore en B_0 et C_0 et il y a une différence de pression a entre les deux faces du piston P. Si ensuite on ferme le robinet et qu'on laisse le piston libre de se mouvoir, il prend une position d'équilibre P_3, à mi-chemin de P_0 et P_2. Cet effet correspond à la charge résiduelle que l'on observe dans un diélectrique chargé, que l'on a déchargé d'abord, puis abandonné à lui-même. Il reprend peu à peu une partie de sa charge primitive et, s'il est déchargé de nouveau, une troisième charge se forme, les charges successives allant constamment en décroissant. Dans le cas de l'expérience qui sert à notre explication, chaque charge est la moitié de la précédente, et les décharges qui sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc., de la charge primitive, forment une série dont la somme est égale à la charge primitive.

Si, au lieu d'ouvrir et de fermer le robinet, on l'avait laissé pendant toute la durée de l'expérience presque fermé, mais non complè-

tement, on se serait trouvé dans un cas ressemblant à celui de l'électrisation d'un diélectrique qui est un isolant parfait, mais qui, cependant, donne lieu au phénomène appelé *absorption électrique*.

Pour représenter le cas où il y a une véritable conduction par le diélectrique, il faut ou bien pratiquer des fuites à travers le piston, ou bien établir une communication entre le haut du tube A et celui du tube D.

De cette façon, on peut construire une machine servant à expliquer les propriétés de toute espèce de diélectrique : les deux électricités y étant représentées par deux fluides matériels, et le potentiel électrique par une pression hydrostatique. La charge et la décharge sont figurées par les mouvements du piston P, la force électromotrice par la force résultante qui agit sur le piston.

CHAPITRE XI.

MESURE DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE.

335. Dans l'état actuel de la science électrique, la détermination de la résistance électrique d'un conducteur peut être regardée comme l'opération fondamentale en Électricité, au même titre que la détermination des poids est l'opération fondamentale en Chimie.

La raison en est que, pour déterminer en mesures absolues les autres grandeurs électriques : quantité d'électricité, forces électromotrices, intensités, etc., il faut toujours et pour chaque cas passer par une série d'opérations compliquées, comprenant l'observation du temps, la mesure de distances, la détermination des moments d'inertie; et, pour chaque nouvelle détermination, il faut répéter ces opérations, ou du moins quelques-unes d'entre elles, parce que l'on ne peut garder et conserver immuable une unité d'électricité, ou de force électromotrice, ou d'intensité, susceptible de servir à des comparaisons directes.

Mais, si l'on a une fois déterminé la résistance électrique d'un conducteur de forme convenable et fait d'une substance convenablement choisie, on trouve que cette résistance reste la même à la même température, en sorte que ce conducteur peut servir d'étalon de résistance, auquel on compare la résistance des autres conducteurs; or la comparaison de deux résistances est une opération susceptible d'une précision extrême.

L'unité de résistance une fois fixée, on en a construit des copies matérielles à l'usage des électriciens; dans toutes les parties du monde, les résistances peuvent donc s'évaluer en fonction de la même unité. Jusqu'à présent ces bobines de résistance, égales à l'unité, sont le seul exemple d'étalon électrique matériel qui puisse être conservé, copié et employé pour les mesures. Les mesures de capacité électrique, qui ont aussi une grande importance, sont encore défectueuses en raison de l'influence perturbatrice de l'absorption électrique.

336. L'unité de résistance peut être absolument arbitraire : tel était le cas pour l'étalon de Jacobi, qui était un certain fil de cuivre pesant $22^{gr},4932$, long de $7^{m},6197$ et ayant $0^{mm},667$ de diamètre. Des copies

en ont été faites par Leyser, de Leipzig, et se trouvent en différents endroits.

Une autre méthode consiste à définir l'unité comme une masse de dimensions déterminées, d'une substance déterminée. Ainsi l'unité Siemens est la résistance d'une colonne de mercure de 1^m de long, de 1^{mq} de section, à la température de 0°C.

337. Enfin l'unité peut être définie en ayant égard aux systèmes d'unités électrostatiques ou électromagnétiques. Dans la pratique, le système électromagnétique, qui sert pour toutes les opérations télégraphiques, est le seul ensemble d'unités systématiques qui soit actuellement en usage.

Dans le système électromagnétique, ainsi que nous le ferons voir en son temps, la résistance est une quantité homogène à une vitesse et, par suite, peut s'exprimer comme une vitesse.

338. Les premières mesures faites dans ce système sont celles de Weber, qui employait pour unité 1^{mm} par seconde. Sir W. Thomson employa, plus tard, l'unité de 1 pied par seconde; mais le plus grand nombre des électriciens sont convenus d'employer l'unité de l'Association britannique, laquelle est censée la résistance correspondant à une vitesse de 10 millions de mètres par seconde. Cette unité est d'une grandeur plus commode que celle de Weber, qui est trop petite. On la désigne sous le nom d'*unité* A. B., ou encore d'*ohm*, pour y attacher le nom de celui qui a découvert les lois de la résistance.

339. Pour se rappeler sa valeur en mesure absolue, il est utile de se souvenir que 10 millions de mètres sont censés faire la distance du pôle à l'équateur, mesurée sur le méridien de Paris. Donc un corps qui, dans l'espace d'une seconde, cheminerait le long du méridien, du pôle à l'équateur, aurait la vitesse qui, dans le système électromagnétique, est censée représentée par un ohm.

Je dis censée, car, si des recherches plus exactes établissaient que l'ohm, tel qu'on le construit d'après les étalons matériels de l'Association britannique, ne correspond pas véritablement à cette vitesse, les électriciens ne changeraient pas leurs étalons, mais feraient une correction. De même, le mètre est censé la dix-millionième partie de l'arc d'un quadrant; on a reconnu qu'il n'en est point exactement ainsi; on n'a point changé pour cela les dimensions du mètre, mais on exprime les dimensions de la Terre par un nombre moins simple.

Dans le système de l'Association britannique, on a choisi primiti-

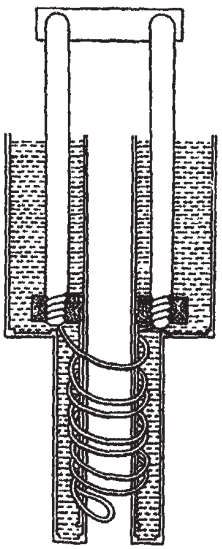
vement l'unité absolue, de façon à représenter aussi exactement que possible une quantité déduite du système électromagnétique.

340. Une unité matérielle représentant cette quantité abstraite ayant été une fois construite, d'autres étalons ont été établis en copiant cette unité, ce qui peut se faire avec une très grande précision; avec une précision bien plus grande, par exemple, que celle avec laquelle on peut copier des règles d'un pied d'après un pied étalon.

Ces copies, faites des substances les plus permanentes, ont été répandues dans toutes les parties du monde; il est donc peu supposable que l'on éprouve jamais de difficulté à en obtenir d'autres copies, si les étalons originaux venaient à être perdus.

Mais on peut reproduire, sans trop de peine et avec une grande exactitude, des unités telles que celle de Siemens; si donc on connaît

Fig. 28.



le rapport de l'ohm au siemens, on pourra reproduire l'ohm sans même avoir d'étalon à copier; toutefois, le travail sera bien plus grand et l'exactitude bien moindre que par la méthode de copie.

Enfin, l'ohm peut être reproduit par la méthode électromagnétique

au moyen de laquelle il a été primitivement déterminé. Cette méthode, bien plus laborieuse que la détermination du pied au moyen du pendule à secondes, est probablement inférieure en exactitude à la précédente. D'autre part, la détermination de l'unité électromagnétique en fonction de l'ohm, avec une exactitude en rapport avec les progrès de la science électrique, est une recherche physique très importante et qui mérite d'être répétée.

Les bobines de résistance qui ont été construites pour représenter l'ohm ont été faites d'un alliage à 2 parties d'argent et 1 partie de platine, en forme de fils de $0^{mm},5$ à $0^{mm},8$ de diamètre et de 1^{m} à 2^{m} de longueur. Ces fils sont soudés à de grosses électrodes de cuivre. Le fil lui-même est couvert de deux couches de soie, noyé dans une masse de paraffine et renfermé dans une boîte de cuivre mince, de façon qu'on puisse le porter aisément à la température pour laquelle sa résistance est exactement de 1 ohm. Cette température est inscrite sur le support isolant de la bobine (*fig.* 28).

Forme des bobines de résistance.

341. Une bobine de résistance est un conducteur susceptible d'être placé facilement dans le circuit voltaïque, de façon à y introduire une résistance connue.

Les électrodes des bouts de la bobine doivent être faites de telle sorte qu'aucune erreur appréciable ne puisse provenir de la manière d'établir ces communications. Pour les résistances considérables, il suffit que les électrodes soient faites par de fortes tiges de cuivre bien amalgamées au bout, dont l'extrémité appuie sur une surface plane de cuivre amalgamé plongée dans un godet de mercure.

Pour de très grandes résistances, il suffit que les électrodes soient de forts morceaux de cuivre, et que les communications soient établies en introduisant entre deux de ces morceaux une cheville de cuivre ou de laiton. Ce moyen est très commode.

La bobine de résistance elle-même est formée d'un fil bien recouvert de soie, dont les extrémités sont soudées à demeure sur les électrodes.

La bobine doit être disposée de façon que l'on puisse en observer aisément la température. A cet effet, le fil enroulé sur un tube est renfermé dans un autre tube, de façon qu'on puisse le placer dans un vase rempli d'eau, et que l'eau ait accès au dedans et au dehors de la bobine.

Pour éviter les effets électromagnétiques du courant dans la bobine,

le fil est d'abord replié sur lui-même, puis enroulé sur la bobine à partir du bas; il y a ainsi des courants égaux et opposés dans les parties adjacentes du fil, dans toute la longueur de la bobine.

Si l'on désire maintenir deux bobines à la même température, on place quelquefois les deux fils côte à côte, puis on les enroule. Ce procédé est particulièrement avantageux lorsqu'il est plus important d'assurer l'égalité des résistances que d'en connaître la valeur absolue : tel est le cas pour les branches égales du pont de Wheatstone (n° 347).

Lorsqu'on essaya de faire les premières mesures de résistance, on employa beaucoup un fil nu enroulé en hélice dans une rainure pratiquée sur un cylindre de matière isolante : c'est ce qu'on appelait un *rhéostat*. Mais on reconnut possible de comparer les résistances avec une précision qui ne comportait plus l'usage d'un instrument à contacts aussi imparfaits que le rhéostat. On emploie encore le rhéostat pour régler des résistances, quand on n'a pas besoin de mesures exactes.

Les bobines de résistance sont généralement faites des métaux dont la résistance est la plus grande et varie le moins avec la température. L'argent allemand remplit très bien ces conditions; mais on a observé qu'avec le temps certains échantillons perdent leurs propriétés. Aussi a-t-on employé pour les bobines étalons divers métaux purs et un alliage de platine et d'argent; durant plusieurs années, les résistances relatives de ces diverses bobines ont été trouvées constantes dans les limites d'exactitude que l'on peut atteindre de nos jours.

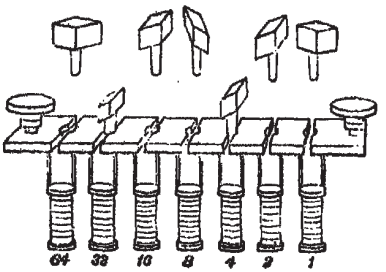
342. Pour de très grandes résistances, plusieurs millions d'ohms par exemple, le fil doit être très long ou très fin, et la construction de la bobine est coûteuse et difficile. Aussi a-t-on proposé le sélénium et le tellure comme substances propres à la construction de grandes résistances. Un mode de construction très ingénieux et très simple a été proposé dernièrement par Phillips (1). Sur un morceau d'ébonite ou de verre dépoli, on trace une ligne fine au crayon, on relie à des électrodes métalliques les bouts de ce filament de plombagine, et l'on recouvre le tout d'un vernis isolant. Si l'on reconnaît que la résistance d'une pareille ligne au crayon reste constante, ce serait la meilleure manière pour obtenir une résistance de plusieurs millions d'ohms.

(1) *Phil. Mag.*, juillet 1870.

343. Il y a différentes dispositions au moyen desquelles il est aisé de mettre des bobines de résistance dans un circuit.

Ainsi, on peut disposer en série dans une boîte un certain nombre de bobines, de résistances 1, 2, 4, 8, 16, ..., rangées suivant les puissances ascendantes de 2 (*fig.* 29).

Fig. 29.



Les électrodes sont formées de fortes pièces de cuivre, disposées au dehors de la boîte, de telle sorte que, par l'introduction entre deux de ces pièces d'une cheville ou d'un coin de cuivre formant dérivation, la résistance de la bobine correspondante soit mise hors circuit. Cette disposition a été introduite par Siemens.

Chaque intervalle entre deux électrodes porte l'indication de la résistance de la bobine correspondante; si donc nous voulons rendre la résistance de la boîte égale, par exemple, à 107, il nous faut exprimer 107 dans le système du numérateur à base 2, soit $64+32+8+2+1$ ou 1101011. Nous retirons ensuite les chevilles des trous correspondant à 64, 32, 8, 2 et 1, et nous laissons les chevilles dans les trous marqués 16 et 4.

Cette méthode, fondée sur l'emploi du système de numération à base 2, est celle qui exige le plus petit nombre de bobines séparées et aussi celle qu'il est le plus aisé de vérifier. Car, si nous avons une autre bobine égale à 1, nous pouvons vérifier l'égalité de 1 et de $1'$, puis celle de $1+1'$ et de 2, celle de $1+1'+2$ et de $4'$, et ainsi de suite.

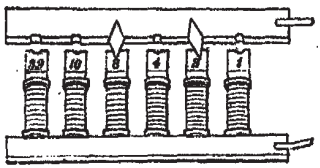
Le seul désavantage de cette disposition est qu'elle exige l'usage familier du système de numération à base 2, que ne possèdent point en général des gens habitués à se servir du système décimal.

344. Les bobines de résistance d'une boîte peuvent être disposées

autrement, dans le but de mesurer les conductibilités au lieu des résistances.

Les bobines (*fig.* 30) sont reliées par une de leurs extrémités à une

Fig. 30.



longue et forte pièce de cuivre, qui forme l'une des électrodes de la boîte, et, par l'autre extrémité, à de fortes pièces de cuivre, comme dans le cas précédent.

L'autre électrode de la boîte est une longue pièce de cuivre : en introduisant des chevilles de cuivre entre les électrodes des bobines et cette pièce, on peut la relier à la première électrode par l'intermédiaire d'un groupe quelconque de bobines. La conductibilité de la boîte est alors la somme des conductibilités des bobines.

Dans la figure, les résistances des bobines sont $1, 2, 4, \ldots$; les chevilles sont mises en 2 et 8 et la conductibilité est $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$, et la résistance de la boîte est, par conséquent, $\frac{8}{5}$ ou 1,6.

Cette méthode, qui consiste à combiner plusieurs bobines pour mesurer des résistances fractionnaires, a été introduite par Sir W. Thomson sous le nom de *méthode des arcs multiples*. (*Voir* § 276.)

De la comparaison des résistances.

345. Soient

E la force électromotrice d'une pile;

R la résistance de cette pile et de ses communications (y compris le galvanomètre qui sert à mesurer la force du courant);

I l'intensité du courant lorsque le circuit de la pile est fermé;

I_1 et I_2 ces intensités lorsqu'on introduit dans le circuit les résistances additionnelles r_1 et r_2;

la loi de Ohm donne

$$E = IR = I_1(R + r_1) = I_2(R + r_2).$$

Éliminant E la force électromotrice et R la résistance de la pile et de

ses communications, nous avons la formule de Ohm

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{(1-l_1)l_2}{(1-l_2)l_1}.$$

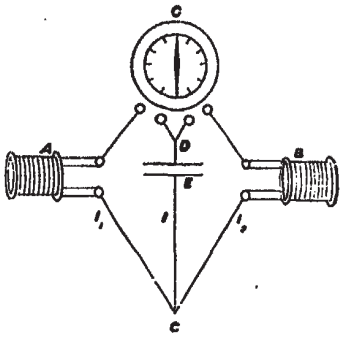
Cette méthode exige que l'on mesure les rapports de l, l_1 et l_2, ce qui suppose un galvanomètre gradué pour des mesures absolues.

Si les résistances r_1 et r_2 sont égales, I_1 et I_2 sont égales; nous pouvons donc vérifier l'égalité de deux intensités au moyen d'un galvanomètre qui ne pourrait pas en mesurer le rapport.

Mais c'est là plutôt un exemple d'une méthode défectueuse que d'une méthode vraiment pratique pour mesurer les résistances. On ne peut maintenir exactement constante la force électromotrice E; la résistance intérieure de la pile est aussi extrêmement variable : on ne doit donc compter sur aucune méthode qui suppose, même pour un temps très court, la constance de ces deux éléments.

346. La comparaison des résistances peut être faite avec une très grande exactitude par l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes, dans lesquelles le résultat ne dépend point des variations de R ou de E (*fig.* 31).

Fig. 31.



La première de ces méthodes repose sur l'emploi du galvanomètre différentiel : cet instrument renferme deux bobines, que les courants traversent indépendamment l'une de l'autre; en sorte que s'ils y passent dans des directions opposées, les bobines exercent sur l'aiguille du galvanomètre des actions de sens contraires, dont l'effet résultant devient nul, lorsque le rapport des intensités prend une certaine valeur $\frac{m}{n}$.

Soient I_1 et I_2 les intensités dans les deux bobines du galvanomètre; la déviation de l'aiguille pourra se représenter par

$$\delta = mI_1 - nI_2.$$

Partageons entre les deux bobines le courant I fourni par la pile; introduisons des résistances A et B dans les circuits de la première et de la seconde bobine, et représentons par α et β le reste de la résistance des bobines et de leurs communications, par r la résistance de la pile et de ses communications de C à D, et par E sa force électromotrice.

Alors la loi de Ohm donne, pour la différence des potentiels entre C et D,

$$I_1(A + \alpha) = I_2(B + \beta) = E - Ir,$$

et, puisque $I_1 + I_2 = I$,

$$I_1 = E\frac{B + \beta}{D}, \quad I_2 = E\frac{A + \alpha}{D}, \quad I = E\frac{A + \alpha + B + \beta}{D}$$

où

$$D = (A + \alpha)(B + \beta) + r(A + \alpha + B + \beta).$$

La déviation de l'aiguille du galvanomètre est donc

$$\delta = \frac{E}{D}[m(B + \beta) - n(A + \alpha)];$$

s'il n'y a point de déviation appréciable, c'est que la quantité entre parenthèses ne peut différer de zéro de plus d'une certaine quantité très petite, laquelle dépend de la puissance de la pile, de la bonne disposition des appareils, de la sensibilité du galvanomètre, enfin de l'exactitude de l'observateur.

Supposons B réglé de façon qu'il n'y ait point de déviation appréciable.

Substituons à A un autre conducteur A′, et réglons-le jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de déviation appréciable. Il est clair qu'alors on a, comme première approximation, $A' = A$.

Pour nous rendre compte du degré d'exactitude de cette évaluation, distinguons par un accent les quantités qui ont changé dans la seconde observation; on a

$$m(B + \beta) - n(A + \alpha) = \frac{D}{E}\delta,$$

$$m(B + \beta) - n(A' + \alpha) = \frac{D'}{E'}\delta',$$

d'où

$$n(A' - A) = \frac{D}{E}\delta - \frac{D'}{E'}\delta'.$$

Si, au lieu d'être sensiblement nuls, δ et δ' étaient seulement égaux, le second membre de l'équation ne serait plus nul, à moins que l'on ne pût aussi affirmer que $E = E'$, et, en fait, la méthode ne serait plus qu'une simple modification de la méthode déjà décrite plus haut.

Mais sa valeur tient à ce que le point sur lequel porte l'observation, c'est l'absence d'une déviation; en d'autres termes, c'est une méthode de réduction à zéro : la non-existence d'une force résulte d'une observation où cette force aurait produit un effet appréciable, si elle avait différé de zéro de plus d'une certaine quantité très petite.

Les méthodes de réduction à zéro ont une grande valeur lorsqu'on peut les employer; mais elles exigent que l'on puisse mettre en jeu simultanément dans l'expérience deux quantités de même espèce égales et opposées.

Dans le cas actuel, δ et δ' sont deux quantités trop petites pour pouvoir être observées, et, par suite, un changement dans la valeur de E n'enlève rien de son exactitude au résultat.

On peut déterminer le degré de précision auquel peut atteindre cette méthode en faisant une série d'observations pour chacune desquelles on fait à nouveau le réglage de A', et en comparant le résultat de chacune de ces observations à la moyenne de la série entière.

Or, si l'on dérègle A' d'une quantité connue, par exemple si l'on introduit en A ou en B une résistance additionnelle égale à la centième partie de A ou B, en observant la déviation qui en résulte pour l'aiguille du galvanomètre, on peut déduire le nombre de degrés correspondant à une erreur de 1 pour 100. Et, pour connaître la précision effectivement obtenue, il faut déterminer la plus petite déviation qui ne puisse échapper à l'observation et la comparer à la déviation qui correspond à une erreur de 1 pour 100.

Si c'est entre A et B que la comparaison (1) doit être faite en échangeant les positions de A et de B, la seconde équation devient

$$m(A + \beta) - n(B + \alpha) = \frac{D'}{E}\delta',$$

d'où

$$(m + n)(B - A) = \frac{D}{E}\delta - \frac{D'}{E'}\delta'.$$

(1) Cette étude est tirée du Traité de Weber sur les mesures galvanométriques. (*Göttingen Transactions*, t. X, p. 65.)

Et, si m et n, A et B, α et β sont à peu près égaux,

$$B - A = \frac{1}{2nE}(A + \alpha)(A + \alpha + 2r)(\delta - \delta'),$$

où l'on peut prendre pour $\delta - \delta'$ la plus petite déviation appréciable du galvanomètre.

Si l'on fait le fil du galvanomètre plus long et plus fin, tout en lui conservant la même masse totale, n varie comme la longueur du fil et α comme le carré de sa longueur, il y a une valeur minimum de $\frac{(A+\alpha)(A+\alpha+2r)}{n}$, pour

$$\alpha = \tfrac{1}{3}(A + r)\left[2\sqrt{1 - \frac{3}{4}\frac{r^2}{(A+r)^2}} - 1\right].$$

Si l'on suppose que r, la résistance de la pile, soit faible relativement à A, ceci donne

$$\alpha = \tfrac{1}{3}A,$$

ou *la résistance de chacune des bobines du galvanomètre doit être le tiers de la résistance à mesurer.*

On trouve alors

$$B - A = \frac{8}{9}\frac{A^2}{nE}(\delta - \delta').$$

Si le courant passant à travers une seule des bobines du galvanomètre donne une déviation Δ, on a (à supposer que la déviation soit exactement proportionnelle à la force qui la produit),

$$\Delta = \frac{nE}{A + \alpha + r} = \frac{3}{4}\frac{nE}{A}, \quad \text{si } r = 0 \text{ et } \alpha = \tfrac{1}{3}A;$$

d'où

$$\frac{B - A}{A} = \frac{2}{3}\frac{\delta - \delta'}{\Delta}.$$

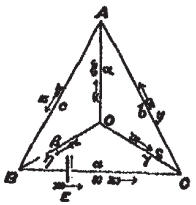
Dans le galvanomètre différentiel, deux courants produisent sur l'aiguille suspendue des effets égaux et contraires. La force avec laquelle chacun d'eux agit sur l'aiguille ne dépend pas seulement de son intensité, mais aussi de la position des spires du fil par rapport à l'aiguille. Donc, à moins que la bobine n'ait été enroulée avec un très grand soin, le rapport de m à n peut changer avec la position de l'aiguille. Il est donc nécessaire de déterminer ce rapport par des moyens convenables au cours de chaque expérience, si l'on suppose qu'il a pu se produire quelque changement dans la position de l'aiguille.

L'autre méthode de réduction à zéro, où l'on emploie le pont de

Wheatstone, ne demande qu'un galvanomètre ordinaire; l'absence de déviation de l'aiguille que l'on observe est due, non plus aux actions opposées de deux courants contraires, mais bien à l'absence de courant dans le fil. Le phénomène observé n'est donc plus seulement une déviation nulle, mais aussi une intensité nulle, et aucune erreur ne peut se produire par le fait d'irrégularités ou de changements de quelque nature que ce soit dans les bobines du galvanomètre. On n'a à demander au galvanomètre que d'être suffisamment sensible pour révéler l'existence et la direction d'un courant, sans aucunement en déterminer la valeur, ni la comparer à celle d'un autre courant.

347. Le pont de Wheatstone est formé essentiellement de six conducteurs reliant quatre points. Une force électromotrice E est mise en jeu entre deux de ces points au moyen d'une pile voltaïque introduite entre B et C (*fig.* 32). On observe au moyen d'un galvanomètre

Fig. 32.



l'intensité entre les deux autres points O et A.

Ce courant devient nul dans certaines conditions : on dit alors que les conducteurs BC et OA sont conjugués l'un à l'autre; cela implique une certaine relation entre les résistances des quatre autres conducteurs, et c'est de cette relation que l'on fait usage pour mesurer les résistances.

Si l'intensité est nulle dans OA, le potentiel O doit être le même que le potentiel en A. Or, si nous connaissons les potentiels en B et C, nous pouvons déterminer les potentiels en O et en A par la règle donnée au § 275, pourvu qu'il n'y ait point de courant dans OA,

$$O = \frac{B\gamma + C\beta}{\beta + \gamma}, \quad A = \frac{Bb + Cc}{b + c};$$

la condition est donc

$$b\beta = c\gamma,$$

b, c, β et γ étant les résistances respectives de CA, AB, BO et OC.

Pour savoir le degré de précision que l'on peut atteindre par cette méthode, il nous faut déterminer l'intensité du courant qui passe dans OA quand la condition n'est pas exactement remplie.

Soient

A, B, C et O les quatre points;
x, y et z les courants suivant BC, CA et AB;
a, b et c les résistances de ces trois conducteurs;
ξ, η, ζ les courants suivant OA, OB et OC;
α, β, γ leurs résistances;
E une force électromotrice qui agit suivant BC.

Désignons par A, B, C et O les potentiels aux points A, B, C et O. Les équations de conduction sont

$$\begin{aligned} ax &= B - C + E, & \alpha\xi &= O - A, \\ by &= C - A, & \beta\eta &= O - B, \\ cz &= A - B, & \gamma\zeta &= O - C, \end{aligned}$$

et les équations de continuité sont

$$\begin{aligned} \xi + y - z &= 0, \\ \eta + z - x &= 0, \\ \zeta + x - y &= 0. \end{aligned}$$

En considérant le système comme formé de trois circuits OBC, OCA et OAB, dans lesquels les intensités sont x, y et z, et en appliquant à chaque circuit la règle de Kirchhoff, nous éliminons les valeurs des potentiels O, A, B, C et des intensités ξ, η, ζ, et nous obtenons les équations suivantes en x, y et z,

$$\begin{aligned} (a+\beta+\gamma)x - \gamma y - \beta z &= E, \\ -\gamma x + (b+\gamma+\alpha)y - \alpha z &= 0, \\ -\beta x - \alpha y + (c+\alpha+\beta)z &= 0; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$D = \begin{vmatrix} a+\beta+\gamma & -\gamma & -\beta \\ -\gamma & b+\gamma+\alpha & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & c+\alpha+\beta \end{vmatrix},$$

nous tirons

$$\xi = \frac{E}{D}(b\beta - c\gamma),$$

et

$$x = \frac{E}{D}[(b+\gamma)(c+\beta) + a(b+c+\beta+\gamma)].$$

348. La valeur de D peut être mise sous une forme symétrique

$$D = abc + bc(\beta+\gamma) + ca(\gamma+\alpha) + ab(\alpha+\beta) + (a+b+c)(\gamma\alpha+\alpha\beta+\beta\gamma),$$

ou bien, puisque nous supposons la pile dans le conducteur a et le galvanomètre dans le conducteur α, nous pouvons remplacer a par B résistance de la pile et α par G résistance du galvanomètre. Nous trouvons alors

$$D = BG(b+c+\beta+\gamma) + B(b+\gamma)(c+\beta) + G(b+c)(\beta+\gamma) + bc(\beta+\gamma) + \beta\gamma(b+c).$$

Si la force électromotrice E agissait suivant OA, la résistance de OA restant toujours égale à α et si le galvanomètre était placé dans BC, la résistance de BC restant a, la valeur de D resterait la même, et l'intensité dans BC, due à une force électromotrice E agissant suivant OA, serait égale à l'intensité suivant OA due à une force électromotrice agissant suivant BC.

Si l'on détache simplement la pile et le galvanomètre et si, sans altérer leurs résistances respectives, on attache la pile en A et O et le galvanomètre en B et C, il faut échanger les valeurs de B et G dans l'expression de D. Si D′ est la valeur de D après cet échange, on trouve

$$D - D' = (G-B)[(b+c)(\beta+\gamma) - (b+\gamma)(\beta+c)] = (B-G)(b-\beta)(c-\gamma).$$

Supposons que la résistance du galvanomètre soit plus grande que celle de la pile.

Supposons également que, dans sa première position, le galvanomètre relie le point de jonction des deux conducteurs les moins résistants β et γ au point de jonction des deux conducteurs les plus résistants b et c; ou en d'autres termes, que, supposant les quantités b, c, β et γ rangées par ordre de grandeur, b et c soient reliés ensemble, et β et γ également ensemble. Alors les quantités $b-\beta$ et $c-\gamma$ sont de même signe, leur produit est positif, et $D - D'$ est de même signe que $B - G$.

Si donc le galvanomètre est placé de façon à relier le point de jonction des deux plus grandes résistances au point de jonction des deux plus petites, et si sa résistance est supérieure à celle de la pile, la valeur de D est moindre et les déviations du galvanomètre sont plus grandes que si l'on établit les communications de l'autre manière.

Donc, pour obtenir dans un système donné les plus grandes déviations du galvanomètre, la règle est la suivante :

Des deux résistances de la pile et du galvanomètre, placer la

plus grande de façon qu'elle relie le point de jonction des deux plus grandes au point de jonction des deux plus petites des quatre autres résistances.

349. Soit à déterminer le rapport des résistances des conducteurs AB et AC, en trouvant sur le conducteur BOC un point O tel que, les points A et O étant reliés par un fil sur lequel est embroché un galvanomètre, aucune déviation appréciable de l'aiguille ne se produise lorsque l'on fait agir la pile entre les points B et C.

On peut admettre que le conducteur BOC soit un fil de résistance uniforme, divisé en parties égales, en sorte que l'on puisse lire de suite le rapport des résistances de BO à OC.

Mais au lieu que tout le conducteur soit formé de ce fil uniforme, on peut aussi n'en faire que la partie voisine de O, et prendre pour parties latérales des bobines de forme quelconque et de résistance exactement déterminée.

Nous allons maintenant employer une notation différente de la notation symétrique avec laquelle nous avons commencé.

Soient

R la résistance totale de BAC;
$c = m\mathrm{R}$ et $b = (1-m)\mathrm{R}$;
S la résistance totale de BOC;
$\beta = n\mathrm{S}$ et $\gamma = (1-n)\mathrm{S}$.

La valeur de n se lit directement et celle de m s'en déduit lorsqu'il n'y a plus de déviation appréciable du galvanomètre.

Soient B la résistance de la pile et de ses communications; G celle du galvanomètre et de ses communications.

Nous trouvons, comme plus haut,

$$\mathrm{D} = \mathrm{G}(\mathrm{BR} + \mathrm{BS} + \mathrm{RS}) + m(1-m)\mathrm{R}^2(\mathrm{B}+\mathrm{S}) + n(1-n)\mathrm{S}^2(\mathrm{B}+\mathrm{R}) + (m+n-2mn)\mathrm{BRS},$$

et, si ξ est l'intensité dans le fil du galvanomètre,

$$\xi = \frac{\mathrm{ERS}}{\mathrm{D}}(n-m).$$

Pour obtenir les résultats les plus exacts, nous devons rendre les déviations de l'aiguille aussi grandes que possible relativement à la valeur de $n-m$. C'est à quoi l'on arrive en choisissant convenablement les dimensions du galvanomètre et le fil dont la résistance sert de terme de comparaison.

On fera voir, quand on traitera de la Galvanométrie (§ 716), que si la forme du fil dans un galvanomètre change, sa masse restant constante, la déviation de l'aiguille produite par l'unité d'intensité est proportionnelle à la longueur, et que la résistance croît comme le carré de la longueur. D'où l'on tire que la déviation maximum se produit quand la résistance du fil du galvanomètre est égale à la résistance du reste du circuit.

Dans le cas actuel, si δ est la déviation,

$$\delta = C\sqrt{G}\xi,$$

où C est une certaine constante et G la résistance du galvanomètre qui varie comme le carré de la longueur de son fil; d'où l'on trouve que, quand δ est maximum, la partie de la valeur de D qui renferme G doit devenir égale au reste de l'expression.

Si nous posons aussi $m = n$, ce qui est le cas lorsque nous avons fait une observation correcte, nous trouvons que la meilleure valeur de G est

$$G = n(1-n)(R+S).$$

On peut aisément obtenir ce résultat, en considérant la résistance du système de A à O et se souvenant que BC, étant conjugué de AO, n'a aucun effet sur cette résistance.

Nous trouvons de même que, étant donnée la surface agissante totale de la pile, la disposition la plus avantageuse de cette pile est réalisée quand

$$B = \frac{RS}{R+S}.$$

Enfin, nous déterminons la valeur de S par la condition qu'un changement donné dans la valeur de n produise la plus grande déviation possible au galvanomètre. Différentiant l'expression de ξ, nous trouvons ainsi

$$S^2 = \frac{BR}{B+R}\left[R + \frac{G}{n(1-n)}\right].$$

Si l'on doit faire un grand nombre de déterminations pour lesquelles la résistance à mesurer présente à peu près la même valeur, on peut se donner la peine de préparer un galvanomètre et une pile spécialement en vue de ces mesures. La meilleure disposition est alors

$$S = R, \quad B = \tfrac{1}{2}R, \quad G = 2n(1-n)R$$

et, si $n = \frac{1}{2}$,

$$G = \tfrac{1}{2}R.$$

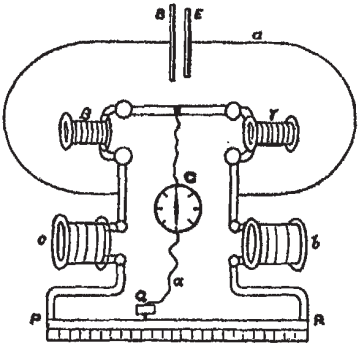
Sur l'emploi du pont de Wheatstone.

350. Nous avons exposé la théorie générale du pont de Wheatstone; nous allons maintenant considérer quelques-unes de ses applications.

La comparaison qui peut être effectuée avec le plus d'exactitude est celle de deux résistances égales.

Supposons que β (*fig.* 33) soit une bobine de résistance étalon et que nous voulions régler la résistance de γ à être égale à celle de β.

Fig. 33.



Deux autres bobines, *b* et *c*, sont préparées, égales entre elles ou à peu près; puis les quatre bobines sont mises en place, leurs électrodes plongeant dans des godets de mercure, de façon que le courant de la pile se partage entre les deux branches formées, l'une par β et γ et l'autre par *b* et *c*. Les bobines *b* et *c* sont reliées par un fil PR, de résistance aussi uniforme que possible, pourvu d'une échelle divisée en parties égales.

Le fil du galvanomètre relie le point de rencontre de β et de γ avec un point Q du fil PR, que l'on fait varier jusqu'à ce que, fermant d'abord le circuit de la pile, puis celui du galvanomètre, on n'observe plus aucune déviation de l'aiguille.

On échange alors les positions des bobines β et γ, et l'on trouve une nouvelle position de Q. Si cette nouvelle position est la même que l'ancienne, nous savons que l'échange de β et de γ n'a produit aucun changement dans le rapport des résistances et que, par suite, γ est bien réglé. S'il faut déplacer Q, le sens et la grandeur de ce déplacement indiqueront la nature et la grandeur du changement qu'il faut apporter à la longueur du fil γ pour que sa résistance devienne égale à celle de β.

Si les résistances des bobines b et c, chacune d'elles comprenant la portion du fil PR qui s'étend jusqu'au point marqué zéro sur l'échelle, sont égales aux résistances de b et de c divisions du fil, et si la lecture de l'échelle qui correspond à Q est x dans le premier cas, y dans le second,

$$\frac{c+x}{b-x}=\frac{\beta}{\gamma},\quad \frac{c+y}{b-y}=\frac{\gamma}{\beta};$$

d'où

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1+\frac{(b+c)(y-x)}{(b+x)(b-y)}.$$

Puisque $b-y$ est à peu près égal à $c+x$ et que tous deux sont grands par rapport à x ou à y, ceci peut s'écrire

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1+4\frac{y-x}{b+c}$$

et

$$\gamma=\beta\left(1+2\frac{y-x}{b+c}\right).$$

Ayant réglé γ aussi bien que possible, nous substituons à b et à c d'autres bobines, de résistance dix fois plus grande, par exemple.

La différence qui subsiste encore entre β et γ produira alors dans la position de Q une variation dix fois plus grande qu'avec les premières bobines, et nous pouvons ainsi augmenter constamment l'exactitude de notre comparaison.

Le réglage se fait plus vite au moyen d'un fil et d'un contact que l'on déplace, qu'au moyen d'une boîte de résistances, et il se fait d'une manière continue.

On ne doit jamais introduire dans le fil par le contact mobile la pile au lieu du galvanomètre, car le passage d'un courant énergique par le point de contact détériorerait la surface du fil. Cette disposition s'applique donc au cas où la résistance du galvanomètre est plus grande que celle de la pile.

Si l'on donne γ la résistance à mesurer, a la résistance de la pile et α celle du galvanomètre, les valeurs les plus avantageuses des autres résistances sont, ainsi que l'a fait voir M. Oliver Heaviside (*Phil. Mag.*, février 1873),

$$c=\sqrt{a\alpha},$$

$$b=\sqrt{a\gamma\frac{\alpha+\gamma}{a+\gamma}},$$

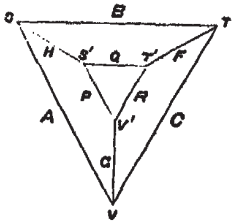
$$\beta=\sqrt{\alpha\gamma\frac{a+\gamma}{\alpha+\gamma}}.$$

De la mesure des petites résistances.

351. Si l'on introduit dans un circuit un conducteur court et épais, sa résistance est très faible à côté des résistances causées par les défauts inévitables des attaches, contacts imparfaits, mauvaises soudures, etc., et des mesures faites de la façon qu'on vient de décrire ne donneraient pas une valeur correcte de la résistance.

L'objet de ces expériences est, en général, de déterminer la ré-

Fig. 34.



sistance spécifique d'une substance, et l'on y a recours si la substance ne peut être obtenue sous forme de fil long et fin ou si l'on doit mesurer la résistance transversale aussi bien que la résistance longitudinale.

Sir W. Thomson (1) a décrit une méthode applicable dans des cas de ce genre, que nous pouvons prendre comme exemple d'un système à neuf conducteurs.

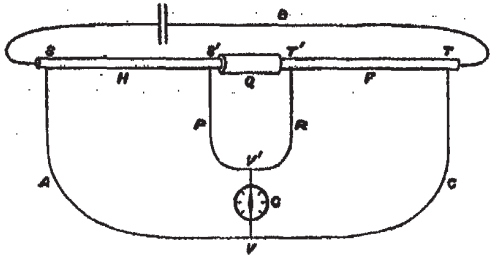
Le point le plus important de cette méthode est que l'on mesure la résistance non pas du conducteur tout entier, mais seulement de la partie de ce conducteur comprise entre deux repères voisins de ses extrémités.

La résistance que nous voulons mesurer est celle que rencontre un courant dont l'intensité est uniforme dans toutes les sections du conducteur, et qui s'écoule parallèlement à l'axe de ce conducteur. Or, dans le voisinage des extrémités, lorsque le courant pénètre par des électrodes soudées, amalgamées ou simplement serrées contre les extrémités du conducteur, il y a généralement un défaut d'uniformité dans la distribution de l'intensité dans le conducteur; tandis qu'à une courte distance des électrodes, l'intensité devient sensiblement uniforme. Le lecteur peut se reporter à l'étude et aux diagrammes

(1) *Proc. R. S.*, 6 juin 1861.

donnés au § 193, où un courant pénétrant par un côté dans une bande de métal à bords parallèles devient bientôt parallèle à ces bords.

Fig. 35.



On doit donc comparer la résistance des conducteurs entre certains repères S, S′ et T, T′.

Les conducteurs sont disposés à la suite l'un de l'autre; reliés aussi parfaitement que possible, dans le circuit d'une pile à faible résistance. Un fil SVT touche les conducteurs en S et en T; un autre, S′V′T′, les touche en S′ et T′.

Le fil du galvanomètre relie les points V et V′ de ces deux fils.

Les fils SVT et S′V′T′ sont pris assez résistants pour que l'on puisse négliger devant leur résistance celle qui est due aux contacts imparfaits en S, T, S′ et T′; V et V′ sont pris de façon que les résistances des deux branches de chacun des deux fils soient à peu près dans le rapport des résistances des conducteurs.

Appelons

H et F les résistances des conducteurs SS′ et TT′;
A et C celles des branches SV et VT;
P et R celles des branches S′V′ et V′T′;
Q celle de la pièce S′T′ qui relie les conducteurs;
B celle de la pile et de ses communications;
G celle du galvanomètre et de ses communications.

La symétrie de ce système se comprend aisément d'après le diagramme simplifié (*fig.* 34).

La condition pour que la pile B et le galvanomètre G soient des conducteurs conjugués est, dans ce cas,

$$\frac{F}{C}-\frac{H}{A}+\left(\frac{R}{C}-\frac{P}{A}\right)\frac{Q}{P+Q+R}=0.$$

Or la résistance de la pièce de communication Q est aussi faible

qu'il nous est possible de le faire. Si elle était nulle, l'équation se réduirait à

$$\frac{F}{C} - \frac{H}{A} = 0,$$

et le rapport des résistances à comparer serait égal au rapport de C à A, comme dans la forme ordinaire du pont de Wheatstone.

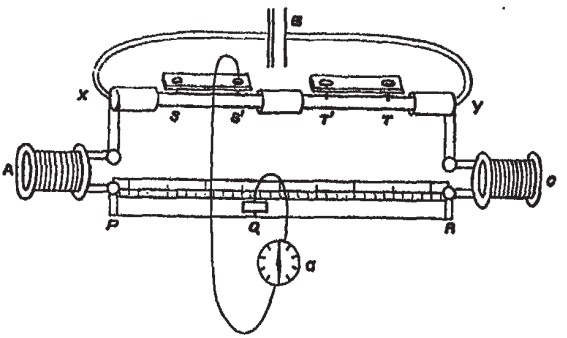
Dans le cas actuel, la valeur de Q est petite en comparaison de P ou de R; si donc nous prenons les points V et V', de façon que le rapport de R à C soit à peu près égal au rapport de P à A, le dernier terme de l'équation s'annule, et nous avons

$$\frac{F}{H} = \frac{C}{A}.$$

Le succès de cette méthode dépend, dans une certaine mesure, de la perfection des contacts entre les fils et les conducteurs que l'on examine, en S, S', T et T'. Dans la méthode suivante, employée par MM. Matthiessen et Hockin (1), on n'a pas à se préoccuper de cette condition.

352. Les conducteurs à examiner sont disposés de la façon qui vient d'être dite : les attaches sont faites aussi bien que possible, et l'on se propose de comparer la résistance de la partie comprise entre les repères S, S' du premier conducteur et la résistance de la partie comprise entre les repères T, T' du second (*fig.* 36).

Fig. 36.



Deux pointes ou deux arêtes vives, faites d'une substance conduc-

(1) *Laboratory*, Matthiessen et Hockin, *Sur les alliages*.

tricé, sont fixées dans un morceau de matière isolante, de façon que l'on puisse mesurer exactement la distance qui les sépare. Cet appareil étant placé sur le conducteur à examiner, ses points de contact avec ce conducteur sont à une distance connue SS'. Chacune de ces pièces de contact est reliée à un godet de mercure où l'on peut plonger une des électrodes du galvanomètre.

Le reste de l'appareil est disposé comme dans le pont de Wheatstone, avec des bobines ou des boîtes de résistance en A et C, un fil PR et un contact mobile Q auquel est reliée l'autre électrode du galvanomètre.

Supposons le galvanomètre relié à S et Q, et soient A_1 et C_1 ainsi disposés, et la position de Q ainsi déterminée en Q_1 qu'il n'y ait point de courant dans le fil du galvanomètre.

Nous savons alors que

$$\frac{XS}{SY} = \frac{A_1 + PQ_1}{C_1 + Q_1R},$$

XS, PQ, ... étant mis pour représenter les résistances de ces conducteurs.

De là nous tirons

$$\frac{XS}{XY} = \frac{A_1 + PQ_1}{A_1 + C_1 + PR}.$$

Relions maintenant à S' l'électrode du galvanomètre, et transportons des bobines de résistance de C en A, jusqu'à ce que nous puissions établir l'équilibre électrique dans le fil du galvanomètre en plaçant Q en un certain point Q_2 du fil. Soient C_2 et A_2 les nouvelles valeurs de C et A, soit

$$A_1 + C_1 + PR = A_2 + C_2 + PR = R.$$

Nous avons, comme précédemment,

$$\frac{XS'}{XY} = \frac{A_2 + PQ_2}{R},$$

d'où

$$\frac{SS'}{XY} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1Q_2}{R}.$$

De même, en mettant l'appareil sur le second conducteur en TT' et en transportant encore des résistances, nous aurons, quand l'électrode est en T',

$$\frac{XT'}{XY} = \frac{A_3 + PQ_3}{R},$$

et, quand elle est en T,

$$\frac{XT}{XY} = \frac{A_1 + PQ_1}{R};$$

d'où

$$\frac{TT'}{XY} = \frac{A_1 - A_2 - Q_2 Q_1}{R}.$$

Nous pouvons donc en tirer le rapport des résistances SS′ et TT′,

$$\frac{SS'}{TT'} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1 Q_2}{A_1 - A_2 + Q_2 Q_1}.$$

Si l'on ne recherche une grande précision, on peut se passer des bobines A et C, et alors on trouve

$$\frac{SS'}{TT'} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_2 Q_1}.$$

Lorsqu'on lit la position de Q sur un fil de 1^m de longueur, on ne peut guère compter sur une approximation supérieure à $\frac{1}{10}$ de millimètre, et la résistance du fil peut présenter des variations considérables en ses différents points par suite de différences de température, de frottements, etc. Si donc on veut obtenir une grande précision, on introduit en A et C des bobines de résistance considérable, dont on peut déterminer le rapport des résistances plus exactement que le rapport des résistances des parties en lesquelles le point Q partage le fil.

Il y a lieu de remarquer que dans cette méthode l'exactitude des résultats ne dépend nullement de la perfection des contacts en S, S′, T et T′.

Cette méthode peut être appelée *méthode différentielle du pont de Wheatstone*, car elle repose sur la comparaison d'observations séparées.

Une condition essentielle d'exactitude dans cette méthode est que la résistance des communications reste la même pendant le cours des quatre opérations qui sont nécessaires pour obtenir une détermination complète. Aussi doit-on toujours répéter cette série d'opérations dans le même ordre, pour découvrir les changements qui auraient pu se produire dans ces résistances.

Comparaison des grandes résistances.

353. Si la résistance à mesurer est très considérable, on peut comparer les potentiels des différents points du système au moyen d'un

électromètre sensible, tel que l'électromètre à quadrants décrit au § 219.

Si les conducteurs dont on doit mesurer la résistance sont placés en série et traversés par le courant d'une pile de force électromotrice considérable, la différence des potentiels aux extrémités de chaque conducteur est proportionnelle à la résistance de ce conducteur. Donc, en reliant les électrodes de l'électromètre aux extrémités d'un conducteur, puis d'un autre, on peut déterminer le rapport de leurs résistances.

C'est là la méthode la plus directe pour déterminer des résistances; mais elle suppose l'emploi d'un électromètre aux indications duquel on puisse se fier, et nous devons être assurés que le courant reste constant pendant la durée de l'expérience.

On peut aussi disposer quatre conducteurs de grande résistance, comme dans un pont de Wheatstone, et former le pont lui-même par les électrodes d'un électromètre au lieu de celles d'un galvanomètre. L'avantage de cette méthode est qu'il n'y a pas besoin d'un courant permanent pour produire la déviation de l'électromètre, au lieu que le galvanomètre ne dévie que si son fil est traversé par un courant.

354. Lorsque la résistance d'un conducteur est si grande, que le courant qu'y produit toute force électromotrice dont on dispose soit encore trop petit pour être mesuré directement au galvanomètre, on peut employer un condensateur pour y accumuler l'électricité pendant un certain temps; ensuite, en déchargeant ce condensateur à travers un galvanomètre, on peut évaluer la quantité d'électricité accumulée : c'est la méthode de MM. Bright et Clark pour essayer les soudures des câbles sous-marins.

355. Mais la manière la plus simple de mesurer la résistance d'un pareil conducteur consiste à charger un condensateur de grande capacité et à relier ses deux armatures aux électrodes d'un électromètre et aux extrémités du conducteur.

Soient

E la différence de potentiels indiquée par l'électromètre;
S la capacité du condensateur;
Q la charge sur chacune de ses surfaces;
R la résistance du conducteur;
x l'intensité du courant qui le traverse,

on a, d'après la théorie des condensateurs,

$$Q = SE;$$

d'après la loi de Ohm,

$$E = Rx;$$

d'après la définition de l'intensité,

$$x = -\frac{dQ}{dt};$$

d'où

$$-Q = RS\frac{dQ}{dt}$$

et

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RS}},$$

Q_0 étant la charge initiale au temps $t = 0$.

De même

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{RS}},$$

E_0 étant la première lecture de l'électromètre et E la lecture au temps t.

De là nous tirons

$$R = \frac{t}{S(\log_e E_0 - \log_e E)},$$

ce qui donne R en mesure absolue. Dans cette expression, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur d'une division de l'échelle de l'électromètre.

Si la capacité S du condensateur est évaluée en mesure électrostatique par un certain nombre de mètres, R est aussi donné en mesure électrostatique comme l'inverse d'une vitesse.

Si S est donné en mesure électromagnétique, ses dimensions sont $\frac{T^2}{L}$ et R est une vitesse.

Comme le condensateur lui-même n'est pas un isolant parfait, il est nécessaire de faire deux expériences. Dans la première, on détermine la résistance R_0 du condensateur lui-même; dans la seconde, celle du condensateur ayant ses armatures reliées par le conducteur. Soit R' cette résistance. Alors la résistance R du conducteur est donnée par l'équation

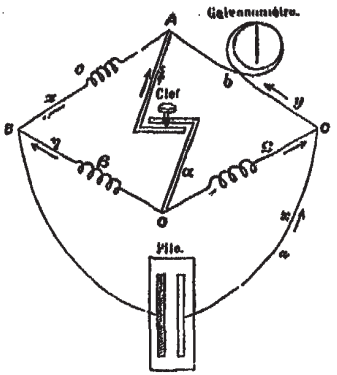
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_0}.$$

Cette méthode a été employée par M. Siemens.

Méthode de Thomson (1) pour déterminer la résistance d'un galvanomètre.

356. Une disposition semblable à celle du pont de Wheatstone (*fig.* 37) a été employée avec avantage par Sir W. Thomson pour dé-

Fig. 37.



terminer la résistance du galvanomètre dont on se sert. Elle a été suggérée à Sir W. Thomson par la méthode de Mance (*voir* § 357).

Comme précédemment, plaçons la pile entre B et C, sur la figure du § 347; mais mettons le galvanomètre en CA au lieu de OA. Si $b\beta - c\gamma$ est nul, le conducteur OA est conjugué de BC, et, puisqu'il n'y a point de courant produit dans OA par la pile placée dans BC, l'intensité du courant dans un quelconque des conducteurs est indépendante de la résistance de OA. Donc la déviation du galvanomètre placé en CA restera la même, que la résistance de OA soit grande ou petite. On observe donc si la déviation du galvanomètre reste la même lorsqu'on réunit O et A par un conducteur de faible résistance ou lorsqu'on rompt cette communication; et lorsque, par un réglage convenable des résistances des conducteurs, ce résultat a été obtenu, on sait que la résistance du galvanomètre est

$$b = \frac{c\gamma}{\beta},$$

c, γ et β étant des résistances de bobines connues.

Il y a lieu de remarquer que cette méthode n'est point une méthode

(1) *Proc. R. S.*, 19 janvier 1871.

de réduction à zéro, si l'on entend par là qu'il ne passe point de courant dans le galvanomètre; mais c'est une méthode de réduction à zéro, en ce sens que ce que l'on observe est un fait négatif, le fait que la déviation du galvanomètre ne change pas quand on établit un certain contact. Une observation de ce genre a plus de valeur que l'observation de l'égalité de deux déviations du même galvanomètre; car, dans ce dernier cas, la force de la pile ou la sensibilité du galvanomètre peuvent changer dans l'intervalle des mesures, au lieu que, si la déviation reste constante malgré certains changements que nous pouvons répéter à volonté, nous sommes sûrs que l'intensité est complètement indépendante de ces changements.

On peut déterminer aisément la résistance de la bobine d'un galvanomètre en employant le pont de Wheatstone, à la manière ordinaire, et en mettant en OA un autre galvanomètre. Par la méthode que l'on vient de décrire, le galvanomètre sert à mesurer lui-même sa propre résistance.

Méthode de Mance (1) pour déterminer la résistance de la pile.

337. La mesure de la résistance d'une pile qui fonctionne présente des difficultés bien plus grandes; car on trouve que la résistance de la pile éprouve un changement considérable quelque temps après que l'on a changé la force du courant qui traverse cette pile. Dans la plupart des méthodes communément employées pour mesurer la résistance des piles, il se produit au cours même des opérations de ces variations dans la force du courant qui traverse la pile, par suite, les résultats sont rendus incertains.

La méthode de Mance ne prête pas à cette objection : la pile est mise en BC et le galvanomètre en CA. La communication entre O et B est alternativement établie et rompue.

Or la déviation de l'aiguille du galvanomètre reste constante, quelques changements que subisse la résistance de OB, pourvu que OB et AC soient conjugués. On peut regarder ce résultat comme un cas particulier de ce qui a été établi au § 347, on peut aussi l'obtenir directement en éliminant z et β dans les équations de ce paragraphe; on a alors

$$(a\alpha - c\gamma)x + (c\gamma + c\alpha + cb + b\alpha)y = \Sigma\alpha.$$

Pour que y soit indépendant de x et, par suite, de β, il faut que l'on

(1) *Proc. R. S.*, 19 janvier 1871.

ait

$$a\alpha = c\gamma.$$

On a ainsi la résistance de la pile en fonction de c, γ et α.

Si la condition $a\alpha = c\gamma$ est remplie, le courant qui passe dans le galvanomètre est

$$\frac{E\alpha}{cb + \alpha(a + b + c)}$$

ou

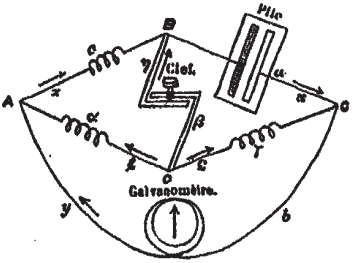
$$\frac{E\gamma}{ab + \gamma(a + b + c)}.$$

Pour nous rendre compte de la sensibilité de cette méthode, supposons que la condition

$$a\alpha = c\gamma$$

soit remplie à peu près (*fig.* 38), mais non entièrement, et qu'il passe

Fig. 38.



dans le galvanomètre un courant y_0 lorsque les points O et B sont reliés par un conducteur de résistance négligeable, un courant y_1 lorsque la communication est entièrement rompue entre O et B.

Pour trouver ces valeurs, nous devons faire $\beta = 0$ et $\beta = \infty$ dans la formule générale de y et comparer les résultats.

La valeur générale de y est

$$\frac{c\gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{D} E,$$

D désignant la même expression qu'au § 348. Donnant à β les valeurs indiquées plus haut, il est aisé de voir que les expressions de y_0 et de y_1 sont à peu près

$$\gamma + \frac{c(c\gamma - a\alpha)y^2}{\gamma(c + \alpha)E},$$

$$\gamma - \frac{b(c\gamma - a\alpha)y^2}{\gamma(\gamma + \alpha)E}.$$

De ces valeurs nous tirons

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\alpha(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(c+\alpha)(\alpha+\gamma)}.$$

Donc la résistance c du conducteur AB doit être égale à a, celle de la pile; α et γ doivent être égaux et aussi petits que possible, et b doit être égal à $\alpha + \gamma$.

Puisqu'un galvanomètre a sa plus grande sensibilité lorsqu'il est près de sa position de repos, avant d'établir le contact entre O et B, nous ramènerons l'aiguille au zéro au moyen d'aimants fixes.

Quand on mesure de cette façon la résistance de la pile, aucune partie de l'opération ne modifie l'intensité dans le galvanomètre; on peut donc mesurer la résistance de la pile pour toute intensité du courant et déterminer comment l'intensité réagit sur la résistance (1).

Si y est l'intensité du courant dans le galvanomètre, les intensités dans la pile seront x_0 lorsque la clef est abaissée et x_1 quand elle est relevée, où l'on a

$$x_0 = y\left[1 + \frac{b}{\gamma} + \frac{\alpha c}{\gamma(\alpha+c)}\right], \quad x_1 = y\left(1 + \frac{b}{\alpha+\gamma}\right),$$

la résistance de la pile étant

$$a = \frac{c\gamma}{\alpha}$$

et sa force électromotrice

$$E = y\left[b + c + \frac{c}{\alpha}(b+\gamma)\right].$$

La méthode du § 356, pour déterminer la résistance d'un galvanomètre, ne diffère de celle-ci qu'en ce que les contacts sont établis et rompus entre O et A au lieu de O et B; en échangeant α et β, nous obtenons pour ce cas

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{\beta}{\gamma}\frac{c\gamma - b\beta}{(c+\beta)(\beta+\gamma)}.$$

De la comparaison des forces électromotrices.

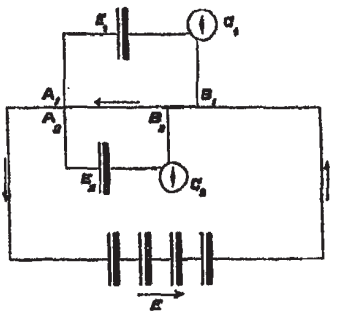
358. La disposition suivante, pour comparer la force électromotrice

(1) Dans le *Philosophical Magazine* de 1875, t. I, p. 515-525, M. Oliver Lodge le signale comme un défaut de la méthode de Mance que, la force électromotrice de la pile dépendant de l'intensité du courant dans cette pile, la déviation du galvanomètre ne peut être la même dans les deux positions de la clef abattue ou relevée, si l'équation $a\alpha = c\gamma$ est vraie. M. Lodge décrit une modification de la méthode de Mance qu'il a employée avec succès.

des systèmes voltaïques ou thermo-électriques que ne traverse aucun courant, n'exige qu'une série de bobines de résistance et une pile constante.

Supposons que la force électromotrice E de cette pile soit plus grande que celle de l'un ou l'autre des électromoteurs à comparer. En interposant entre les points A_1 et B_1 (*fig.* 39) du circuit primaire EB_1A_1E

Fig. 39.



une résistance suffisante R_1, on peut rendre la force électromotrice qui agit de B_1 vers A_1 égale à celle de l'électromoteur E_1, et si alors on relie aux points A_1 et B_1 les électrodes de cet électromoteur, il ne sera traversé par aucun courant. On placera donc un galvanomètre G_1 dans le circuit de l'électromoteur E_1, et l'on réglera la résistance entre A_1 et B_1 jusqu'à ce que le galvanomètre G_1 ne décèle plus de courant; on obtient alors l'équation

$$E_1 = R_1 C,$$

où R_1 est la résistance entre A_1 et B_1 et C l'intensité du courant dans le circuit primaire.

De même, en prenant le second électromoteur E_2 et plaçant ses électrodes en A_2 et B_2, de façon que le galvanomètre G_2 ne décèle aucun courant

$$E_2 = R_2 C,$$

où R_2 est la résistance entre A_2 et B_2. Si les observations des galvanomètres G_1 et G_2 sont simultanées, la valeur de C, l'intensité dans le circuit primaire, est la même dans les deux équations, et l'on trouve

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

De cette manière, on peut comparer les forces électromotrices de deux électromoteurs. La force électromotrice absolue d'un électromoteur peut être mesurée par la méthode électrostatique avec l'électromètre ou par la méthode électromagnétique avec un galvanomètre absolu.

Cette méthode, dans laquelle il n'y a de courant dans aucun des électromoteurs au moment de la comparaison, est une modification de la méthode de Poggendorff et est due à M. Latimer Clark, qui a obtenu ainsi les valeurs suivantes pour les forces électromotrices :

						volts.
Daniell	I.	Zinc amalgamé.	$SO^4H + 4Aq$			
		Solution concentrée de.....	SO^4Cu	cuivre		1,079.
»	II.	»	$SO^4H + 12Aq$			
		»	..... SO^4Cu	cuivre		0,978.
»	III.	»	$SO^4H + 12Aq$			
		»	..... AzO^6Cu	cuivre		1,00.
Bunsen	I.	»	$SO^4H + 12Aq$			
		»	..... AzO^6H	charbon		1,964.
»	II.	»	$SO^4H + 12Aq$			
		»	..... AzO^6H(1)	charbon		1,888.
Grove		»	$SO^4H + 4Aq$			
		»	..... AzO^6H	platine		1,956.

Un volt est une force électromotrice égale à 100000000 unités du système centimètre-gramme-seconde.

(1) Densité 1,38.

CHAPITRE XII.

DE LA RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE DES CORPS.

350. Les différents corps se rangent en trois classes, d'après la façon dont ils se comportent relativement au passage de l'électricité.

La première classe comprend tous les métaux, leurs alliages, quelques sulfures et d'autres composés renfermant des métaux; il faut y ajouter le carbone sous forme de charbon de cornue, et le sélénium sous la variété cristalline.

Pour toutes ces substances, la conduction se produit sans décomposition ni altération de la matière chimique des corps, ni dans la masse, ni aux points où le courant entre ou sort. Dans tous ces corps, la résistance augmente à mesure que la température s'élève (1).

La seconde classe comprend les substances que l'on appelle *électrolytes*, parce que le passage du courant est accompagné d'une décomposition de la substance en deux éléments qui apparaissent sur les électrodes. En général, les corps ne peuvent être électrolytes qu'à l'état liquide; cependant il y a certains colloïdes, tels que le verre à 100°, qui sont solides en apparence et qui sont pourtant des électrolytes. Des expériences de Sir B.-G. Brodie, il semble résulter que certains gaz sont susceptibles d'électrolyse sous l'influence d'une force électromotrice considérable.

Pour toutes les substances où la conduction est électrolytique, la résistance diminue à mesure que la température s'élève.

La troisième classe comprend des substances dont la résistance est si grande que les méthodes les plus délicates peuvent seules y percevoir le passage de l'électricité : elles sont appelées *diélectriques*. A cette classe appartiennent un grand nombre de corps solides, quelques liquides, tels que la térébenthine, le pétrole, la paraffine fondue, etc., et tous les gaz et les vapeurs. Le charbon sous forme de diamant et le sélénium sous la variété amorphe appartiennent à cette classe.

La résistance des corps de cette classe est énorme, comparée à celle

(1) La résistance des charbons employés pour la production de la lumière électrique décroît quand la température s'élève. [P.]

des métaux. Elle diminue à mesure que la température s'élève. En raison de la grande résistance de ces corps, il est difficile de déterminer si le faible courant que l'on peut faire passer au travers est ou non accompagné d'électrolyse.

De la résistance électrique des métaux.

360. Il n'y a point de partie des études électriques pour laquelle on ait fait des expériences plus nombreuses et plus soignées que pour la détermination de la résistance des métaux. Il est de la plus haute importance pour les télégraphes électriques que le métal dont sont faits les fils ait la plus petite résistance possible : on doit donc faire des mesures de résistance pour choisir les matériaux. Si une faute se produit sur la ligne, sa position est aussitôt déterminée par des mesures de résistance; ces mesures, auxquelles tant de personnes sont maintenant employées, exigent l'usage de bobines de résistance faites d'un métal dont les propriétés électriques aient été étudiées avec soin.

Les propriétés électriques des métaux et de leurs alliages ont été étudiées avec grand soin par MM. Matthiessen, Vogt et Hockin, et par MM. Siemens qui ont tant contribué à introduire dans la pratique journalière l'usage des mesures électriques exactes.

Des recherches du Dr Matthiessen, il résulte que l'effet de la température sur la résistance est à peu près le même pour un grand nombre de métaux purs; la résistance à 100°C. est à la résistance à 0°C. dans le rapport de 1,414 à 1, ou de 100 à 70,7. Pour le fer pur, le rapport est de 1,645; pour le thallium pur, de 1,458.

La résistance des métaux a été observée par le Dr C.-W. Siemens (1) dans les limites de température plus étendues, s'étendant du point de congélation de l'eau jusqu'à 350°C. et, dans quelques cas, jusqu'à 1000°C. Il trouve que la résistance croît avec la température, mais que l'accroissement diminue à mesure que la température s'élève. La formule qu'il trouve en accord très exact avec les observations de résistances faites à basse température par le Dr Matthiessen et avec ses propres observations s'étendant sur un intervalle de 1000°C. est

$$r = \alpha T^{\frac{1}{2}} + \beta T + \gamma,$$

où T est la température absolue comptée à partir de — 273°C. et où

(1) *Proc. R. S.*, 27 avril 1871.

α, β et γ sont des constantes. Ainsi, pour

Platine..... $r = 0{,}039369\,T^{\frac{1}{2}} + 0{,}00216407\,T - 0{,}2413.$

Cuivre..... $r = 0{,}026577\,T^{\frac{1}{2}} + 0{,}0031443\,T - 0{,}22751.$

Fer..... $r = 0{,}072545\,T^{\frac{1}{2}} - 0{,}0038133\,T - 1{,}23971.$

Grâce à des données de ce genre, on peut déterminer la température d'un four en observant la résistance d'un fil de platine placé dans ce four.

Le Dr Matthiessen a reconnu que deux métaux étant combinés pour former un alliage, la résistance de l'alliage est, dans la plupart des cas, supérieure à la résistance que l'on pourrait calculer d'après la résistance des métaux composants et leur proportion. Dans le cas des alliages d'or et d'argent, la résistance de l'alliage est plus grande que celle de l'or ou de l'argent pur, et, quand les proportions des deux métaux sont comprises dans certaines limites, la résistance varie très peu pour de légères variations dans les proportions. Pour cette raison, le Dr Matthiessen recommande, comme substance très convenable pour reproduire l'unité de résistance, un alliage de deux parties en poids d'or pour une partie d'argent.

En général, les changements de température ont moins d'effet sur la résistance électrique des alliages que sur celle des métaux.

Aussi fait-on les bobines de résistance ordinaires en argent allemand, qui présente une grande résistance variant peu avec la température.

On emploie aussi pour les bobines étalons un alliage de platine et d'argent.

361. La résistance électrique de certains métaux change par le recuit, et, à moins qu'un fil n'ait été soumis à des épreuves répétées, dans lesquelles il a été porté à de hautes températures sans éprouver de changement permanent de résistance, on ne peut le considérer avec certitude comme un étalon de résistance. La résistance de certains fils change avec le temps, sans même qu'ils soient soumis à des variations de température. Il est donc important de déterminer la résistance spécifique du mercure, métal qui, étant fluide, a toujours la même structure moléculaire, et qui est facile à purifier par distillation et traitement à l'acide nitrique. Un grand soin a été apporté à la détermination de la résistance de ce métal par W. et C.-F. Siemens qui l'a proposé pour servir d'étalon. Ces recherches ont été complétées par celles de Matthiessen et Hockin.

La résistance spécifique du mercure se déduit de la manière suivante de la résistance mesurée d'un tube de longueur l contenant un poids w de mercure.

Aucun tube de verre ne présente un diamètre égal dans toute sa longueur; mais, si l'on introduit dans le tube une petite quantité de mercure qui y occupe une longueur λ, dont le milieu est à une distance x d'un des bouts du tube, l'aire de la section aux environs de ce point sera $s = \frac{C}{\lambda}$, où C est une certaine constante.

Le poids du mercure qui remplit tout le tube est

$$w = \rho \int s\,dx = \rho C \Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{l}{n},$$

n étant le nombre des points équidistants pris sur la longueur du tube pour lesquels on a mesuré λ, et ρ est la masse de l'unité de volume.

La résistance du tube tout entier est

$$R = \int \frac{r}{s}\,dx = \frac{r}{C}\Sigma(\lambda)\frac{l}{n},$$

r étant la résistance spécifique par unité de volume; d'où

$$w R = r \rho \Sigma(\lambda)\Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{l^2}{n^2}$$

et

$$r = \frac{w R}{\rho l^2}\,\frac{n^2}{\Sigma(\lambda)\Sigma\left(\frac{1}{\lambda}\right)},$$

ce qui donne la résistance spécifique de l'unité de volume.

Pour trouver la résistance de l'unité de longueur et de l'unité de masse, nous devons multiplier par la densité.

Des expériences de Matthiessen et Hockin, il résulte que la résistance d'une colonne de mercure uniforme, d'une longueur de 1^m et du poids de 1^{gr}, est à 0°C. de 13,071 ohms; d'où il suit que, si le poids spécifique du mercure est 13,595, la résistance d'une colonne de 1^m de long et de 1^{mmq} de section est 0,96146 ohms (1).

362. Dans la Table suivante, R est la résistance en ohms à 0°C. d'une

(1) Provisoirement, la valeur de l'ohm légal a été fixée à 1^m,06 d'une colonne de mercure de 1^{mmq} de section, ce qui donne, pour la valeur légale de la résistance d'une colonne de mercure de 1^m, 0,9433 ohms. [P.]

colonne de 1^{m} de long pesant 1^{gr}, et r est la résistance en centimètres par seconde d'un centimètre cube, d'après les expériences de Matthiessen (1).

	Densité.		R.	r.	Accroissement de résistance pour 1°C. à 20°C.
Argent.....	10,50	étiré	0,1689	1609	0,377
Cuivre.....	8,95	étiré	0,1469	1642	0,388
Or.....	19,27	étiré	0,4150	2154	0,365
Plomb.....	11,391	comprimé	2,257	19847	0,387
Mercure.....	13,595	liquide	13,071	96146	0,072
Or 2, Argent 1...	15,218	étiré ou recuit	1,668	10988	0,065
Sélénium à 100°C.		cristallisé		6×10^{13}	1,00

De la résistance électrique des électrolytes.

363. On rencontre dans la mesure de la résistance électrique des électrolytes des difficultés dues à la polarisation des électrodes : il arrive que la différence de potentiels que l'on observe entre les électrodes métalliques est plus petite que la force électromotrice qui produit réellement le courant.

Il y a divers moyens de surmonter cette difficulté. Dans certains cas, on peut éliminer la polarisation en employant des électrodes faites d'une substance convenable, du zinc, par exemple, dans une solution de sulfate de zinc. Si l'on donne aux électrodes une surface considérable relativement à la section de la partie de l'électrolyte dont on doit mesurer la résistance, et si l'on n'emploie que des courants de courte durée ayant des directions alternées, on pourra faire les mesures avant que le passage du courant ait donné à la polarisation une intensité considérable.

Enfin, si l'on fait successivement deux expériences, dans l'une desquelles le courant a à parcourir dans l'électrolyte un chemin bien plus long, que dans l'autre, et, si l'on règle la force électromotrice de façon que l'intensité effective et la durée du passage du courant soient à peu près les mêmes dans les deux cas, on peut éliminer entièrement l'effet de la polarisation.

364. Dans les expériences du Dr Paalzow (2), les électrodes avaient la forme de grands disques, placés dans des vases plats, séparés, renfermant l'électrolyte, entre lesquels la communication était établie

(1) *Phil. Mag.*, mai 1865.
(2) *Monatsbericht*, Berlin, juillet 1868.

par le moyen d'un long siphon rempli de l'électrolyte et plongeant dans les deux vases. On employait deux de ces siphons de longueurs différentes.

R_1 et R_2 étant les résistances observées pour l'électrolyte dans ces siphons, les siphons étaient remplis de mercure et l'on trouvait alors R'_1 et R'_2 pour leurs résistances.

Alors on trouverait le rapport de la résistance de l'électrolyte à la résistance d'une masse de même forme de mercure à 0°C. par la formule

$$\rho = \frac{R_1 - R_2}{R'_1 - R'_2}.$$

Pour déduire des valeurs de ρ la résistance d'une longueur de $0^m,01$ ayant une section de 1^{cq}, nous devons multiplier par la valeur de r pour le mercure à 0°C. (*voir* § 361).

Voici les résultats donnés par Paalzow :

Mélanges d'acide sulfurique et d'eau.

		Résistance comparée au mercure.
SO^4H^2.....	15°C.	96950
$SO^4H^2 + 14H^2O$.....	19°C.	14157
$SO^4H^2 + 13H^2O$.....	22°C.	13310
$SO^4H^2 + 499H^2O$.....	22°C.	184773

Sulfate de zinc et eau.

$SO^4Zn + 23H^2O$.....	23°C.	194400
$SO^4Zn + 24H^2O$.....	23°C.	191000
$SO^4Zn + 105H^2O$.....	23°C.	354000

Sulfate de cuivre et eau.

$SO^4Cu + 45H^2O$.....	22°C.	202410
$SO^4Cu + 105H^2O$.....	22°C.	339341

Sulfate de magnésium et eau.

$SO^4Mg + 34H^2O$.....	22°C.	199180
$SO^4Mg + 107H^2O$.....	22°C.	324600

Acide chlorhydrique et eau.

$HCl + 15H^2O$.....	23°C.	13026
$HCl + 500H^2O$.....	23°C.	86679

365. MM. F. Kohlrausch et W.-A. Nippoldt (1) ont déterminé la

(1) *Pogg. Ann.*, vol. CXXXVIII, p. 286, octobre 1869.

résistance de mélanges d'acide sulfurique et d'eau. Ils employaient des courants magnéto-électriques alternés, dont la force électromotrice variait de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{14}$ d'éléments Grove; puis, au moyen d'un couple thermo-électrique cuivre-fer, ils ont réduit la force électromotrice à $\frac{1}{119000}$ de Grove. Ils ont trouvé que la loi de Ohm s'applique à l'électrolyte dans tout l'intervalle de ces forces électromotrices.

La résistance est minimum pour un mélange contenant environ $\frac{1}{3}$ d'acide sulfurique.

La résistance de l'électrolyte diminue à mesure que la température s'élève. La proportion dans laquelle la conductibilité augmente pour un accroissement de 1°C. est donnée par la Table suivante :

Résistance des mélanges d'acide sulfurique et d'eau à 22°C., *en fonction du mercure à* 0° (Kohlrausch et Nippoldt).

Densité à 18°,5.	Proportion de SO^4H^2.	Résistance à 22° ($Hg = 1$).	Accroissement de conductibilité par degré C. pour
0,9985	0,0	746300	0,47
1,00	0,2	465100	0,47
1,0504	8,3	34530	0,653
1,0989	14,2	18946	0,646
1,1431	20,2	14990	0,799
1,2045	28,0	13133	1,317
1,2631	35,2	13132	1,259
1,3163	41,5	14286	1,410
1,3547	46,0	15762	1,674
1,3994	50,4	17726	1,582
1,4482	55,2	20796	1,417
1,5026	60,3	25574	1,794

De la résistance électrique des diélectriques.

366. On a fait un grand nombre de déterminations de la résistance électrique de la gutta-percha et des autres matières qui servent d'isolants dans la fabrication des câbles télégraphiques, afin de se rendre compte de la valeur de ces corps comme substances isolantes.

Généralement les essais se font après que la matière a servi à revêtir le fil conducteur : on prend le fil pour une des électrodes et l'eau d'une cuve dans laquelle le câble est plongé pour l'autre électrode. On fait ainsi passer le courant à travers l'enveloppe cylindrique faite de matière isolante, enveloppe qui présente une grande surface et peu d'épaisseur.

On a reconnu qu'au moment où la force électromotrice commence

à agir, l'intensité indiquée au galvanomètre n'est pas du tout constante. Naturellement le premier effet produit est un courant passager de grande intensité, qui apporte toute la quantité d'électricité nécessaire pour charger les surfaces de la matière isolante, la distribution superficielle de l'électricité correspondant à la force électromotrice. Cette intensité initiale est donc une mesure, non de la conductibilité, mais de la capacité de la couche isolante.

Mais, même après que l'on a laissé tomber ce premier courant, le courant qui subsiste n'est pas constant et n'indique pas la conductibilité vraie de la substance. On a reconnu que le courant continue de décroître pendant au moins une demi-heure, de sorte qu'une détermination de la résistance faite d'après l'intensité donne une valeur plus grande si l'on a laissé passer un certain temps que si l'on a fait la mesure aussitôt après avoir mis la pile.

Ainsi, pour la composition isolante de Hooper, la résistance au bout de dix minutes était quatre fois, et la résistance au bout de dix-neuf minutes était vingt-trois fois la résistance observée à la fin de la première minute. Si l'on renverse le sens dans lequel agit la force électromotrice, la résistance tombe aussi bas ou plus bas que la première fois et remonte ensuite graduellement.

Ces phénomènes semblent dus à un état de la gutta-percha que, faute d'un meilleur nom, nous pouvons appeler *polarisation*, et que nous pouvons comparer, d'une part, à celui d'une série de bouteilles de Leyde chargées en cascade, d'autre part, à celui d'une pile secondaire de Ritter (*voir* § 271).

Si un certain nombre de bouteilles de Leyde de grande capacité sont reliées en série par des conducteurs de grande résistance (ainsi, des fils de coton humide dans les expériences de M. Gaugain), une force électromotrice agissant sur la série produit un courant qui est indiqué par le galvanomètre et qui diminue graduellement, jusqu'à ce que les bouteilles soient entièrement chargées.

La résistance apparente d'une pareille série augmente donc, et, si le diélectrique des bouteilles est un isolant parfait, elle augmente sans limites. Si l'on supprime la force électromotrice et que l'on relie les deux bouts de la série, on observe un courant de sens inverse dans lequel la quantité totale d'électricité est la même que dans le courant direct si l'isolement est parfait. On observe des effets analogues dans les piles secondaires, avec cette différence que l'isolement final n'est pas aussi bon et que la capacité par unité de surface est énormément plus grande.

Dans le cas d'un câble couvert de gutta-percha, on trouve que la pile

ayant été ainsi mise pendant une demi-heure et le fil étant ensuite relié à l'électrode extérieure, il se produit un courant de sens inverse qui dure quelque temps et ramène peu à peu le système à son état initial.

Ces phénomènes sont de la même nature que ce que l'on appelle *décharge résiduelle* des bouteilles de Leyde; mais la polarisation est bien plus considérable dans la gutta-percha, etc., que dans le verre.

Cet état de polarisation paraît être une propriété dirigée de la matière; car, pour qu'il se produise, il faut non seulement une force électromotrice, mais encore le passage, par déplacement ou de quelque autre manière, d'une quantité considérable d'électricité, et ce passage demande un temps considérable. Lorsque l'état de polarisation s'est établi, il donne lieu à une force électromotrice intérieure de sens inverse qui dure jusqu'à ce qu'il se soit formé un courant inverse où la quantité totale d'électricité est égale à celle du premier courant, ou jusqu'à ce que l'état de polarisation se soit dissipé lentement par une véritable conduction à travers le diélectrique.

Toute la théorie de ce que l'on appelle la *décharge résiduelle*, l'*absorption de l'électricité*, l'*électrification* ou la *polarisation* mérite une étude attentive qui conduira sans doute à d'importantes découvertes relatives à la structure intérieure des corps.

367. Pour le plus grand nombre des diélectriques, la résistance diminue à mesure que la température s'élève.

Ainsi, la résistance de la gutta-percha est environ vingt fois plus grande à 0°C. qu'à 24°C. MM. Bright et Clark ont trouvé que la formule suivante représente bien les résultats de leurs expériences. Si r est la résistance de la gutta-percha à la température de T°C., la résistance sera, à la température $T + t$,

$$R = r.\,0{,}8878^{t},$$

mais le facteur varie entre 0,8878 et 0,9.

M. Hockin a vérifié ce fait curieux que c'est seulement quelques heures après avoir pris sa température que la gutta-percha présente la résistance correspondante.

La température a une action moins marquée sur la résistance du caoutchouc que sur celle de la gutta-percha.

La résistance de la gutta-percha augmente beaucoup par la pression.

Voici la résistance en ohms de 1mc des sortes de gutta-percha employées pour différents câbles (1).

Nom des câbles.	
Mer rouge.....	$0{,}267 \times 10^{12}$ à $0{,}362 \times 10^{12}$
Malte-Alexandrie.....	$1{,}23 \times 10^{12}$
Golfe Persique.....	$1{,}80 \times 10^{12}$
Second câble atlantique.....	$3{,}42 \times 10^{12}$
Hooper, golfe Persique....	$74{,}7 \times 10^{12}$
Gutta-percha à 24°C.....	$3{,}53 \times 10^{12}$

368. La Table suivante, calculée d'après les expériences de M. Buff décrites au § 271, donne la résistance en ohms de 1mc de verre à différentes températures.

Températures.	Résistances.
200°C.....	227000
250.....	13900
300.....	1480
350.....	1035
400.....	735

369. M. C.-F. Varley (2) a étudié récemment les conditions du passage du courant dans les gaz raréfiés; il a trouvé que la force électromotrice E comprend une constante E_0 et une partie dépendant de l'intensité conformément à la loi de Ohm.

$$E = E_0 + RC.$$

Ainsi il fallait une force électromotrice équivalente à celle de 323 éléments Daniell pour que le courant commençât à passer dans un certain tube; mais il suffisait d'une force électromotrice de 304 éléments pour entretenir le courant. L'intensité du courant, mesurée au galvanomètre, était proportionnelle au nombre des éléments en sus de 304. Ainsi, pour 305 éléments la déviation était 2; elle était 4 pour 306, 6 pour 307, et ainsi de suite, jusqu'à 380 ou $304 + 76$, pour lequel la déviation était de 150 ou de $76 \times 1{,}97$.

De ces expériences, il ressort qu'il y a une sorte de polarisation des électrodes dont la force électromotrice est égale à celle de 304 éléments Daniell, et que, jusqu'à concurrence de cette valeur, la pile ne sert qu'à établir cet état de polarisation. Lorsque la polarisation maximum est établie, l'excès de la force électromotrice sur celle de 304 éléments Daniell sert à entretenir le courant, d'après la loi de Ohm.

(1) JENKIN, *Cantor lectures.*
(2) *Proc. R. S.*, 12 janvier 1871.

La loi des intensités dans les gaz raréfiés est donc tout à fait semblable à la loi des intensités dans les électrolytes, où nous avons dû tenir compte de la polarisation des électrodes.

A ce sujet se rattachent les résultats de Thomson, donnés au § 57 : d'après lui, la force électromotrice nécessaire pour produire une étincelle dans l'air est proportionnelle, non à la distance, mais à la distance plus une quantité constante. La force électromotrice qui correspond à cette quantité constante peut être regardée comme représentant l'intensité de la polarisation sur les électrodes.

370. MM. Wiedemann et Rühlmann ont récemment (1) étudié le passage de l'électricité dans les gaz. Le courant était fourni par une machine de Holtz, et la décharge avait lieu entre des électrodes sphériques, à l'intérieur d'un vase métallique contenant le gaz raréfié. La décharge était, en général, discontinue, et l'intervalle compris entre deux décharges se mesurait au moyen d'un miroir tournant monté sur l'axe de la machine de Holtz. On observait l'image de la série de décharges au moyen d'un héliomètre à objectif divisé, réglé de façon que l'image d'une des décharges coïncidât avec l'autre image de la décharge suivante. On a obtenu par cette méthode des résultats très concordants. On a trouvé que la quantité d'électricité qui passe dans chaque décharge est indépendante de la force du courant et de la substance des électrodes, mais qu'elle dépend de la nature et de la densité du gaz, et de la distance et de la forme des électrodes.

Ces recherches confirment le fait énoncé par Faraday (2), que la tension électrique nécessaire pour que la décharge disruptive commence à se produire sur la surface électrisée est un peu moindre pour les charges négatives que pour les positives, mais que, la décharge se produisant, il passe bien plus d'électricité à chaque décharge lorsque celles-ci commencent sur la surface positive. Ces faits viennent aussi à l'appui de l'hypothèse émise au § 57, que la couche de gaz condensée à la surface de l'électrode joue un rôle important dans le phénomène, et ils indiquent que cette condensation est la plus grande sur l'électrode positive.

(1) *Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft*, 20 octobre 1871.
(2) *Exp. Res.*, 1501.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR..... VI

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION..... IX

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION..... XIX

PRÉLIMINAIRES.

De la mesure des quantités.

1. L'expression d'une quantité se compose de deux facteurs : la valeur numérique et le nom de l'unité..... 1

2. Dimensions des unités dérivées..... 1

3-5. Les trois unités fondamentales : longueur, temps et masse..... 2

6. Unités dérivées..... 5

7. De la continuité et de la discontinuité en Physique..... 6

8. Discontinuité d'une fonction de plusieurs variables..... 8

9. Fonctions périodiques et fonctions multiformes..... 9

10. Relation entre les quantités physiques et les directions dans l'espace..... 9

11. Sens des termes *vecteur* et *scalaire*..... 10

12. Division des vecteurs physiques en deux classes, les forces et les flux..... 11

13. Relation entre les vecteurs qui se correspondent dans ces deux classes..... 12

14. Intégration d'une force le long d'une ligne, d'un flux sur une surface..... 13

15. Vecteurs longitudinaux et vecteurs de rotation..... 13

16. Des intégrales le long d'une ligne et des potentiels..... 14

17. Expression de Hamilton pour la relation d'une force et de son potentiel..... 16

18. Régions cycliques et Géométrie de position..... 17

19. Dans une région acyclique, le potentiel n'a qu'une valeur unique en chaque point..... 18

		Pages.
20.	Système des valeurs du potentiel dans une région cyclique	19
21.	Des intégrales sur une surface	21
22.	Surfaces, tubes et lignes de flux	23
23.	Des relations dextrogyres et lévogyres dans l'espace	26
24.	Transformation d'une intégrale prise le long d'une ligne en une intégrale prise sur une surface	28
25.	Effet de l'opérateur ∇ sur une fonction vectorielle	30
26.	Nature de l'opération ∇²	33

Ire PARTIE.

ÉLECTROSTATIQUE.

CHAPITRE I.

Description des phénomènes.

27.	Électrisation par frottement : il y a deux sortes d'électrisations auxquelles on a donné les noms de *vitrée* et *résineuse* ou de *positive* et *négative*	35
28.	Électrisation par induction	36
29.	Électrisation par conduction : conducteurs et isolants	37
30.	Dans l'électrisation par frottement, la quantité d'électrisation positive est égale à la quantité d'électrisation négative	39
31.	Charger un vase d'une quantité d'électrisation égale et contraire à celle d'un corps électrisé	39
32.	Décharge complète d'un conducteur dans un vase métallique	40
33.	La charge étudiée avec l'électroscope à feuilles d'or	40
34.	On peut appeler électricité l'électrisation considérée comme quantité mesurable	41
35.	L'électricité peut être traitée comme une quantité physique	42
36.	Théorie des deux fluides	43
37.	Théorie d'un seul fluide	45
38.	Mesure de la force agissant entre des corps électrisés	47
39.	Relation entre cette force et les quantités d'électricité	48
40.	Variation de la force avec la distance	49
41-42.	Définition de l'unité électrostatique d'électricité; ses dimensions.	49
43.	Démonstration de la loi de la force électrique	50
44.	Le champ électrique	51
45.	Force électromotrice et potentiel	52
46.	Surfaces équipotentielles. Exemple de leur emploi dans l'étude des phénomènes électriques	53
47.	Lignes de force	55
48.	Tension électrique	55
49.	Force électromotrice	56

		Pages.
50.	Capacité d'un conducteur. Accumulateurs électriques	56
51.	Propriétés des corps. Résistance	57
52.	Pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique	59
53.	Absorption de l'électricité	60
54.	Impossibilité d'une charge absolue	61
55.	Décharge disruptive. Effluve	61
56.	Aigrette	64
57.	Étincelle	64
58.	Phénomènes électriques de la tourmaline	65
59.	Plan de l'Ouvrage et aperçu des résultats	66
60.	Polarisation et déplacement électrique	68
61.	Le mouvement de l'électricité est analogue à celui d'un fluide incompressible	71
62.	Théories particulières à cet Ouvrage	72

CHAPITRE II.

Théorie mathématique élémentaire de l'électricité statique.

63.	Définition de l'électricité considérée comme quantité mathématique	75
64.	Densité rapportée à un volume, à une surface, à une ligne	75
65.	Définition de l'unité électrostatique d'électricité	77
66.	Loi de la force agissant entre les corps électrisés	78
67.	Force résultante entre deux corps	78
68.	Intensité résultante en un point	79
69.	Intégrale de l'intensité électrique le long d'une ligne : force électromotrice	80
70.	Potentiel électrique	81
71.	Intensité résultante en fonction du potentiel	82
72.	Le potentiel est le même en tous les points d'un conducteur	83
73.	Potentiel dû à un système électrique quelconque	84
74 *a*.	Démonstration de la loi de l'inverse carré. Expériences de Cavendish	84
74 *b*.	Forme modifiée de l'expérience de Cavendish	85
74 *c*, *d*, *e*.	Théorie de cette expérience	87
75.	Intégrale de l'induction électrique sur une surface	91
76.	Induction à travers une surface fermée due à un seul centre de force	92
77.	Extension par Poisson de l'équation de Laplace	93
78 *a*, *b*, *c*.	Conditions à la surface d'un corps électrisé	95
79.	Force résultante agissant sur une surface électrisée	98
80.	La charge d'un conducteur réside entièrement à sa surface	100
81.	Une distribution électrique sur des lignes ou des points est physiquement impossible	101
82.	Lignes d'induction électrique	102
83 *a*.	Pouvoir inducteur spécifique	104
83 *b*.	Distribution apparente de l'électricité	104

Pages.

CHAPITRE III.

Du travail électrique et de l'énergie d'un système de conducteurs.

84. Superposition des systèmes électrisés. Expression de l'énergie d'un système de conducteurs..... 107
85 *a*. Variation de l'énergie par le passage d'un état à un autre..... 108
85 *b*. Relation entre les potentiels et les charges..... 109
86. Théorème de réciprocité..... 000
87. Théorie d'un système de conducteurs : coefficients de potentiel; capacité; coefficients d'induction..... 112
88. Dimensions des coefficients..... 115
89 *a*. Relations nécessaires entre les coefficients de potentiel..... 115
89 *b*. Relations déduites de considérations physiques..... 116
89 *c*. Relations entre les coefficients de capacité et d'induction..... 117
89 *d*. Valeur approchée de la capacité d'un conducteur..... 117
89 *e*. Changement des coefficients de potentiel dû à la présence d'un nouveau conducteur..... 118
90 *a*. Détermination approchée des coefficients de capacité et d'induction de deux conducteurs..... 119
90 *b*. Même détermination pour un condensateur..... 120
91. Grandeurs relatives des coefficients de potentiel..... 121
92. Grandeurs relatives des coefficients d'induction..... 122
93 *a*. La force mécanique qui agit sur un conducteur exprimée en fonction des charges du système..... 122
93 *b*. Théorème sur les fonctions quadratiques..... 123
93 *c*. Travail des forces électriques pendant le déplacement d'un système dont les potentiels sont maintenus constants..... 124
94. Comparaison des systèmes électrisés semblables..... 125

CHAPITRE IV.

Théorèmes généraux.

95 *a*, *b*. Deux méthodes pour étudier les questions d'électricité..... 129
96 *a*. Théorème de Green..... 132
96 *b*. Cas où l'une des fonctions est multiforme..... 134
96 *c*. Cas où la région a des connexions multiples..... 135
96 *d*. Cas où l'une des fonctions devient infinie dans la région..... 136
97 *a*, *b*. Applications de la méthode de Green..... 137
98. Fonction de Green..... 139
99 *a*. Énergie d'un système exprimée par une intégrale triple..... 141
99 *b*. Il n'y a qu'une seule forme du potentiel lorsqu'on se donne sa valeur en tous les points d'une surface fermée..... 142
100 *a-e*. Théorème de Thomson..... 144
101 *a-h*. Expression de l'énergie dans le cas où les constantes diélectriques ne sont pas les mêmes dans les différentes directions. Extension du théorème de Green à un milieu hétérogène..... 149
102 *a*. Méthode pour trouver des valeurs limites des coefficients électriques..... 156

Pages.

102 *b*. Solution approchée du problème de la distribution électrique sur des conducteurs à potentiel donné..... 158
102 *c*. Application au cas d'un condensateur à plateaux légèrement courbes..... 159

CHAPITRE V.

Action mécanique entre deux systèmes électrisés.

103. Expression de la force en un point du milieu, en fonction des potentiels dus aux deux systèmes..... 163
104. En fonction du potentiel dû à l'ensemble des deux systèmes..... 164
105. Nature de la tension du milieu qui donnerait lieu à la même force..... 165
106. Détermination plus complète de la nature de cette tension..... 167
107. Modification des expressions pour la surface du conducteur..... 169
108. Discussion de l'intégrale du § 104 représentant la force, lorsqu'on l'étend à tout l'espace..... 171
109. Énoncés de Faraday, relativement à la tension longitudinale et à la pression latérale des lignes de force..... 172
110. Objections à l'hypothèse adoptée d'une tension dans un fluide... 173
111. Exposé de la théorie de la polarisation électrique..... 174

CHAPITRE VI.

Des points et des lignes d'équilibre.

112. Conditions en un point d'équilibre..... 177
113. Nombre des points d'équilibre..... 178
114. En un point d'équilibre il y a un point conique, en une ligne d'équilibre une ligne de recoupement de la surface équipotentielle..... 180
115. Angles sous lesquels une surface équipotentielle peut se recouper. 180
116. L'équilibre d'un corps électrisé ne peut être stable..... 182

CHAPITRE VII.

Forme des surfaces équipotentielles et des lignes de flux.

117. Importance pratique de connaître ces formes dans des cas simples..... 185
118. Deux points ayant des charges dans le rapport de 4 à 1 (*Pl. I*). 186
119. Deux points ayant des charges dans le rapport de 4 à -1 (*Pl. II*). 188
120. Un point électrisé dans un champ de force uniforme (*Pl. III*).. 190
121. Trois points électrisés; deux surfaces équipotentielles sphériques (*Pl. IV*)..... 192
122. Comment Faraday faisait usage de sa conception des lignes de force..... 192
123. Méthode pour tracer les diagrammes..... 194
Note I, par M. Cornu..... 198
Note II, par MM. Cornu et Potier..... 207

Pages

CHAPITRE VIII.

Cas simples de distribution.

124. Deux plans parallèles..... 215
125. Deux surfaces sphériques concentriques..... 217
126. Deux cylindres de même axe..... 219
127. Force longitudinale qui agit sur un cylindre, dont les extrémités sont entourées par des cylindres à des potentiels différents.... 220

CHAPITRE IX.

Sphériques harmoniques.

128. Heine, Todhunter et Ferrers..... 223
129 *a*. Points singuliers..... 223
129 *b*. Définition d'un axe..... 224
129 *c*. Construction des points de divers ordres 225
129 *d*. Potentiel en ces points. Harmoniques de surface Y_n..... 226
130 *a*. Harmoniques solides. $H_n = r^n Y_n$..... 227
130 *b*. Il y a, dans un harmonique solide d'ordre n, $2n+1$ constantes indépendantes..... 227
131 *a*. Potentiel dû à une couche sphérique..... 228
131 *b*. Son expression en harmoniques..... 229
131 *c*. Potentiel réciproque de la couche et du système extérieur..... 229
132. Valeur de $\iint Y_m Y_n ds$..... 230
133. Expression trigonométrique de Y_n..... 231
134. Valeur de $\iint Y_m Y_n ds$, quand $m = n$..... 234
135 *a*. Cas particulier où Y_m est un harmonique zonal. 234
135 *b*. Développement de Laplace pour un harmonique de surface..... 236
136. Harmoniques conjugués..... 237
137. Harmoniques fondamentaux d'ordre quelconque..... 238
138. Harmoniques zonaux..... 238
139. Coefficient de Laplace, ou harmonique biaxe..... 239
140 *a*. Harmoniques tesséraux : leur développement trigonométrique... 240
140 *b*. Notations employées par divers auteurs..... 242
140 *c*. Formes des harmoniques tesséraux et sectoriaux..... 243
141. Intégrale sur une surface du carré d'un harmonique tesséral.... 244
142 *a*. Détermination d'un harmonique tesséral donné, dans le développement d'une fonction..... 245
142 *b*. Le même en fonction des coefficients différentiels de la fonction.. 245
143. Formes de divers harmoniques..... 246
144 *a*. Conducteur sphérique dans un champ de force donné..... 248
144 *b*. Conducteur sphérique dans un champ pour lequel on connaît la fonction de Green..... 253
145 *a*. Distribution sur un conducteur à peu près sphérique..... 255
145 *b*. Cas d'une force électrique extérieure..... 257

Pages.

145 *a*. Cas où il est renfermé dans une enveloppe à peu près sphérique et à peu près concentrique 259
146. Équilibre électrique sur deux conducteurs sphériques 260
Note, par M. Potier, sur les sphériques harmoniques 268

CHAPITRE X.

Surfaces homofocales du second degré.

147. Lignes d'intersection de deux systèmes : leur recoupement par le troisième 283
148. Équation caractéristique de V en coordonnées ellipsoïdales 284
149. Expressions de α, β et γ au moyen des fonctions elliptiques 285
150. Cas particuliers de distribution sur les surfaces homofocales et leurs formes limites 286
151. Transformation continue en une figure de révolution autour de l'axe des z 289
152. Transformation en une figure de révolution autour de l'axe des x. 291
153. Transformation en un système de cônes et de sphères 292
154. Paraboloïdes confocaux 292

CHAPITRE XI.

Théorie des images électriques.

155. Méthode des images électriques de Thomson 296
156. Quand deux points ont des charges inégales et opposées, la surface pour laquelle le potentiel est zéro est une sphère 297
157. Images électriques 298
158. Distribution sur une sphère 300
159. Image d'une distribution quelconque 302
160. Force résultante entre un point électrisé et une sphère 303
161. Image dans une surface plane conductrice indéfinie 305
162. Inversion électrique 306
163. Théorèmes géométriques sur l'inversion 308
164. Application de la méthode au problème du § 158 308
165. Systèmes finis d'images successives 310
166. Cas de deux surfaces sphériques se coupant sous un angle $\frac{\pi}{n}$ 311
167. Énumération des cas où le nombre des images est fini 313
168. Deux sphères orthogonales 314
169. Trois sphères orthogonales 317
170. Quatre sphères orthogonales 318
171. Série infinie d'images : sphères concentriques 320
172. Deux sphères qui ne se coupent pas 322
173. Calcul des coefficients de capacité et d'induction 325
174. Calcul des charges des sphères et de la force qui agit entre elles 326
175. Distribution sur deux sphères en contact : sphère d'épreuve 328

		Pages.
176.	Étude de Thomson, dans le cas d'une calotte sphérique	331
177.	Distribution sur un ellipsoïde et sur un disque circulaire au potentiel V	331
178.	Induction sur un disque ou sur une calotte sphérique non isolée, due à un point électrisé situé dans le prolongement du plan ou de la surface sphérique	332
179.	Le reste de la sphère étant uniformément électrisé	333
180.	La calotte étant maintenue au potentiel V et soustraite à toute influence extérieure	333
181.	Induction sur une calotte due à un point situé d'une manière quelconque	334

CHAPITRE XII.

Fonctions conjuguées à deux dimensions.

182.	Cas où les quantités sont fonctions de x et y seulement	336
183.	Fonctions conjuguées	337
184.	On peut ajouter ou retrancher des fonctions conjuguées	338
185.	Des fonctions conjuguées de fonctions conjuguées sont conjuguées entre elles	339
186.	Transformation de l'équation de Poisson	341
187.	Théorèmes additionnels sur les fonctions conjuguées	342
188.	Inversion à deux dimensions	342
189.	Images électriques à deux dimensions	343
190.	Transformation de Neumann pour ce cas	344
191.	Distribution de l'électricité près de l'arête d'un conducteur formé de deux surfaces planes	346
192.	Ellipses et hyperboles (*Pl. X*)	348
193.	Transformation de ce cas (*Pl. XI*)	349
194.	Application à deux cas d'écoulement de l'électricité dans une nappe conductrice	352
195.	Application à deux cas d'induction électrique	353
196.	Capacité d'un condensateur formé d'un disque compris entre deux plans indéfinis	353
197.	Cas d'une série de plans équidistants recoupés à angle droit par un autre plan	356
198.	Cas d'une surface striée	357
199.	Cas d'une rainure rectiligne unique	357
200.	Modification du résultat pour une rainure circulaire	358
201.	Application à l'anneau de garde de Thomson	361
202.	Cas de deux plans parallèles recoupés par un plan perpendiculaire (*Pl. XII*)	362
203.	Cas d'un grillage de fils parallèles (*Pl. XIII*)	365
204.	Le cas d'un fil électrisé unique transformé dans le cas du grillage	367
205.	Le grillage employé comme écran pour protéger les corps de l'influence électrique	368
206.	Méthode d'approximation appliquée au cas du grillage	370

Pages.

CHAPITRE XIII.

Instruments électrostatiques.

207. La machine électrique à frottement..... 373
208. L'électrophore de Volta..... 374
209. Production d'électricité par un travail mécanique. Duplicateur tournant de Nicholson..... 375
210. Principe des machines électriques de Varley et de Thomson..... 376
211. Appareil à écoulement d'eau de Thomson..... 378
212. Machine électrique de Holtz..... 379
213. Théorie des régénérateurs appliqués aux machines électriques... 379
214. Des électromètres et des électroscopes. Instruments à indications et méthodes de réduction à zéro. Différence entre l'enregistrement et la mesure..... 382
215. Balance de torsion de Coulomb pour mesurer les charges..... 383
216. Électromètres de Snow Harris et de Thomson pour mesurer les potentiels..... 385
217. Principe de l'anneau de garde. Électromètre absolu de Thomson. 386
218. Méthode hétérostatique..... 390
219. Électromètres automatiques. Électromètre à quadrants de Thomson..... 391
220. Mesure du potentiel électrique d'un petit corps..... 394
221. Mesure du potentiel en un point de l'air..... 395
222. Mesurer le potentiel d'un conducteur sans le toucher..... 396
223. Mesure de la densité superficielle de la charge. Plan d'épreuve.. 397
224. Emploi d'une demi-sphère..... 399
225. Emploi d'un disque..... 400
226. Des accumulateurs électriques. La bouteille de Leyde..... 402
227. Accumulateurs à capacité mesurable..... 403
228. Le condensateur à anneau de garde..... 404
229. Comparaison des capacités des condensateurs..... 406

IIe PARTIE.

ÉLECTROCINÉMATIQUE.

—

CHAPITRE I.

Le courant électrique.

230. Il se produit un courant quand des conducteurs se déchargent.. 409
231. Transport de la charge électrique..... 409
232. Description de la pile voltaïque..... 410
233. Force électromotrice..... 411
234. Production d'un courant permanent..... 411
235. Propriétés du courant..... 412

		Pages.
236.	Action électrolytique	412
237.	Explication de quelques termes relatifs à l'électrolyse	413
238.	Différents modes de passage du courant	413
239.	Action magnétique du courant	414
240.	Le galvanomètre	415

CHAPITRE II.

Conduction et résistance.

241.	Loi de Ohm	416
242.	Production de chaleur par le courant. Loi de Joule	417
243.	Analogie entre la conduction de l'électricité et celle de la chaleur	418
244.	Différence entre ces deux classes de phénomènes	418
245.	Principe de Faraday sur l'impossibilité d'une charge absolue	419

CHAPITRE III.

Force électromotrice produite entre les corps en contact.

246.	Loi de Volta, sur la force électromotrice développée par le contact de deux métaux à la même température	421
247.	Effet des électrolytes	421
248.	Courant voltaïque de Thomson, où la gravité remplit le rôle de l'action chimique	422
249.	Phénomène de Peltier : on en déduit la force électromotrice thermo-électrique à une soudure	422
250.	Découverte des courants thermo-électriques par Seebeck	424
251.	Loi de Magnus pour les circuits unimétalliques	425
252.	Découverte de l'inversion thermo-électrique par Cumming	426
253.	Conséquences tirées de ces faits par Thomson; découverte des effets thermiques réversibles des courants électriques dans le cuivre et le fer	427
254.	Loi de Tait sur la force électromotrice d'un couple thermo-électrique	428

CHAPITRE IV.

Électrolyse.

255.	Loi des équivalents électrochimiques de Faraday	430
256.	Théorie de l'agitation moléculaire de Clausius	432
257.	Polarisation électrolytique	432
258.	La polarisation preuve de l'électrolyse	433
259.	Difficultés de la théorie de l'électrolyse	433
260.	Charges moléculaires	434
261.	Actions secondaires observées aux électrodes	436
262.	Conservation de l'énergie dans l'électrolyse	438
263.	L'affinité chimique mesurée sous forme de force électromotrice	439

Pages.

CHAPITRE V.

Polarisation électrolytique.

204. Difficultés que l'on rencontre à appliquer la loi de Ohm aux électrolytes..... 442
205. Cette loi n'en est pas moins applicable..... 442
206. Distinction des effets de polarisation et des effets de résistance.. 442
207. La polarisation est due à la présence des ions sur les électrodes : les ions ne sont pas à l'état de liberté..... 443
208. Relation entre la force électromotrice de polarisation et l'état des ions aux électrodes..... 444
209. Dissipation des ions et chute de polarisation..... 445
270. Limite de polarisation..... 445
271. La pile secondaire de Ritter comparée à la bouteille de Leyde... 446
272. Éléments voltaïques constants. Pile Daniell..... 449

CHAPITRE VI.

Théorie mathématique de la distribution des courants.

273. Conducteurs linéaires..... 454
274. Loi de Ohm..... 454
275. Conducteurs linéaires en série..... 454
276. Conducteurs linéaires en dérivation..... 455
277. Résistance d'un conducteur de section uniforme..... 456
278. Dimensions des quantités qui figurent dans la loi de Ohm..... 457
279. Résistance spécifique et conductibilité en mesure électromagnétique..... 458
280. Systèmes de conducteurs linéaires, en général..... 458
281. Propriété réciproque de deux conducteurs d'un système..... 460
282 *a*, *b*. Conducteurs conjugués..... 461
283. Chaleur développée dans le système..... 462
284. La chaleur développée est minimum lorsque les courants sont distribués d'après la loi de Ohm..... 463

CHAPITRE VII.

Conduction à trois dimensions.

285. Notation..... 465
286. Composition et décomposition des courants électriques..... 465
287. Détermination de la quantité qui traverse une surface..... 466
288. Équation d'une surface de flux..... 467
289. Relation entre trois systèmes quelconques de surfaces de flux... 467
290. Tubes de flux..... 468
291. Expression des composantes du flux en fonction des surfaces de flux..... 468
292. Expression simplifiée par un choix convenable des paramètres.. 468
293. Méthode complète pour déterminer le courant par l'emploi des tubes de flux unités..... 469

		Pages.
294.	Nappes de courants et fonctions de courants	469
295.	Équation de continuité	470
296.	Quantité d'électricité qui traverse une surface donnée	472

CHAPITRE VIII.

Résistance et conductibilité à trois dimensions.

297.	Équations de la résistance	473
298.	Équations de la conduction	474
299.	Production de chaleur	475
300.	Conditions de stabilité	476
301.	Équation de continuité dans un milieu homogène	476
302.	Solution de l'équation	476
303.	Théorie du coefficient T : son existence est peu probable	477
304.	Forme généralisée du théorème de Thomson	478
305.	Démonstration sans calcul	479
306.	Méthode de Strutt appliquée à un fil de section variable : limite inférieure de la résistance	481
307.	Limite supérieure	484
308.	Limite inférieure de la correction pour les bouts du fil	486
309.	Limite supérieure	488

CHAPITRE IX.

Conduction dans les milieux hétérogènes.

310.	Conditions à la surface	490
311.	Surface sphérique	492
312.	Couche sphérique	493
313.	Couche sphérique dans un champ de force uniforme	494
314.	Milieu où de petites sphères sont uniformément réparties	495
315.	Images dans une surface plane	496
316.	La méthode d'inversion ne s'applique pas dans l'espace à trois dimensions	498
317.	Conduction à travers une couche limitée par des plans parallèles.	498
318.	Série infinie d'images : application à l'induction magnétique	499
319.	Conducteurs stratifiés. Coefficient de conductibilité d'un milieu formé de couches alternées de deux substances	500
320.	Si aucune des deux substances ne possède la propriété rotatoire désignée par T, le corps ne la possède pas non plus	502
321.	Si les substances sont isotropes, la direction de plus grande résistance est normale aux couches	502
322.	Milieu renfermant des parallélépipèdes d'une autre matière	502
323.	La propriété rotatoire ne peut être introduite par des canaux conducteurs	503
324.	Construction d'un solide artificiel ayant des coefficients de conductibilité longitudinale et transversale donnés	504

Pages.

CHAPITRE X.

Conduction dans les diélectriques.

325. Dans un milieu rigoureusement homogène, il ne peut y avoir de charge à l'intérieur de la masse..... 506
326. Théorie des condensateurs dont le diélectrique n'est pas un isolant parfait..... 507
327. *La conduction simple ne donne pas lieu à des charges résiduelles*..... 508
328. Théorie d'un accumulateur complexe..... 509
329. Décharge résiduelle et absorption électrique..... 511
330. Décharge totale..... 513
331. Comparaison avec la conduction de la chaleur..... 515
332. Théorie des câbles télégraphiques; comparaison des équations avec celles de la conduction de la chaleur..... 516
333. Idées de Ohm sur ce sujet..... 518
334. Représentation mécanique des propriétés des diélectriques..... 518

CHAPITRE XI.

Mesure de la résistance électrique des conducteurs.

335. Avantages de l'emploi d'étalons de résistance matériels dans les mesures électriques..... 522
336. Divers étalons employés, divers systèmes proposés..... 522
337. Le système des unités électromagnétiques..... 523
338. L'unité de Weber et celle de l'Association britannique, ou Ohm. 523
339. La valeur théorique de l'ohm est de 10000000 de mètres par seconde..... 523
340. Reproduction des étalons..... 524
341. Forme des bobines de résistance..... 525
342. Bobines de grande résistance..... 526
343. Disposition des bobines en série..... 527
344. Disposition des bobines en dérivation..... 527
345. Comparaison des résistances : Méthode de Ohm..... 528
346. Galvanomètre différentiel..... 529
347. Pont de Wheatstone..... 533
348. Évaluation des limites de l'erreur commise..... 535
349. Disposition la plus avantageuse des conducteurs à comparer.... 536
350. Sur l'emploi du pont de Wheatstone..... 538
351. Méthode de Thomson pour les petites résistances..... 540
352. Méthode de Matthiessen et Hockin pour les petites résistances... 542
353. Comparaison des grandes résistances par l'électromètre..... 544
354. Par l'accumulation, avec un condensateur..... 545
355. Méthode électrostatique directe..... 545
356. Méthode de Thomson pour la résistance d'un galvanomètre..... 547
357. Méthode de Mance pour la résistance d'une pile..... 548
358. Comparaison des forces électromotrices..... 550

Pages.

CHAPITRE XII.

Résistance électrique des corps.

359. Métaux, électrolytes et diélectriques 553
360. Résistance des métaux 554
361. Résistance du mercure 555
362. Table des résistances des métaux 556
363. Résistance des électrolytes 557
364. Expériences de Paalzow 557
365. Expériences de Kohlrausch et Nippoldt 558
366. Résistance des diélectriques 559
367. Gutta-percha 561
368. Verre 562
369. Gaz 563
370. Expériences de Wiedemann et Rühlmann 563

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

8348 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.